ALGEBRA 1 (KMA/3A1)

Roman HAŠEK

January 7, 2022

Contents

1 Úvod do matematické logiky

Kapitola je věnována stručnému úvodu do matematické logiky. Na úrovni, která je nutná především pro bezpečné zvládnutí základních technik matematického důkazu. Pro hlubší studium naznačených pojmů a vlastností odkazuji čtenáře například na [1], [2], [5].

1.1 Základní pojmy matematické logiky

Výrok

Výrokem rozumíme každé sdělení, u kterého má smysl se ptát, zda je či není pravdivé, a pro které nastává právě jedna z těchto možností.

Příklady výroků:

- *5 je liché číslo*
- *Lidé jsou neopeření dvounožci*[1]
- $10 > 5$

Pravdivostní hodnota výroku

Jak bylo řečeno výše, pro výrok nastává právě jedna ze dvou možností, buď je pravdivý, nebo je nepravdivý. Není možné, aby nastaly obě tyto možnosti současně, stejně jako není možné, aby nenastala ani jedna z nich. Výrok tak má vždy jednoznačnou tzv. *pravdivostní hodnotu*, kterou je buď *pravda* (anglicky *true*) nebo *nepravda* (anglicky *false*). Pro vyjádření těchto hodnot většinou používáme 1 a 0, kdy 1 odpovídá *pravdě* a 0 odpovídá *nepravdě*. Někdy se též používají začáteční písmena slovních vyjádření uvedených hodnot, tj. P a N v češtině, nebo T a F v angličtině.

Výrokový a predikátový počet

Pokud je na výroky nahlíženo z hlediska *syntaktického*, tj. předmětem zájmu jsou pouze formální pravidla jejich spojování, jedná se o tzv. *výrokový počet* (též *výrokový kalkul*), pokud je brán zřetel i na *sémantické* hledisko, tj. předmětem zájmu jsou i významy výroků, hovoříme o tzv. *predikátovém počtu* (*predikátovém kalkulu*).

Výrokové proměnné (výroky). Výrokové formule (slova, složené výroky).

Pro zápis obecných výroků (většinou elementárních) a operací s nimi používáme *výrokové proměnné*, označované tradičně velkými písmeny z počátku abecedy, tj. např $A, B, C, \ldots$. Z elementárních výroků vytváříme uplatněním výrokových operací *složené výroky*, též *slova*, které představují tzv. *výrokové formule*. Například o složeném výroku $A \Rightarrow (A \vee B)$ můžeme

[1] Tento výrok je připisován Platonovi, viz `https://en.wiktionary.org/wiki/featherless_biped` nebo `https://en.wikipedia.org/wiki/Diogenes`

hovořit jako o výrokové formuli φ, zapisujeme $\varphi \sim A \Rightarrow (A \vee B)$, kde symbol $\sim$ představuje *totožnost*.

Dosadíme-li do libovolné výrokové formule za všechny proměnné nějaké konkrétní výroky, vznikne konkrétní výrok. Pravdivostní hodnota tohoto výroku je pak dána pravdivostními hodnotami výroků dosazených do formule. Určováním pravdivostních hodnot složených výroků dle operací v nich uplatněných se budeme zabývat zanedlouho. Naopak, jestliže máme nějaký konkrétní výrok, vždy k němu můžeme najít odpovídající formuli.

Další příklady výrokových formulí:

- $A \Rightarrow B$
- $2\,\text{dělí}\,\text{n} \Rightarrow 2\,\text{dělí}\,\text{n}^2$

1.2 Operace s výroky. Logické spojky.

Výrokové formule vytváříme z elementárních výroků užitím operací s výroky, z nichž každá je reprezentována specifickou *logickou spojkou*. Souvislost pravdivostní hodnoty výsledného výroku s pravdivostními hodnotami příslušných elementárních výroků je zaznamenána pomocí *tabulky pravdivostních hodnot*.

- **Negace**

  značíme: $\neg A$ nebo A'

  čteme: *negace* A

  Tabulka pravdivostních hodnot negace výroku A:

A	$\neg A$
1	0
0	1

- **Konjunkce**

  značíme: $A \wedge B$

  čteme: A *a* B / A *a zároveň (současně)* B

  Tabulka pravdivostních hodnot konjunkce $A \wedge B$:

A	B	$A \wedge B$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Příklad: Číslo 9 je druhou mocninou a je dělitelné třemi.

- **Disjunkce**

  značíme: $A \vee B$

  čteme: *A nebo B*

  Tabulka pravdivostních hodnot disjunkce $A \vee B$:

A	B	$A \vee B$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

  Příklad 1: Přímky p, q jsou rovnoběžné nebo různoběžné.

  Příklad 2: 0 nebo 1 řeší rovnici $x^2 - x = 0$.

  Disjunkce je pravdivá i v případě, že jsou pravdivé oba výroky A i B, jak vidíme z prvního řádku tabulky, nebo jako je ilustrováno druhým příkladem. Pro vyjádření *nebo* ve vylučovacím smyslu, tj. pokud nepřipouštíme současnou pravdivost výroků A i B, používáme tzv. **vylučovací disjunkci** (též **exkluzivní disjunkci**), kterou zapisujeme takto $A \veebar B$. Vylučovací disjunkci (nebo prostě vylučovací *nebo*) známe také z programování, kde se pro ni používá spojka `XOR`, na rozdíl od `OR` pro (normální) disjunkci.

- **Implikace**

  značíme: $A \Rightarrow B$

  čteme: *jestliže A, pak B / z A plyne B*

  Tabulka pravdivostních hodnot implikace $A \Rightarrow B$:

A	B	$A \Rightarrow B$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

  Příklad: Jestliže je přirozené číslo dělitelné devíti, pak je dělitelné i třemi.

  Podobu implikace má většina matematických vět. Všimněte si, že implikace není pravdivá jedině v případě, že z pravdivého *předpokladu* (*premisy*) A plyne nepravdivý *závěr* B.

  Nutná a postačující podmínka

  Vztah předpokladu A a závěru B v platné (pravdivé) matematické větě je vyjadřován také těmito formulacemi:

$$A \textit{ je postačující podmínkou pro } B.$$

$$B \textit{ je nutnou podmínkou pro } A.$$

Význam těchto tvrzení si objasníme na následující větě: *Jestliže je číslo* n *dělitelné* 4, *potom je sudé.*

Tato věta je bezesporu pravdivá[2]. Z výše uvedené tabulky pravdivostních hodnot implikace nás proto zajímají pouze řádky, v nichž je ve sloupci implikace uvedena 1.

Je zřejmé, že pokud je výrok A*: Číslo* n *je dělitelné* 4 pravdivý, je pravdivý i výrok B*: Číslo* n *je sudé*. Každé číslo dělitelné 4 je sudé. Stačí tedy vědět, že platí A, abychom měli jistotu, že platí B. Proto je A *postačující podmínkou pro* B!

Naopak, není možné, aby platil výrok A*: Číslo* n *je dělitelné* 4 a zároveň neplatil výrok B*: Číslo* n *je sudé*. B je tedy nutnou podmínkou pro A!

Význam nutné podmínky B se projeví v případě, kdy není splněna. Potom je jasné, že nemůže být splněn ani výrok A. Je-li n liché (tj. není sudé), nemůže být dělitelné 4. V rozličných partiích matematické teorie se tak setkáváme s tvrzeními, která hrají právě tuto důležitou roli nutné podmínky. Uveďme si jako příklad větu, z níž vychází velmi dobře známá **nutná podmínka konvergence řady:** *Jestliže nekonečná číselná řada* Σa_n *konverguje, pak platí* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

- **Ekvivalence**

  značíme: $A \Leftrightarrow B$

  čteme: *A tehdy a jen tehdy, když B*

  Tabulka pravdivostních hodnot ekvivalence $A \Leftrightarrow B$:

A	B	$A \Leftrightarrow B$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Příklad: Přirozené číslo je dělitelné devíti právě tehdy, když jeho ciferný součet je dělitelný devíti.

Ačkoliv většina matematických vět má podobu implikace, najdeme i takové, které jsou ekvivalencí. Jedním z nejznámějších případů matematické věty, která má podobu ekvivalence je *Pythagorova věta*. Viz následující formulace původní *Pythagorovy věty* a věty k ní obrácené dle [5] (str. 393).

Věta 1.1 (Pythagorova věta)**.** *V každém pravoúhlém trojúhelníku* ABC *platí* $c^2 = a^2+b^2$, *kde* a, b *jsou odvěsny a* c *je přepona* ΔABC.

[2]Pravdivost každé matematické věty je samozřejmě nutné dokázat. Nelze se spolehnout jenom na dojem nebo pocit. Prosím tedy čtenáře, aby si tento důkaz provedl.

Věta 1.2 (věta obrácená k Pythagorově větě)**.** *Jestliže v trojúhelníku ABC, jehož strany mají délky a, b, c, kde $c > a, c > b$, platí $a^2 + b^2 = c^2$, pak tento trojúhelník je pravoúhlý s pravým úhlem při vrcholu C.*

Příklad 1. *Proveďte pravdivostní ohodnocení (tj. vyplňte tabulku pravdivostních hodnot) výrokové formule $\varphi \sim \neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$.*

Řešení:

A	B	$\neg(A \wedge B)$	$\neg A \vee \neg B$	$\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$
1	1	0	0	1
1	0	1	1	1
0	1	1	1	1
0	0	1	1	1

Z tabulky pravdivostních hodnot vidíme, že výroková formule uvedená v příkladu 1 je vždy pravdivá. Jedná se o příklad tzv. *tautologie*.

1.3 Tautologie

Tautologií rozumíme výrokovou formuli, jejíž pravdivostní hodnota je rovna 1 bez ohledu na pravdivostní hodnoty výroků (proměnných), z kterých je sestavena. Opakem (negací) tautologie je *kontradikce*, tj. výrok, jehož pravdivostní hodnota je vždy 0.

Jako další příklady tautologií můžeme uvést následující výrokové formule, které vyjadřují klíčové vlastnosti operací *konjunkce* ($\wedge$) *disjunkce* ($\vee$).

Komutativnost $\wedge$, $\vee$:

$$(A \wedge B) \Leftrightarrow (B \wedge A),$$
$$(A \vee B) \Leftrightarrow (B \vee A).$$

Asociativnost $\wedge$, $\vee$:

$$(A \wedge (B \wedge C)) \Leftrightarrow ((A \wedge B) \wedge C),$$
$$(A \vee (B \vee C)) \Leftrightarrow ((A \vee B) \vee C).$$

Distributivnost $\wedge$, $\vee$[3]:

$$(A \wedge (B \vee C)) \Leftrightarrow ((A \wedge B) \vee (A \wedge C)),$$
$$(A \vee (B \wedge C)) \Leftrightarrow ((A \vee B) \wedge (A \vee C)).$$

[3] Jak vidíme z formulí, distributivnost operací $\wedge$, $\vee$ platí oběma směry. Tato vlastnost není rozhodně samozřejmá. Například operace $+$ (sčítání) a $\cdot$ (násobení) jsou distributivní jenom v tom smyslu, že lze roznásobit součet. Jedná se o tzv. $(+, \cdot)$-distributivnost. Distributivnost opačná, tj. $(\cdot, +)$ nemá v případě těchto operací smysl.

Tautologie využíváme například při formálních úpravách logických výrazů, které můžeme uplatnit například při důkazech některých matematických vět. Zvláště důležité jsou pro tyto účely následující tautologie.

De Morganovy zákony:

$$\begin{aligned} \neg(A \wedge B) &\Leftrightarrow \neg A \vee \neg B, \\ \neg(A \vee B) &\Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B. \end{aligned}$$

Zákon dvojité negace:

$$\neg(\neg A) \Leftrightarrow A.$$

Negace implikace:

$$\begin{aligned} \neg(A \Rightarrow B) &\Leftrightarrow A \wedge \neg B, \\ (A \Rightarrow B) &\Leftrightarrow \neg A \vee B. \end{aligned}$$

Obměna (Zákon transpozice):

$$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A).$$

Ekvivalence:

$$(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow (A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A).$$

Zákon o vyloučeném třetím:

$$A \vee \neg A.$$

Příklad 2. *Dokažte, že formule $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow \neg A \vee B$ je tautologií.*

1.4 Predikátový počet

Predikátový počet je část matematické logiky, která se zabývá popisem a studiem vnitřní (sémantické) struktury elementárních výroků (*praedicare* (lat.): vyhlašovat, prohlašovat).

Predikátový počet je založen na *predikátových formulích*, které jsou tvořeny tzv. *predikáty* (výrazy s proměnnými, které se po dosazení hodnot za tyto proměnné stanou výroky) a vymezením hodnot proměnných v predikátech prostřednictvím tzv. *kvantifikátorů*.

Příklady predikátových formulí:

$$\forall x \in R; x^2 + 1 > 0,$$
$$\exists n \in N; \sqrt{n} \in N.$$

Důležitou součástí abecedy predikátového počtu jsou **kvantifikátory**:

- $\forall$ – *obecný (velký) kvantifikátor*;

  čteme *pro všechna* (symbol $\forall$ představuje obrácené velké A, z anglického *all*.)

  Například zápis $\forall x \in M$ čteme *pro všechna x z M*, případně *pro všechna x, která náleží M* apod.

- $\exists$ – *existenční (malý) kvantifikátor*;

  čteme *existuje alespoň jedno* (symbol $\exists$ představuje obrácené velké E, z anglického *exists*.)

  Například zápis $\exists x \in M$ čteme *existuje alespoň jedno x z M*, případně *existuje x z M*.

  Poznámka: Existenční kvantifikátor $\exists$ je používán ve významu *existuje alespoň jeden*, tj. je jím připuštěna i možnost, že příslušných prvků dané množiny je více. Pokud potřebujeme vyjádřit *existenci právě jednoho prvku* dané množiny, můžeme použít tzv. *kvantifikátor jednoznačné existence* $\exists!$.

1.5 Negace kvantifikátorů

Postupy při negování kvantifikátorů popisují následující *De Morganovy zákony pro predikátový počet:*

$$\neg(\exists x \in A;\, V(x)) \Leftrightarrow \forall x \in A;\, \neg V(x),$$
$$\neg(\forall x \in A;\, V(x)) \Leftrightarrow \exists x \in A;\, \neg V(x),$$
$$\neg(\exists x \in A, \forall y \in B;\, V(x,y)) \Leftrightarrow \forall x \in A, \exists y \in B;\, \neg V(x,y).$$

Příklad použití predikátové formule a její negace si ukážeme na výroku: *Neexistuje největší reálné číslo.* Označme si ho φ. Potom můžeme psát

$$\varphi \sim \forall y\, \exists x; x > y,$$
$$\neg\varphi \sim \exists y\, \forall x; x \leq y.$$

Je užitečné promyslet si následující postupy negace slovního vyjádření kvantifikace:

φ	$\neg\varphi$
Každý prvek množiny A má danou vlastnost	Aspoň jeden prvek množiny A nemá danou vlastnost
Aspoň jeden prvek množiny A má danou vlastnost	Žádný prvek množiny A nemá danou vlastnost
Množina A má aspoň k prvků	Množina A má nejvýše $k-1$ prvků
Množina A má nejvýše k prvků	Množina A má aspoň $k+1$ prvků

KONTROLNÍ OTÁZKA:

Logické operace. Vyjmenujte logické spojky a uveďte tabulky jejich pravdivostních hodnot. Uveďte příklad tautologie. Čím se zabývá predikátový počet? Uveďte příklady predikátových formulí s obecným i existenčním kvantifikátorem. Jaké jsou jejich negace?

Příklad: *Proveďte pravdivostní ohodnocení výrokové formule:* $\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$.

Literatura

[1] Blažek, J a kol. *Algebra a teoretická aritmetika 1*. Státní pedagogické nakladatelství, Praha, 1983.

[2] Blažek, J a kol. *Algebra a teoretická aritmetika 2*. Státní pedagogické nakladatelství, Praha, 1985.

[3] Kuřina, F. *10 geometrických transformací*. Prometheus, Praha, 2002.

[4] Kuřina, F. *10 pohledů na geomatrii*. Akademie věd České republiky, Praha, 1996.

[5] Polák, J. (2015). *Přehled středoškolské matematiky* (10. vydání). Prometheus.

[6] Rektorys, K. *Přehled užité matematiky*. Prometheus, Praha, 2009.

[7] Sekanina, M. a kol. *Geometrie II*, SPN Praha, 1988.