ÚKOL: Dokažte, že pro libovolné binární relace S, T platí:

a) $(S^{-1})^{-1} = S$

b) $(S \cup T)^{-1} = S^{-1} \cup T^{-1}$

c) $(S \cap T)^{-1} = S^{-1} \cap T^{-1}$

d) $I \circ S = S \circ I = S$

PŘÍKLAD: Na množině $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ jsou definovány následující relace

a) $R = \{(x, y) \in M \times M;\ 2 \mid x - y\}$

b) $S = \{(x, y) \in M \times M;\ x < y\}$

Nakreslete uzlové a kartézské grafy těchto relací.

VLASTNOSTI RELACÍ

<u>Definice</u>: Nechť R je relace definovaná na množině M. Relace R se nazývá na množině M:

a) REFLEXIVNÍ, právě když

$$\forall x \in M: (x,x) \in R,$$

b) ANTIREFLEXIVNÍ, právě když

$$\forall x \in M: (x,x) \notin R,$$

c) SYMETRICKÁ, právě když

$$\forall x,y \in M: (x,y) \in R \Rightarrow (y,x) \in R,$$

d) ANTISYMETRICKÁ, právě když

$$\forall x,y \in M: [x \neq y \wedge (x,y) \in R] \Rightarrow (y,x) \notin R,$$

e) SOUVISLÁ, právě když

$$\forall x,y \in M: [x \neq y \wedge (x,y) \notin R] \Rightarrow (y,x) \in R,$$

f) TRANZITIVNÍ, právě když

$$\forall x,y,z \in M: [(x,y) \in R \wedge (y,z) \in R] \Rightarrow (x,z) \in R$$

---

g) ASYMETRICKÁ: $\forall x,y \in M: (x,y) \in R \Rightarrow (y,x) \notin R$

h) ATRANZITIVNÍ: $\forall x,y,z \in M: [(x,y) \in R \wedge (y,z) \in R] \Rightarrow (x,z) \notin R$

i) ÚPLNÁ: $\forall x,y \in M: (x,y) \in R \wedge (y,x) \in R$

j) UNIVERZÁLNÍ: $\forall x,y \in M: (x,y) \in R \wedge (y,x) \in R \wedge (x,x) \in R$

k) IDENTICKÁ (JEDNOTKOVÁ): $\forall x,y \in M: (x,y) \in R \Rightarrow x = y$

PROBLÉM:
Jak poznáme zavedené vlastnosti relací na jejich grafickém znázornění?

PROMYSLETE DŮKAZY TĚCHTO VĚT:

V1: Relace R je na množině M reflexivní právě tehdy, když platí $I \subseteq R$, kde I je jednotková relace.

V2: Relace R je na M antireflexivní, právě když
$$R \cap I = \emptyset$$

V3: Relace R je symetrická na M, právě když
$$R = R^{-1}$$

V4: Relace R je na M antisymetrická, právě když
$$R \cap R^{-1} \subseteq I$$

V5: Relace R je souvislá na M, právě když
$$R \cup R^{-1} \supseteq M \times M - I$$

V6: Relace R je tranzitivní na M, právě když
$$R \circ R \subseteq R$$

PROBLÉM: Je-li relace symetrická a tranzitivní, je též reflexivní
Je to správná úvaha?

EKVIVALENCE

PŘÍKLAD: Určete vlastnosti následujících relací.

a) rovnost v N $\quad R_1 = \{(x,y);\ x = y\}$

b) shodnost trojúhelníků

$R_2 = \{(x,y);\ x \cong y\}$

c) kongruence modulo 3

$R_3 = \{(x,y);\ 3 \mid x-y\}$

Pozn.: $x \equiv y \pmod 3$ ... x je kongruentní s y modulo 3

tj. x, y mají <u>stejný zbytek</u> při dělení 3

EKVIVALENCE

Definice: Reflexivní, Symetrická a Tranzitivní binární relace R na množině M se nazývá ekvivalence na množině M.

PROBLÉM: Průnik libovolného neprázdného systému ekvivalencí na M je opět ekvivalence na M.
Ukažte, že pro sjednocení to neplatí

Každá ekvivalence definovaná na nějaké množině tuto množinu rozkládá na systém disjunktních podmnožin zvaných třídy rozkladu

Všechny vzájemně ekvivalentní prvky náleží právě jedné takové třídě.

ROZKLAD MNOŽINY (FAKTOROVÁ MNOŽINA)

Definice: Rozkladem množiny M na třídy (faktorovou množinou) rozumíme systém podmnožin M_i, $i \in I$ (indexová množina) takový, že:

1. $\bigcup_{i \in I} M_i = M$

2. $\forall i, j \in I: M_i \cap M_j \neq \emptyset \Rightarrow M_i = M_j$

PŘÍKLAD: Rozklad množiny celých čísel Z:
$M_1 = \{0\}$, $M_2 = Z^+$, $M_3 = Z^-$

PROBLÉM: Systém $\bigcup_{i\in I} M_i$, $I=\{1,2,3\}$, kde

$M_1=\{0,1\}$, $M_2=\mathbb{Z}^+$, $M_3=\mathbb{Z}^-$ není rozkladem množiny $\mathbb{Z}$.

PROČ?

Poznámka: Množiny M_i patřící do rozkladu se nazývají třídy rozkladu.

SOUVISLOST MEZI EKVIVALENCÍ A ROZKLADEM

1. Rozklad na množině definuje ekvivalenci

Věta: Nechť M_i, $i\in I$ je rozklad na množině M. Pak relace R, definovaná na M předpisem

$$(x,y)\in R \Leftrightarrow \exists i\in I: x\in M_i \wedge y\in M_i,$$

je ekvivalence na množině M.

Dk: R, S ... zřejmé

T: $(x,y)\in R \wedge (y,z)\in R \Rightarrow \exists i,j\in I: x,y\in M_i \wedge y,z\in M_j \Rightarrow$
$\Rightarrow M_i\cap M_j \neq \emptyset \Rightarrow M_i=M_j \Rightarrow x,y,z\in M_i \Rightarrow (x,z)\in R$

PŘÍKLAD: $M=\{0,1,2,\dots,10\}$

$M_1=\{1,4,7,10\}$, $M_2=\{2,5,8\}$, $M_3=\{0,3,6,9\}$

Najděte příslušnou ekvivalenci

2.) Ekvivalence na množině vytváří její rozklad

<u>Definice</u>: Nechť R je ekvivalence na množině M, $a \in M$. Množinu

$$M_a = \{ b \in M ; (a,b) \in R \}$$

nazveme <u>třídou množiny M</u> podle ekvivalence R určenou prvkem a

<u>Poznámka</u>: ① Množina M_a je prostě množina všech prvků z M, které jsou ekvivalentní s a.

② M_a se také nazývá <u>třídou ekvivalence R určenou prvkem a</u>.

<u>Věta</u>: Nechť R je ekvivalence na množině M. Potom systém všech tříd M_a, $a \in M$ množiny M podle R tvoří rozklad na množině M.

DK: ① $\bigcup_I M_i = M$ tj. $\bigcup_{a \in M} M_a = M$ (R)

② $M_i \cap M_j \neq \emptyset \Rightarrow M_i = M_j$

$M_a \cap M_b \neq \emptyset \Rightarrow \exists c ; (a,c) \in R \wedge (b,c) \in R \xRightarrow{S,T} (a,b) \in R$

Potom ale pro lib. x:

$\underline{x \in M_a} \Rightarrow (x,a) \in R \Rightarrow (x,b) \in R \Rightarrow \underline{x \in M_b}$

tedy $M_a \subseteq M_b$

analogicky $M_b \subseteq M_a$

$M_a = M_b$

FAKTOROVÁ MNOŽINA

<u>Definice</u>: Množinu všech tříd rozkladu množiny M podle ekvivalence R nazýváme <u>FAKTOROVOU MNOŽINOU M podle R</u> a značíme M/R

Zobrazení $f: M \to M/R$, které prvku $a \in M$ přiřadí $M_a \in M/R$, nazýváme <u>PŘIROZENOU (KANONICKOU) PROJEKCÍ</u> množiny M na M/R

<u>Poznámka</u>: Označme

M/E ... rozklad mn. M indukovaný ekvivalencí E

M/S ... ekvivalence indukovaná na M rozkladem S.

Potom zřejmě platí:

$$M/(M/E) = E$$

$$M/(M/S) = S$$

USPOŘÁDÁNÍ

Def.: Relace R na množině M se nazývá <u>neostré uspořádání</u> v M, jestliže je <u>reflexivní</u>, <u>antisymetrická</u> a <u>tranzitivní</u>.

Pokud je R antireflexivní, antisymetrická a tranzitivní, hovoříme o <u>ostrém uspořádání</u>.

Množina M, v níž je dáno uspořádání (ostré či neostré) R, se nazývá <u>uspořádaná množina</u> (M, R)

PŘÍKLAD: 1. $(N, \leq)$, $(N, <)$, ...

2. $(P(M), \subseteq)$, $M \neq \emptyset$

$(x, y) \in R \Leftrightarrow x \subseteq y$

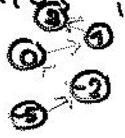
znázornění uspořádání → <u>Hasseův diagram</u>

= modifikovaný uzlový graf

1. vynecháme šipky plynoucí z T
2. vynecháme smyčky (u neostrého usp.)
3. uzel, z něhož šipka vychází, je níže než cílový

<u>PŘÍKLAD:</u> $M = \{-5, -2, 0, 1, 8\}$, $(M, \leq)$

$x \leq y$

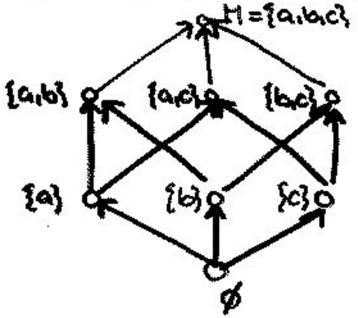


<u>PŘÍKLAD:</u> $M = \{a, b, c\}$

$$(P(M), \subseteq)$$

Relaci $\subseteq$ na množině $P(M)$ znázorněte Hasseovým diagramem

$P(M) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}, \{a,b,c\}\}$



neporovnatelné prvky

<u>Def.</u>: Uspořádání R v množině M se nazývá <u>lineární</u> (úplné) uspořádání, právě když v M neexistují neporovnatelné prvky (vzhledem k uspořádání R).

<u>PŘÍKLADY</u>: (1.) lineární (úplné) uspořádání: „$<$", „$\leq$"

(2.) částečné uspořádání: např. dělitelnost na konečné množině

EKVIVALENCE

PŘÍKLAD: Na množině $M = \{1,2,3,4,5,6\}$
je definována relace R:
$R = \{(x,y);\ 2 \mid x-y\}$
Nakreslete uzlový a kartézský
graf této relace.
Určete její vlastnosti.

USPOŘÁDÁNÍ

PŘÍKLAD: Vyšetřete vlastnosti relací
$R_1 = \{(x,y) \in Z \times Z;\ x < y\}$
$R_2 = \{(x,y) \in Z \times Z;\ x \leq y\}$