GRUPY

<u>Definice</u>: Struktura $(M, *)$ se nazývá <u>grupou</u>, právě když splňuje tyto vlastnosti:

1) $\forall x, y \in M;\ x * y \in M$

2) $\forall x, y, z \in M;\ x * (y * z) = (x * y) * z$

3) $\exists e \in M; \forall x \in M;\ x * e = e * x = x$

4) $\forall x \in M, \exists x^{-1} \in M;\ x * x^{-1} = x^{-1} * x = e$

Pokud navíc platí

5) $\forall x, y \in M;\ x * y = y * x$,

nazývá se <u>KOMUTATIVNÍ GRUPOU</u>.

<u>Další příklady grup</u>:

1. grupa zákrytových pohybů rovnostr. △
2. grupa permutací množiny M
3. Množina pohybů „vpravo vbok", „vlevo vbok", „čelem vzad", „stát" s operací skládání

PRAVIDLA PRO POČÍTÁNÍ V GRUPĚ

Věta: Nechť $(M,\cdot)$ je grupa. Potom platí:

a) v $(M,\cdot)$ lze krátit libovolným jejím prvkem;

$$\forall x,y,z \in M;\ (x\cdot y = x\cdot z \vee y\cdot x = z\cdot x) \Rightarrow y=x,$$

b) $(M,\cdot)$ je struktura s jednoznačným dělením;

$$\forall x,y \in M,\ \exists!\, z\in M,\ \exists!\, v \in M;\ x\cdot z = y \wedge v\cdot x = y,$$

c) inverzní prvek k inverznímu prvku $x\in M$ je x;

$$\forall x \in M;\ (x^{-1})^{-1} = x$$

d) inverzní prvek k „součinu" dvou prvků z M je roven „součinu" inverzních prvků v obráceném pořadí, tj:

$$\forall x,y \in M;\ (x\cdot y)^{-1} = y^{-1}\cdot x^{-1}$$

e) jsou-li $x;y$ prvky z M takové, že platí $x\cdot y = y$ nebo $y\cdot x = y$, je x neutrální prvek v $(M,\cdot)$

ÚKOL: $M=\{x\in R;\ x \neq -1\}$, kde R je množina reálných čísel

$$x * y = x + y + xy$$

1) Ukažte, že struktura $(M,*)$ je grupa.

2) Řešte rovnici $2 * x * 5 = 6$.

TĚLESO

- struktura se dvěma binárními operacemi

PŘÍKLAD: Těleso reálných čísel (s operacemi sčítání a násobení)

$(R,+,\cdot)$

Co o něm víme?

1) $(R,+,\cdot)$ → $(R,+)$ komutativní grupa
   → $(R-\{0\},\cdot)$ (komutativní) grupa

2) je $(+,\cdot)$ DISTRIBUTIVNÍ

Definice: (DISTRIBUTIVNOST)
Struktura $(M,*,\circ)$ se nazývá $(*,\circ)$-distributivní, právě když platí:

$\forall x,y,z \in M;\ (x*y)\circ z = x\circ z * y\circ z \ \wedge\ z\circ(x*y) = (z\circ x)*(z\circ y)$

a nazývá se $(\circ,*)$-distributivní, právě když

$\forall x,y,z \in M;\ (x\circ y)*z = (x*z)\circ(y*z) \wedge z*(x\circ y) = (z*x)\circ(z*y)$

PROBLÉM: Najděte strukturu, která je $(*,\circ)$ i $(\circ,*)$ distrib.

Definice: (TĚLESO) Struktura $(M,*,\circ)$ s alespoň dvěma prvky se nazývá těleso, právě když je $(*,\circ)$-distributivní, když struktura $(M,*)$ je komutativní grupa a když struktura $(M\setminus\{0\},\circ)$, kde 0 je neutrální prvek grupy $(M,*)$, je grupa. Je-li navíc $(M\setminus\{0\},\circ)$ komutativní, nazýváme $(M,*,\circ)$ komutativním tělesem. Neutrální prvek 0 grupy $(M,*)$ se nazývá nulový prvek tělesa M a neutrální prvek 1 grupy $(M\setminus\{0\},\circ)$ se nazývá jednotkový prvek tělesa M.

MULTIPLIKATIVNÍ A ADITIVNÍ ZÁPIS ALG. S.

OBECNÝ	MULTIPLIKATIVNÍ	ADITIVNÍ
$(M, *)$	$(M, \cdot)$	$(M, +)$
neutrální p. e	jednotkový p. 1	nulový p. 0
inverzní p. x^{-1}	převrácený (inverzní) x^{-1}	opačný p. $-x$

TĚLESO $(M, *, \circ)$ → $(M, *)$ ADITIVNÍ GRUPA TĚLESA
→ $(M, \circ)$ MULTIPLIKATIVNÍ GRUPA TĚLESA

PŘÍKLADY:

$(\mathbb{Q}, +, \cdot)$, $(\mathbb{R}, +, \cdot)$, $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ ... KOMUTATIVNÍ TĚLESA

$(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ ... NENÍ TĚLESO (PROČ?)

PROBLÉM

Je struktura $(M, \oplus, \odot)$ tělesem?

$M = \{1, 2, 3, \dots, 12\}$

$\oplus$ ... sčítání na ciferníku

$\odot$ ... násobení na ciferníku

VEKTOROVÝ PROSTOR

PŘÍKLAD: Množina všech vektorů v rovině (prostoru) jak je známe z elementární geometrie

DEFINICE: Nechť T je komutativní těleso. Množinu V nazveme vektorovým prostorem nad tělesem T právě když jsou na V definovány dvě operace:

(i) sčítání: libovolné dvojici $\vec{u}, \vec{v} \in V$ je jednoznačně přiřazen prvek $\vec{u} + \vec{v} \in V$,

(ii) násobení prvkem z T (skalárem): výsledkem násobení vektoru $\vec{u} \in V$ skalárem $a \in T$ je vektor $a \cdot \vec{u} \in V$,

které splňují následující vlastnosti:

$\forall \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V,\ a, b \in T;$

a) komutativnost sčítání: $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$,

b) asociativnost sčítání: $\vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w}$,

c) neutrální prvek sčítání: $\exists \vec{o} \in V;\ \vec{u} + \vec{o} = \vec{o} + \vec{u} = \vec{u}$

d) inverzní prvky sčítání: $\forall \vec{u} \in V, \exists (-\vec{u}) \in V;$
$\vec{u} + (-\vec{u}) = (-\vec{u}) + \vec{u} = \vec{o}$,

$(V,+)$ kom. grupa

e) distributivnost: $(a+b)\vec{u} = a\vec{u} + b\vec{u}$,
$a(\vec{u} + \vec{v}) = a\vec{u} + a\vec{v}$,

f) asociativnost skalárního násobení:
$a(b\vec{u}) = (ab)\vec{u}$,

g) jednotkový prvek skalárního násobení
$1 \cdot \vec{u} = \vec{u}$.

Poznámka:

1. Prvky množiny V nazýváme **vektory**.
2. **Vektor $\vec{o}$**, tj. nulový prvek grupy $(V,+)$, nazýváme **nulový vektor**.
3. **Vektor $-\vec{u}$** nazýváme **opačný vektor k vektoru $\vec{u}$**.

$$\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{o}$$

4. Prvky **tělesa T** se nazývají **skaláry**.

Důsledky definice v.p.:

h) $0 \cdot \vec{v} = \vec{o}$

i) $(-1) \cdot \vec{v} = -\vec{v}$

j) $c\vec{o} = \vec{o}$

k) $c\vec{v} = \vec{o} \Rightarrow c = 0 \vee \vec{v} = \vec{o}$

Dk:

ad h) $\vec{z} = 0 \cdot \vec{v}$; $\vec{z} + \vec{z} = (0+0) \cdot \vec{v} = \vec{z} \Rightarrow \vec{z} = \vec{o}$ tj. $0 \cdot \vec{v} = \vec{o}$

ad i) $0 \cdot \vec{v} = (1-1)\vec{v} = \underline{1 \cdot \vec{v} + (-1)\vec{v} = \vec{o}} \Rightarrow (-1)\vec{v} = -\vec{v}$

ad j) $c \cdot \vec{o} = c(\vec{u} + (-\vec{u})) = c\vec{u} + c(-\vec{u}) = c\vec{u} - c\vec{u} = \vec{o}$

$\quad \rightarrow c \cdot (-1) \cdot \vec{u} = -c\vec{u}$

ad k) $c\vec{v} = \vec{o} \Rightarrow c \cdot \vec{v} + \vec{v} = \vec{v}$

$(c+1)\vec{v} = 1\vec{v} \Rightarrow c = 0$

$\Rightarrow c\vec{v} + (-c\vec{v}) = c(\vec{v} + (-\vec{v})) = c\vec{v} = \vec{o}$

$c\,\vec{o} = c\vec{v} \Rightarrow \vec{v} = \vec{o}$

PŘÍKLADY VEKTOROVÝCH PROSTORŮ:

1. Vektory v rovině a v prostoru z elementární geometrie

2. Samo těleso T spolu s operacemi $+, \cdot$ definovanými na T tvoří vektorový prostor nad tělesem T

3. Aritmetický vektorový prostor R^n nad $\mathbb{R}$ tj. množina všech uspořádaných n-tic reálných čísel

$$(a_1, a_2, \dots, a_n) + (b_1, b_2, \dots, b_n) = (a_1 + b_1, \dots, a_n + b_n)$$
$$k(a_1, a_2, \dots, a_n) = (ka_1, ka_2, \dots, ka_n)$$

4. Prostor F_X všech reálných (komplexních) funkcí na nějaké množině X. (nad tělesem $\mathbb{R}$)

5. Množina $C_{\langle a,b\rangle}$ všech spojitých reálných funkcí na intervalu $\langle a,b\rangle$. (nad tělesem $\mathbb{R}$)

6. Množina P_n všech polynomů stupně nejvýše n s koeficienty z R tvoří spolu s operacemi sčítání polynomů a násobení polynomu reálným číslem opět vektorový prostor nad tělesem $\mathbb{R}$

Poznámka: Vektorový prostor V nad tělesem T někdy značíme takto:

$$(V, +, T)$$