Důkazy matematických vět

obecné věty: $\forall x \in M;\ V(x)$

existenční věty: $\exists x \in M;\ V(x)$

Obecné věty jsou ve tvaru implikace $A \Rightarrow B$
nebo ve tvaru ekvivalence $A \Leftrightarrow B$

Typy důkazů:

1. PŘÍMÝ DŮKAZ implikace $A \Rightarrow B$

$$\underbrace{A \Rightarrow A_1,\ A_1 \Rightarrow A_2,\ A_2 \Rightarrow A_3, \ldots\ldots, A_n \Rightarrow B}_{\text{ŘETĚZEC PRAVDIVÝCH IMPLIKACÍ}}$$

PŘÍKLAD: $\forall n \in N;\ n$ je sudé $\Rightarrow n^2$ je sudé

DK: $\forall n \in N;\ n$ je sudé $\Rightarrow \exists k \in N;\ n = 2k \Rightarrow$
$n^2 = 4k^2 = 2 \cdot 2k^2 \Rightarrow n^2$ je sudé Q.E.D.

PŘÍKLAD: Dokažte $\sqrt{10 - \sqrt{11}} < \sqrt{10 + \sqrt{11}} - 1$

2. NEPŘÍMÝ DŮKAZ implikace $A \Rightarrow B$

= přímý důkaz její obměny $B' \Rightarrow A'$ (kontrapozice)

platí tautologie $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (B' \Rightarrow A')$

PŘÍKLAD: $\forall n \in N;\ n^2$ je sudé $\Rightarrow n$ je sudé

DK: obměna: $\forall n \in N;\ n$ je liché $\Rightarrow n^2$ je liché

PŘÍKLAD: Pro všechna přirozená čísla a, b platí: Když se nedá zkrátit zlomek $\frac{a-b}{a+b}$, pak se nedá zkrátit ani $\frac{a}{b}$.

3. DŮKAZ SPOREM

Dokazujeme-li pravdivost výroku V, vyjdeme z jeho negace V' a řetězcem implikací $V' \Rightarrow V_1 \Rightarrow V_2 \Rightarrow \ldots \Rightarrow Z'$ dospějeme k nepravdivému závěru Z', tj. dospějeme ke <u>sporu</u>

PŘÍKLAD: $\forall n \in N;\ n^2$ je sudé $\Rightarrow n$ je sudé

DK: (sporem)

předpokl., že platí: $\exists n \in N;\ n^2$ je sudé $\wedge$ n je liché

n je liché $\Rightarrow \exists k \in N;\ n = 2k+1 \Rightarrow$
$\Rightarrow n^2 = 2k(2k+2)+1 \Rightarrow n^2$ je liché ... spor

Q.E.D.

PŘÍKLAD: $\forall a,b \in R;\ (a>0 \wedge b>0) \Rightarrow \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$

DK: (sporem) $\exists a,b \in R;\ a>0 \wedge b>0 \wedge \frac{a+b}{2} < \sqrt{ab}$

$$\frac{(a+b)^2}{4} < ab$$

$$\vdots$$

$$a^2 - 2ab + b^2 < 0$$

$(a-b)^2 < 0$ spor (s def. 2. mocniny r.č.)

$\Rightarrow$ platí původní předpoklad

Q.E.D.

4. DŮKAZ MATEMATICKOU INDUKCÍ

$$\forall n \in N, n \geq n_0; V(n)$$

I. Dokážeme platnost $V(n_0)$

II. (indukční krok) Dokážeme, že pro každé $n \geq n_0$ platí implikace

$$\underbrace{V(n)}_{\text{indukční předpoklad}} \Longrightarrow V(n+1)$$

PŘÍKLAD: $\forall n \in N;\ 1^2+2^2+\ldots+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

I. $V(1)$: $1^2=\frac{1}{6}\cdot 1\cdot 2\cdot 3 \Rightarrow 1=1$ platí

II. $V(n) \overset{?}{\Longrightarrow} V(n+1)$

$V(n)$ platí, tj.:

$V(n)$: $1^2+2^2+\ldots+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

$V(n+1)$: $\underbrace{1^2+2^2+\ldots+n^2}+(n+1)^2=\frac{1}{6}(n+1)(n+2)(2n+3)$

$$\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+(n+1)^2 \overset{?}{=} \frac{1}{6}(n+1)(n+2)(2n+3)$$

$\vdots$

PŘÍKLAD: $\forall n \in N;\ 11 \mid (6^{2n}+3^{n+2}+3^n)$

Dk:

I. $V(1)$: $11 \mid 6^2+3^3+3=66$

II. $11 \mid 6^{2n}+3^{n+2}+3^n \overset{?}{\Longrightarrow} 11 \mid 6^{2(n+1)}+3^{(n+1)+2}+3^{n+1}$

$$6^{2(n+1)}+3^{(n+1)+2}+3^{n+1}=6^{2n}\cdot 36+3^{n+2}\cdot 3+3^n\cdot 3=$$
$$=33\cdot 6^{2n}+3(6^{2n}+3^{n+2}+3^n)$$

c.b.d.

DŮKAZY MATEMATICKÝCH VĚT – ÚLOHY

(1.) Dokažte, že číslo $\sqrt{7}$ je iracionální

(2.) Dokažte nepřímo větu:
„Pokud je součet dvou celých čísel liché číslo, potom je součin těchto čísel číslo sudé."

(3.) Dokažte, že jestliže nelze kružítkem a pravítkem sestrojit úhel o velikosti 1°, pak nelze sestrojit ani úhel o velikosti 19°.

(4.) Matematickou indukcí dokažte

MOIVROVU VĚTU

Věta: $\forall n \in N, \forall x \in R: (\cos x + i \sin x)^n = \cos nx + i \sin nx$

(5.) Matematickou indukcí dokažte

BINOMICKOU VĚTU

Věta: $\forall n \in N, \forall a, b \in R:$

$$(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \ldots + \binom{n}{n-1} a b^{n-1} + b^n$$

(6.) Dokažte přímo:
$\forall a, b \in (1; \infty); \log_a b + \log_b a \geq 2$

RELACE NA MNOŽINĚ

BINÁRNÍ RELACE

PŘÍKLADY:

(1.) Sestrojte v R^2 graf relace S, pro níž platí následující podmínka:

$$(x-3)^2+(y-2)^2 \leq 4 \wedge (x-3)^2+(y-1)^2 \geq 1$$

(2.) Neostrá nerovnost „$\leq$" na množině $M=\{1,2,3\}$

(3.) Vztah „sympatie" ve skupině lidí

(4.) Vztah „líbí se mi" mezi množinou chlapců a dívek (nebo naopak, mezi množinou dívek a chlapců).

(5.) $x \equiv y \pmod 3$ ... kongruence modulo 3

Poznatek : Vždy se jedná o množinu, jejímiž prvky jsou uspořádané dvojice

Uspořádaná dvojice

značíme $[a,b]$ nebo (a,b)

pro $a \neq b$ je $[a,b] \neq [b,a]$

Neuspořádaná dvojice - značíme $\{a,b\}$

Kuratowského definice uspořádané dvojice:

$$[a,b]=\{\{a\},\{a,b\}\}$$

Kartézský součin

Definice: Nechť A a B jsou množiny. Symbolem $A\times B$ označíme množinu všech uspořádaných dvojic (a,b) takových, že $a\in A$ a $b\in B$. Zapisujeme

$$A\times B=\{(a,b);\ a\in A,\ b\in B\}$$

$A\times B$ se nazývá kartézský součin množin A a B.

PŘÍKLAD: a) $M_1=\{a,b\}$, $M_2=\{1,2\}$; $M_1\times M_2=?$, $M_2\times M_1=?$

b) $A=\langle 1,2\rangle$, $B=\langle 2,4\rangle$; $A\times B=?$

c) $A=\emptyset$, $B=\{2,3,4\}$; $A\times B=?$

d) $K=\{1,2\}$; $K\times K=?$

POZNÁMKY: 1) obecně je $A\times B\neq B\times A$
tj. kartézský součin není KOMUTATIVNÍ

2) $A=\emptyset \vee B=\emptyset \Rightarrow A\times B=\emptyset$

3) pro $A=B$:

$A\times A=A^2$ ... druhá kartézská mocnina

ZOBECNĚNÍ

$A_1\times A_2\times A_3$, $A_1\times A_2\times\cdots\times A_n$

$\underbrace{A\times A\times\cdots\times A}_{n\text{ krát}}=A^n$

$A^0=\{\emptyset\}$, pokud $A\neq\emptyset$

Definice: Kartézským součinem množin $M_1, M_2, \ldots, M_n$ rozumíme množinu $M_1 \times M_2 \times \ldots \times M_n$ všech uspořádaných n-tic $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, ve kterých $a_i \in M_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

POZNÁMKA: ① Pokud $M_1 = M_2 = \ldots = M_n = M$, hovoříme o n-té kartézské mocnině, kterou značíme M^n.

② Nejčastěji se setkáme s kartézským součinem dvou a tří množin

$A \times B = \{(x,y);\ x \in A \wedge y \in B\}$

$R^2 = R \times R = \{(x,y);\ x \in R \wedge y \in R\}$

$A \times B \times C = \{(x,y,z);\ x \in A \wedge y \in B \wedge z \in C\}$

$R^3 = R \times R \times R = \{(x,y,z);\ x \in R \wedge y \in R \wedge z \in R\}$

PROBLÉMY: ① Ukažte, že obecně $M_1 \times M_2 \neq M_2 \times M_1$

② Dokažte, že pro libovolné množiny A, B, C platí:

a) $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$

b) $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$

c) $(A \setminus B) \times C = (A \times C) \setminus (B \times C)$

Binární relace

Definice: Jsou-li A, B libovolné množiny, pak binární relací z množiny A do množiny B (nebo relací mezi množinami A a B) nazýváme každou podmnožinu R kartézského součinu $A \times B$, tj. $R \subseteq A \times B$

Poznámky:

1) Pokud je $A = B$ hovoříme o relaci na množině (v množině)

2) $(a,b) \in R$, aRb } čteme: „prvek a je v relaci R s prvkem b"

   $(a,b) \notin R$, $a\bar{R}b$ } čteme: „prvek a není v relaci R s prvkem b"

3) $A = \emptyset \vee B = \emptyset \Rightarrow$ relace z A do B je $\emptyset$

4) prázdná množina je též relací (dokonce libovolné četnosti)

5) Většinou vynecháváme slovo „binární" a hovoříme pouze o RELACÍCH

Zobecnění: Relace vyšších četností

Def.: n-ární relací R na množinách $M_1, M_2, \dots, M_n$ rozumíme libovolnou podmnožinu R kartézského součinu $M_1 \times M_2 \times \dots \times M_n$, tj. $R \subseteq M_1 \times M_2 \times \dots \times M_n$

Poznámky:

1. Pokud $M_1 = M_2 = \dots = M_n = M$, hovoříme o n-ární relaci na M
2. $n = 2$ ... binární relace
   $n = 3$ ... ternární relace
   $n = 4$ ... kvaternární relace
3. $R \subseteq A \times B$ ... relace z A do B
   $R \subseteq A^2$ ... relace na A
4. $(a,b) \in R$ ... prvky a, b jsou v relaci R
   nebo aRb ... a je v relaci R s b

Znázornění binárních relací

1. kartézský graf
2. uzlový graf

Pozn.
matice sousednosti

PŘÍKLAD: Znázorněte binární relaci R na množině $M = \{1, 2, 3\}$, je-li $R = \{[1,2], [1,3], [2,1], [1,1], [2,3], [3,2]\}$

a) kartézským grafem

b) uzlovým grafem

Def.: Binární relaci R' na množině M takovou, že $R' = (M \times M) \setminus R$ nazýváme <u>doplňkovou</u> (<u>komplementární</u>) relaci k b. relaci R.

PŘÍKLAD: Určete R' k relaci R z předchozího příkladu

Def.: <u>Inverzní relací</u> R^{-1} k relaci R nazýváme relaci
$$R^{-1} = \{(b,a);\ (a,b) \in R\}$$

PŘÍKLAD: Určete R^{-1}

Def.: Nechť R, S jsou binární relace na M. <u>Složenou relací</u> $R \circ S$ (<u>v tomto pořadí</u>) rozumíme relaci definovanou předpisem
$$R \circ S = \{(a,b);\ \exists c,\ (a,c) \in R \wedge (c,b) \in S\}$$

PŘÍKLAD: $M = \{1,2,3\}$
$R = \{[1,2],[1,3],[2,1],[1,1],[2,3],[3,2]\}$
$S = \{[2,3],[3,1],[3,2]\}$

Určete $R \circ S$
$S \circ R$

Def.: <u>Jednotková relace</u> se nazývá relace
$$I = \{(a,a),\ \forall a \in M\}$$
GRAFY

Def.: <u>Samoinverzní relací</u> rozumíme relaci R, pro kterou platí $R = R^{-1}$
GRAFY

ÚKOL: vytvořit nějakou samoinverzní relaci