ZÁKLADNÍ POJMY MATEMATICKÉ LOGIKY

Výrokový počet (kalkul) ... syntaktické hledisko
Predikátový počet (kalkul) ... sémantické hledisko

VÝROKOVÝ POČET

výrok = každé sdělení, u něhož má smysl se ptát, zda je či není pravdivé, a pro něž právě jedna z těchto dvou možností nastává

Příklad: 5 je liché číslo
Lidé jsou neopeření dvounožci
$10 > 15$

PRAVDIVOSTNÍ HODNOTA VÝROKU: 1, 0

VÝROKOVÉ PROMĚNNÉ (VÝROKY): $A, B, C, \dots$

VÝROKOVÉ FORMULE (SLOVA, SLOŽENÉ VÝROKY):

$\varphi \sim A \Rightarrow (B \vee C)$, $\sim$ ... totožnost

Význam pojmů:
Dosadíme-li do libovolné výrokové formule za všechny proměnné nějaké konkrétní výroky, vznikne výrok. Naopak, jestliže máme nějaký výrok, vždy k němu můžeme najít odpovídající formuli

Příklad: $A \Rightarrow B$

2 nedělí n $\Rightarrow$ 2 nedělí n^2

SPOJOVÁNÍ VÝROKŮ – LOGICKÉ SPOJKY

NEGACE $\neg A$, A', non$A$

A	A'
1	0
0	1

KONJUNKCE $A \wedge B$ (A a B, A a současně B)

Př.: Číslo 9 je druhou mocninou a je dělitelné třemi

A	B	$A \wedge B$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

DISJUNKCE $A \vee B$ (A nebo B)

Př.: Přímky p, q jsou rovnoběžné nebo různoběžné

Př: 0 nebo 1 řeší rovnici $x^2 - x = 0$

A	B	$A \vee B$
1	1	1 !
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Pozn.

$\veebar$

IMPLIKACE $A \Rightarrow B$ (jestliže A, pak B ; z A plyne B)

Př.: Jestliže je přirozené číslo dělitelné devíti, pak je dělitelné i třemi

A	B	$A \Rightarrow B$
1	1	1
1	0	0
0	1	1 !
0	0	1

EKVIVALENCE $A \Leftrightarrow B$ (A tehdy a jen tehdy když B)

Př.: Přirozené číslo je dělitelné devíti právě tehdy, když jeho ciferný součet je dělitelný devíti

A	B	$A \Leftrightarrow B$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

—

Pythagorova věta

Příklad: Proveďte pravdivostní ohodnocení (určete tabulku pravdivostních hodnot) výrokové formule φ

$$\varphi \sim \boxed{(A\land B)' \Leftrightarrow A'\lor B'}$$

A	B	$(A\land B)'$	$\Leftrightarrow$	$A'\lor B'$
1	1	0	1	0
1	0	1	1	1
0	1	1	1	1
0	0	1	1	1

TAUTOLOGIE = výroková formule, jejíž pravdivostní hodnota je rovna 1 bez ohledu na pravdivostní hodnoty výroků (proměnných), z kterých je sestavena

Opakem (negací) tautologie je KONTRADIKCE (pravdivostní hodnota je pořád 0)

PŘÍKLADY TAUTOLOGIÍ

$$\left.\begin{array}{l}(A\land B)\Leftrightarrow(B\land A)\\(A\lor B)\Leftrightarrow(B\lor A)\end{array}\right\}\text{komutativnost }\land,\lor$$

$$\left.\begin{array}{l}(A\land(B\land C))\Leftrightarrow((A\land B)\land C)\\(A\lor(B\lor C))\Leftrightarrow((A\lor B)\lor C)\end{array}\right\}\text{asociativnost }\land,\lor$$

$$\left.\begin{array}{l}(A\land(B\lor C))\Leftrightarrow((A\land B)\lor(A\land C))\\(A\lor(B\land C))\Leftrightarrow((A\lor B)\land(A\lor C))\end{array}\right\}\text{distributivnost }\land,\lor$$

Poznámka:

Tautologie můžeme využít při důkazech některých vět (např. množinových vztahů)

DŮLEŽITÉ TAUTOLOGIE

$(A \wedge B)' \Leftrightarrow A' \vee B'$
$(A \vee B)' \Leftrightarrow A' \wedge B'$ } de Morganova pravidla

$(A')' \Leftrightarrow A$ tzv. zákon dvojité negace

$(A \Rightarrow B)' \Leftrightarrow A \wedge B'$ negace implikace

$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow A' \vee B$

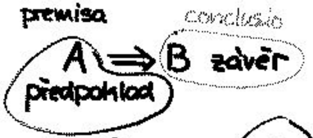
$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (B' \Rightarrow A')$ zákon transpozice (obměna)

$(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow ((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A))$

$A \vee A'$ tzv. zákon o vyloučeném třetím

IMPLIKACE

- matematické věty (definice ?)



A je postačující podmínkou pro B

B je nutnou podmínkou pro A

Příklad: Nutná podmínka konvergence řady

Věta: Jestliže nekonečná číselná řada $\sum a_n$ konverguje, pak platí $\lim_{n \to \infty} a_n = 0$

$A \Rightarrow B$

negace $(A \Rightarrow B)' \Leftrightarrow A \wedge B'$

obměna $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (B' \Rightarrow A')$!

obrácená implikace $B \Rightarrow A$

Příklad: Dokažte, že formule $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow A' \vee B$ je tautologií

PREDIKÁTOVÝ POČET

P.P. = část matematické logiky, která se zabývá popisem a studiem vnitřní (sémantické) struktury atomárních výroků

praedicare = lat. vyhlašovat, prohlašovat

PREDIKÁTOVÉ FORMULE

$\forall x \in R; \boxed{x^2+1>0}$ ← predikáty

$\exists n \in N; \boxed{\sqrt{n} \in N}$ ←

Důležitou součástí abecedy predikátového počtu jsou KVANTIFIKÁTORY

$\boxed{\forall} x \in A$ (pro všechna $x \in A$) obecný (velký) k.

$\boxed{\exists} x \in A$ (existuje (alespoň jedno) $x \in A$) existenční (malý) k.

$\boxed{\exists!} x \in A$ (existuje právě jedno $x \in A$)

Negace kvantifikátorů

de Morganovy zákony pro predikátový počet:

$$(\exists x \in A; V(x))' \Longleftrightarrow \forall x \in A; V'(x)$$

$$(\forall x \in A; V(x))' \Longleftrightarrow \exists x \in A; V'(x)$$

$$(\exists x \in A, \forall y \in B; V(x,y))' \Longleftrightarrow \forall x \in A, \exists y \in B; V'(x,y)$$

Příklad: $\varphi \sim$ neexistuje největší reálné číslo

$\varphi' \sim \exists y \, \forall x ; \; x \leq y$

$\varphi \sim \forall y \, \exists x ; \; x > y$

Negace kvantifikace

φ	φ'
Každý prvek množiny A má danou vlastnost	Aspoň jeden prvek mn. A nemá danou vlastnost
Aspoň jeden prvek mn. A má danou vlastnost	Žádný prvek množiny A nemá danou vlastnost
Množina A má aspoň k prvků	Množina A má nejvýše k-1 prvků
Množina A má nejvýše k prvků	Množina A má aspoň k+1 prvků

ZÁKLADNÍ POJMY MNOŽINOVÉ ALGEBRY

MNOŽINA = soubor objektů (prvků)

Množina je určena, pokud jsou dány všechny její prvky

- výčtem $M=\{1,2,3\}$
- charakteristickou vlastností

$$N=\{x\in R;\ x\geq 100\}$$

$$500\in N\ ,\ 500\notin M$$

PRÁZDNÁ MNOŽINA $\emptyset$

PODMNOŽINA $\underset{\uparrow}{\boxed{A\subseteq B}}$ $\forall x;\ x\in A\Rightarrow x\in B$

(neostrá) inkluze

připouštíme možnost $A=B$

VLASTNÍ PODMNOŽINA $\boxed{\underset{\uparrow}{A\subset B}\ \Leftrightarrow (A\subseteq B\wedge A\neq B)}$

ostrá inkluze

ROVNOST MNOŽIN $A=B$ $\forall x,y: (x\in A\Rightarrow x\in B)\wedge$
$\wedge(y\in B\Rightarrow y\in A)$

$$\boxed{(A=B)\Longleftrightarrow(A\subseteq B\wedge B\subseteq A)}$$

Pozn.: $\emptyset\subseteq M$ pro každou množinu M

POTENČNÍ MNOŽINA $P(M)$
= množina všech podmnožin mn. M

$$|M|=n\ \Rightarrow\ |P(M)|=2^n$$

OPERACE S MNOŽINAMI

SJEDNOCENÍ $A\cup B=\{x;\ x\in A\vee x\in B\}$

komutativní, asociativní

PRŮNIK $A\cap B=\{x;\ x\in A\wedge x\in B\}$

komutativní, asociativní

$A\cap B=\emptyset$ ... A, B jsou disjunktní

$A\cap B\neq\emptyset$ ... A, B jsou incidentní

$$\left.\begin{aligned} A\cup(B\cap C)&=(A\cup B)\cap(A\cup C)\\ A\cap(B\cup C)&=(A\cap B)\cup(A\cap C)\end{aligned}\right\}\ \text{distributivní zákony}$$

ROZDÍL $A\setminus B=\{x;\ x\in A\wedge x\notin B\}$

není komutativní , znač. též $A-B$

SYMETRICKÝ ROZDÍL $A\div B=(A\setminus B)\cup(B\setminus A)$

DOPLNĚK (KOMPLEMENT) množiny A v mn. M

$A'_M=M\setminus A$ znač. též $\bar{A}_M$

Nechť $A,B\subseteq M$, potom $A'_M\to A'$, $B'_M\to B'$

$$\boxed{\begin{aligned} &A\setminus B=A\cap B'\\ &(A\cup B)'=A'\cap B'\\ &(A\cap B)'=A'\cup B'\end{aligned}}\ \ \Big\}\ \text{de Morganova pravidla}$$

Příklad: Dokažte, že pro libovolné tři množiny A, B, C platí:

$$A-(B\cap C)=(A-B)\cup(A-C)$$

Řešení:

$$A-(B\cap C)=A\cap(B\cap C)'=A\cap(B'\cup C')=$$

$$=(A\cap B')\cup(A\cap C')=(A-B)\cup(A-C)$$

Q.E.D.

Příklad: Dokažte distributivní zákon

$$\underbrace{A\cup(B\cap C)}_{L}=\underbrace{(A\cup B)\cap(A\cup C)}_{P}$$

Řešení: $L=P \Leftrightarrow (L\subseteq P)\wedge(P\subseteq L)$

1. $\boxed{x\in L \Rightarrow x\in P}$

$x\in L=A\cup(B\cap C) \Rightarrow \overset{a)}{x\in A} \vee \overset{b)}{x\in B\cap C}$

a) $x\in A \Rightarrow x\in A\cup B \wedge x\in A\cup C \Rightarrow \underline{x\in P}$

b) $x\in B\cap C \Rightarrow x\in B\wedge x\in C \Rightarrow$

$\Rightarrow x\in A\cup B \wedge x\in A\cup C \Rightarrow \underline{x\in P}$

2. $x\in P \Rightarrow x\in L$

$x\in P=(A\cup B)\cap(A\cup C) \Rightarrow \underline{x\in A\cup B \wedge x\in A\cup C} \Rightarrow$

$\Rightarrow x\in A \vee (x\in B\wedge x\in C)$

a) $x\in A \Rightarrow \underline{x\in L}$

b) $x\notin A \Rightarrow x\in B\wedge x\in C \Rightarrow x\in B\cap C \Rightarrow x\in L$

závěr $L\subseteq P \wedge P\subseteq L \Rightarrow \underline{L=P}$

Q.E.D.