

Odborná matematika III

Roman Hašek

2024

Contents

1	Axiomatická výstavba geometrie	7
1.1	Eukleides	7
1.2	Hilbertova soustava axiomů eukleidovské geometrie	8
2	Eukleidovská geometrie	21
2.1	Eukleidovské konstrukce	22
2.2	Mascheroniovy konstrukce	23
3	Neeukleidovské geometrie	25
3.1	Lobačevského geometrie	26
3.2	Riemannova geometrie	31
4	Určení polohy bodu	35
4.1	Afinní a kartézské souřadnice	35
4.2	Polární a sférické souřadnice	37
4.3	Dělicí poměr	39
4.4	Barycentrické souřadnice	42
5	Projektivní geometrie	49
5.1	Projektivní rozšíření $\bar{E}_n$ prostoru E_n	50
5.2	Projektivní rozšíření $\bar{E}_2$ roviny E_2	51
5.3	Homogenní souřadnice v $\bar{E}_2$	52
5.4	Rovnice přímky v $\bar{E}_2$	54
5.5	Rovnice kuželosečky v $\bar{E}_2$	55
5.6	Projektivní prostor dimenze n	55
5.7	Cvičení: Projektivní rozšíření prostoru	56
6	Vybrané vlastnosti a věty projektivní geometrie	57
6.1	Desarguesova věta	57
6.2	Dvojpoměr jako afinní invariant	58
6.2.1	Harmonická čtveřice	61
6.3	Pappova věta a její důsledky	63
6.3.1	Dvojpoměr čtyř přímek	67
6.3.2	Dvojpoměr čtyř nevlastních bodů	68
6.3.3	Dvojpoměr čtyř rovin	68
6.4	Princip duality v projektivní rovině	68
6.4.1	Ukázka dvojice navzájem duálních vět:	69
6.4.2	Princip duality v praxi	70
6.5	Cvičení: Pappova věta a princip duality	71

7	Afinní zobrazení	73
7.1	Rovnice afinního zobrazení z A_n do A_m	76
7.2	Rovnice homomorfismu asociovaného s afinním zobrazením	76
7.3	Věta o určenosti afinního zobrazení	77
7.4	Skládání afinních zobrazení	80
7.5	Afinní grupa v A_n	80
7.6	Souvislost mezi skládáním afinních zobrazení a násobením matic	81
7.7	Cvičení: Afinní zobrazení	82
8	Afinita	83
8.1	Afinita v rovině	84
8.2	Rovnice afinity v rovině	84
8.3	Věta o určenosti afinity v rovině	85
8.4	Modul afinity	86
8.5	Afinita přímá a nepřímá, ekviafinita	87
8.6	Cvičení: Afinita	89
9	Klasifikace afinit	91
9.1	Samodružné body	91
9.2	Samodružné směry	93
9.2.1	Charakteristická rovnice, vlastní číslo, vlastní vektor	94
9.3	Homotetie, grupa homotetií	101
10	Shodná zobrazení v rovině	103
10.1	Rovnice shodnosti v rovině	105
10.2	Osová souměrnost	107
10.3	Otočení	110
10.4	Středová souměrnost	112
10.5	Posunutí	113
10.6	Posunutý zrcadlení	114
10.7	Cvičení: Shodnosti v rovině	117
11	Grupa shodností eukleidovského prostoru	121
11.1	Skládání shodných zobrazení	121
11.2	Grupa shodností v rovině	121
11.3	Klasifikace shodností roviny	122
11.4	Klasifikace shodností roviny	127
11.5	Cvičení: Shodnosti v rovině	131
11.6	Klasifikace shodností prostoru E_3	132
11.7	Cvičení: Shodnosti prostoru E_3	135
11.7.1	Shodná zobrazení v prostoru E_n	135
12	Podobná zobrazení v rovině	137
12.1	Grupa podobností eukleidovského prostoru	137
12.1.1	Podobné zobrazení	137
12.2	Podobnosti eukleidovské roviny	139
12.3	Cvičení: Podobnosti	142
13	Stejnolehlost	145
13.1	Analytické vyjádření stejnohlosti	146
13.2	Skládání stejnohlostí	146
13.3	Stejnolehlost kružnic	147
13.3.1	Mongeova věta	150
13.4	Cvičení: Stejnolehlost	152

14 Mocnost bodu ke kružnici	153
14.1 Definice mocnosti bodu ke kružnici	153
14.2 Chordála a potenční střed	154
14.3 Cvičení: Mocnost bodu ke kružnici	156
15 Inverze	157
15.1 Sférická inverze	158
15.2 Stereografická projekce	159
15.3 Vybrané vlastnosti sférické inverze	160
16 Kruhová inverze	163
16.1 Vybrané vlastnosti kruhové inverze	164
16.2 Analytické vyjádření kruhové inverze	167
16.3 Cvičení: Kruhová inverze	169
A Středové promítání v $\bar{E}_3$	171
A.1 Zobrazení bodu	171
A.2 Zobrazení přímky	171
A.3 Zobrazení úsečky	172
A.4 Zobrazení roviny	173
B Středová kolineace	175
B.1 Původ středové kolineace	175
B.2 Kolineace kružnice a kuželosečky	179
C Osová afinita v rovině	181
C.0.1 Základní afinity	181
C.0.2 Cvičení – Osová afinita	184
D Vybrané věty projektivní geometrie	185
D.1 Pappova věta o šestiúhelníku	185
D.1.1 Šestiúhelník	186
D.2 Pascalova věta	189
D.3 Brianchonova věta	190
D.4 Desarguesova věta	192
E Afinní zobrazení z A_n do A_m	193
E.1 Rovnice afinního zobrazení z A_n do A_m	193
E.2 Rovnice homomorfismu asociovaného s afinním zobrazením	194
E.3 Věta o určenosti afinního zobrazení	195
E.4 Rovnice afinity v rovině	197
E.5 Věta o určenosti afinity v rovině	199
E.5.1 Afinita prostoru A_n	201
E.5.2 Rovnice afinity prostoru A_n	202
E.6 Skládání afinních zobrazení	202
E.6.1 Afinní grupa v A_n	202
E.6.2 Souvislost mezi skládáním afinních zobrazení a násobením matic	203

Kapitola 1

Axiomatická výstavba geometrie

Důkladnost matematiky spočívá na definicích, axiómech, důkazech.

Immanuel Kant

axiom – základní věta, poučka, zásada, která se přijímá a bez důkazu považuje za pravdivou: log., mat. tvrzení deduktivní teorie přijaté bez důkazu;

postulát – princip, požadavek nebo tvrzení určité vědecké teorie přijaté bez důkazů a tvořící její východisko: log. axiom;

Akademický slovník cizích slov, Academia, Praha, 2001.

1.1 Eukleides

Základy axiomatické výstavby geometrie i celé matematiky položil řecký matematik *Eukleides* (kolem roku 300 př. n. l.) ve svém úctyhodném díle *Základy* (viz [5] *Eukleidovy základy (Elementa)*, překlad F. Servít, 1907, nebo [4] *Základy. Knihy I–IV, V–VI, VII–IX, X, XI–XI.*, koment. Petrem Vopěnkou, 2008–2012.)

Eukleides pojal výklad geometrie v Základech axiomaticky. Celou geometrii odvodil ze 14 axiomů¹, z nichž 5 nazval postuláty² (postuláty můžeme chápat jako formulace základních úloh, které lze v rovině konstruovat; Servít je nazýval *úkoly prvotné*), [13], [17].

¹*axiom* – základní věta, poučka, zásada, která se přijímá a bez důkazu považuje za pravdivou: log., mat. tvrzení deduktivní teorie přijaté bez důkazu; *Akademický slovník cizích slov*, Academia, Praha, 2001

²*postulát* – princip, požadavek nebo tvrzení určité vědecké teorie přijaté bez důkazů a tvořící její východisko: log. axiom; *Akademický slovník cizích slov*, Academia, Praha, 2001

Eukleidovy postuláty:

1. Dva dané (různé) body spojit úsečkou.
2. Danou úsečku na jedné i druhé straně libovolně prodloužit.
3. Vytvořit kružnici s daným středem a procházející daným bodem (různým od středu).
4. Všechny pravé úhly jsou shodné.
5. Dvě přímky v rovině, které protínají jinou přímku této roviny a tvoří s ní po jedné straně vnitřní úhly, jejichž součet je menší dvou pravých, se vždy protínají a to po té straně, kde je součet menší.

Poznámka. Konstrukce uskutečňované podle prvních tří Eukleidových postulátů jsou známé jako *eukleidovské konstrukce*, též konstrukce kružítkem a pravítkem (bez měřítka) (anglicky *Compass and straightedge constructions*). Ne každou geometrickou úlohu lze řešit pomocí těchto konstrukcí, viz např. *kvadratura kruhu*, *zdvojení krychle* nebo *trisekce úhlu*. Nemožnost vyřešit tyto tři úlohy pouze užitím kružítko a pravítka byla dokázána až v 19. století, po vytvoření náležitého matematického aparátu. Nemožnost eukleidovské konstrukce *zdvojení krychle* a *trisekce úhlu* dokázal *Pierre Wantzel* v roce 1837. Nemožnost eukleidovské konstrukce *kvadratury kruhu* pak vyplynula z důkazu transcendentnosti čísla π , který podal *Ferdinand von Lindemann* v roce 1882.

Některé překlady Základů uvádějí jenom 4 postuláty. Postulát o rovnoběžkách pak řadí mezi axiomy, jako XI. nebo XII. Soustava axiomů eukleidovské geometrie tak není jednoznačně určena. Těchto soustav může být více a mohou se lišit podobou axiomů i jejich počtem. Co je v jedné soustavě axiomem, může být v jiné soustavě větou deduktivně odvozenou. Během historie interpretace Eukleidových Základů tak vznikla například celá řada vět ekvivalentních s postulátem o rovnoběžkách, viz str. 20.

1.2 Hilbertova soustava axiomů eukleidovské geometrie

Soustava axiomů eukleidovské geometrie představená v Základech není vytvořena příliš důsledně a trpí některými logickými nedostatky. Nápravu učinil až David Hilbert (1862–1943) na přelomu 19. a 20. století. Svou představu, že v logicky dokonale vystavěném systému axiomů v podstatě

ztrácí smysl původní význam jednotlivých použitých pojmů, vyjádřil známým výrokem:

Vždy musíme být schopni místo body, přímky a roviny říkat stoly, židle a pultitry.

Tím se otevírá cesta k různým *modelům abstraktní geometrie*. Viz například *Poincarého model* nebo *Beltramiho–Kleinův model*.

Požadavky na soustavu axiomů:

1. *Bezespornost* – z daných axiomů nelze odvodit zároveň V i $\neg V$.
2. *Nezávislost* – žádný z axiomů soustavy by neměl být logickým důsledkem ostatních (soustava by tedy neměla obsahovat žádný zbytečný axiom).
3. *Úplnost* – všechny modely odvozené ze soustavy axiomů jsou vzájemně izomorfní, tj. platí v nich stejné věty.

Axiomy Hilbertovy soustavy lze rozdělit do následujících pěti skupin (v závorce je vždy uveden symbol, nebo více symbolů, pro příslušnou skupinu axiomů):

- axiomy incidence (**I**),
- axiomy uspořádání (**U**),
- axiomy shodnosti (**S**),
- axiomy spojitosti (**A, C, D**),
- axiomy rovnoběžnosti (**R**).

Pro přiblížení významu těchto skupin axiomů si u každé z nich uvedeme příslušné axiomy, vybrané vlastnosti odpovídajících geometrií, které se pomocí axiomů dají dokázat, a také vybrané modely těchto geometrií.

I. Axiomy incidence I

Axiomy této skupiny se týkají vztahu *náležení (incidence) bodu, přímky a roviny*.

- I1:** Dva různé body mají společnou jednu přímku.
I2: Přímka obsahuje aspoň dva různé body.
I3: Existuje aspoň jedna trojice různých bodů, které nepatří téže přímce.
I4: Jestliže tři body nepatří jedné přímce, potom patří jediné rovině.
I5: Jestliže dva různé body přímky p leží v rovině ρ , potom všechny body přímky p leží v ρ .
I6: Jestliže průnik dvou rovin není prázdný, obsahuje aspoň dva navzájem různé body.
I7: Existuje aspoň jedna čtveřice bodů, které neleží v téže rovině.
I8: Rovina obsahuje aspoň jeden bod.

Definice 1.1. Tři body, které leží na téže přímce, nazýváme **kolineární**.

Příklad 1.1. Užitím axiomů incidence **I** dokažte následující věty 1.1 a 1.2.

Věta 1.1. Průnikem dvou různých rovin, které mají společný aspoň jeden bod, je přímka.

Proof. $I6 \longrightarrow I1 \longrightarrow I5$ □

Věta 1.2. Tři nekolineární body jsou navzájem různé.

Proof. $A = B = C$ nebo $A = B \neq C$ vede ke sporu □

MODELÝ GEOMETRIE [I]

Tj. modely geometrie založené **pouze** na axiomech incidence.

* M1: Minimální model

- čtyři body,
- šest přímek (protože existuje $\binom{4}{2} = 6$ neuspořádaných dvojic ze čtyř prvků),
- čtyři roviny (protože existuje $\binom{4}{3} = 4$ neuspořádaných trojic ze čtyř prvků).

* **M2: Poincarého model**

Je tvořen **vnitřními** body poloprostoru omezeného rovinou ω . Rozlišujeme zde přímky a roviny prvního a druhého druhu (viz Obr. 1.1). Přímka prvního druhu je tvořena vnitřními body polopřímky kolmé na rovinu ω , přímka druhého druhu je tvořena vnitřními body polokružnice kolmé k rovině ω a se středem v rovině ω . Rovina prvního druhu je tvořena vnitřními body poloroviny kolmé na ω a rovina druhého druhu potom odpovídá vnitřním bodům polokoule se středem v ω . Incidence je eukleidovská.

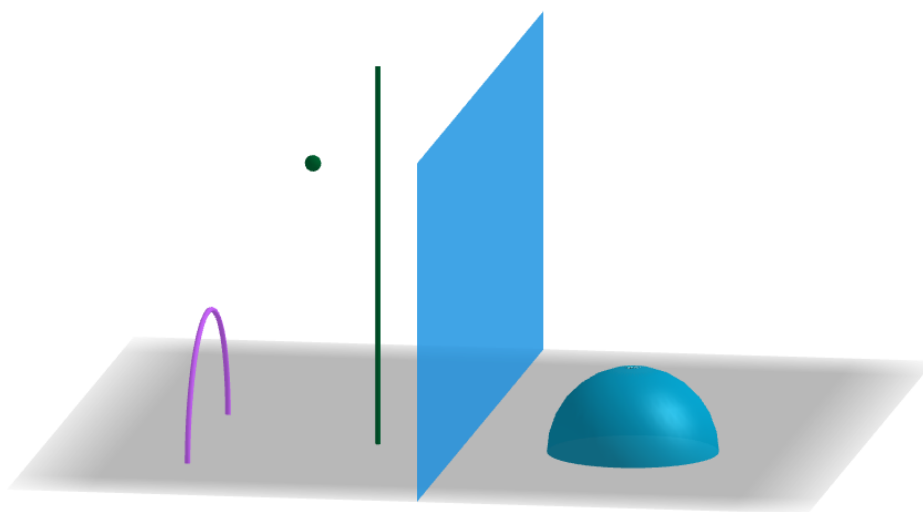


Figure 1.1: Poincarého model

* **M3: Beltramiho–Kleinův model**

Tvořen vnitřními body koule. Přímku reprezentují vnitřní body tětivy koule a rovinu vnitřní body jejího *rovinného* řezu (viz Obr. 1.2). Incidence je eukleidovská.

Figure 1.2: Beltramiho-Kleinův model

Oba uvedené modely **M2** a **M3** mají i své rovinné varianty, viz Obr. 1.3, 1.4. Rovinný případ *Beltramiho–Kleinova modelu* se často uvádí jenom pod názvem *Kleinův model*, případně *Kleinův diskový model*.

Poznámka. Modely **M2**, **M3** nejsou modely eukleidovské geometrie, nesplňují axiom rovnoběžnosti (viz Obr. 1.3, 1.4). Vidíme, že v obou případech

Figure 1.3: M2: Poincarého rovinný model (half-plane model)

Figure 1.4: M3: Beltramiho-Kleinův rovinný model

existuje více než jedna rovnoběžka s p , tj. přímka, která prochází bodem A a nemá s danou přímkou p žádný společný bod. Přímký a, b jsou hraniční přímky.

*** M4: Aritmetický celočíselný model planimetrie**

- *bod* = uspořádaná dvojice celých čísel $[x, y] \in \mathbb{Z}$,
- *přímka* = body splňující rovnici $ax + by + c = 0$, $a, b, c \in \mathbb{Z}$.

Poznámka. Stejně můžeme definovat model racionální (tj. $[x, y] \in \mathbb{Q}$, $a, b, c \in \mathbb{Q}$) či reálný (tj. $[x, y] \in \mathbb{R}$, $a, b, c \in \mathbb{R}$).

II. Axiomy uspořádání U

Tyto axiomy se týkají vlastnosti *bod leží mezi jinými dvěma*.

U1: Jestliže bod B leží mezi body A, C , jsou A, B, C tři různé body na přímce a platí též, že B leží mezi body C, A .

U2: Jestliže A, B jsou dva navzájem různé body, potom existuje na přímce AB aspoň jeden bod C takový, že bod B leží mezi body A, C .

U3: Ze tří různých bodů A, B, C ležících na té samé přímce leží nejvýše jeden mezi ostatními dvěma.

U4: (Paschův axiom) Jsou-li A, B, C tři nekolineární body a přímka p , která těmito body neprochází, obsahuje jistý bod mezi body A, C , potom přímka p obsahuje bod mezi A, B nebo mezi B, C .

Příklad 1.2. Užitím axiomů **I**, **U** dokažte následující věty.

Věta 1.3. Mezi dvěma různými body leží aspoň jeden bod.

Proof. $I3 \longrightarrow U2 \longrightarrow U2 \longrightarrow U4$

□

Věta 1.4. Na každé přímce existuje nekonečně mnoho bodů.

Geometrie [IU] se nazývá též **geometrie polohy**

Modely s konečným počtem prvků nemohou splňovat axiomy uspořádání. Proč?

(*Řešení:* Podle *I3*, *I1* existuje v takové geometrii vždy aspoň jedna přímka, tj. podle *U2* nekonečně mnoho bodů)

MODELÝ GEOMETRIE [IU]:

* **Poincarého model**

Uspořádání platí ve smyslu eukleidovském.

* **Beltramiho - Kleinův model**

Uspořádání platí ve smyslu eukleidovském.

* **Aritmetický racionální model planimetrie**

OTÁZKA: *Proč již nestačí aritmetický celočíselný model?*

III. Axiomy shodnosti S

Tyto axiomy se týkají metrických vlastností. Formulují základní vlastnosti shodnosti úseček.

S1: Je-li $AB = CD$, potom $A \neq B, C \neq D$. Pro každé dva různé body A, B platí $AB = BA$. (Shodnost se týká pouze dvojic různých bodů.)

S2: Nechť AB je úsečka, CD polopřímka. Potom existuje jediný bod E polopřímky CD , pro který platí $AB = CE$. (Nanášení úsečky na polopřímku.)

S3: Jestliže $AB = CD$ a $CD = EF$, potom $AB = EF$. (Tranzitivnost shodnosti.)

S4: Jestliže bod C leží mezi body A, B , bod C' mezi body A', B' a jestliže platí $AC = A'C', BC = B'C'$, potom platí $AB = A'B'$. (Grafický součet dvou úseček.)

S5: Nechť jsou $ABC, A'B'K$ dvě trojice nekolineárních bodů a nechť $AB = A'B'$. Potom existuje jediný bod C' poloroviny $A'B'K$, pro který platí $AC = A'C', BC = B'C'$. (Přenesení trojúhelníka k dané úsečce do dané poloroviny.)

S6: Nechť jsou $ABC, A'B'C'$ dvě trojice nekolineárních bodů, pro které platí $AB = A'B', BC = B'C', CA = C'A'$. Nechť dále leží bod P mezi body A, B a bod P' mezi body A', B' tak, že $AP = A'P'$. Potom $CP = C'P'$.

Příklad 1.3. Užitím axiomů **S** dokažte, že shodnost se týká neuspořádaných dvojic bodů.

Proof. $S1 : AB = CD, CD = DC, S3 : AB = DC$

□

IV. Axiomy pohybu S^*

Axiomy založené na *axiomatickém* pojmu *shodné zobrazení* (přemístění).

S*1: *Leží-li bod C mezi body A, B a jsou-li A', B', C' obrazy bodu v přemístění, leží bod C' mezi body A', B' .*

S*2: *Jestliže je polopřímka v přemístění samodružná, je každý její bod v tomto přemístění samodružný.*

S*3: *Nechť jsou $ABC, A'KL$ dvě trojice nekolineárních bodů. Existuje jediné přemístění v rovině, které převádí bod A do bodu A' , polopřímku AB do polopřímky $A'K'$ a polorovinu ABC do poloroviny $A'KL$.*

S*4: *Jestliže jsou A, B dva různé body, potom existuje aspoň jedno přemístění, které převádí bod A do bodu B a bod B do bodu A .*

S*5: *Jestliže je $\angle BAC$ dutý úhel, potom existuje aspoň jedno přemístění, které převádí polopřímku AB do polopřímky AC a polopřímku AC do polopřímky AB .*

S*6: *Složením dvou přemístění vznikne přemístění.*

S*7: *Identita je přemístění.*

S*8: *Inverzní zobrazení k přemístění je přemístění.*

Z axiomů S^*6, S^*7, S^*8 plyne, že všechna přemístění tvoří grupu.

Věta 1.5. Abstraktní geometrie $[IUS], [IUS^*]$ jsou totožné, tj. skupiny axiomu S, S^* jsou ekvivalentní.

MODELÝ GEOMETRIÍ $[IUS], [IUS^*]$:

- * **Model planimetrie** - zobrazení inverzní ke stereografické projekci.
- * **Aritmetický model reálný** OTÁZKA: *Proč již nestačí aritmetický racionální model?*
- * **Beltramiho–Kleinův model**

Zavedení neeukleidovské vzdálenosti v Beltramiho–Kleinově modelu:

Vzdálenost bodu B od bodu A (viz Obr. 3.5) definujeme výrazem $|\ln(UVBA)|$, kde U, V jsou krajní body tětiny, na které leží body A, B , a $(UVBA)$ je dvojpoměr bodů U, V, B, A . Je zřejmé, že pokud se bod B blíží hranici kruhu, jeho vzdálenost od A se blíží nekonečnu. Použitím logaritmu dvojpoměru místo pouhého dvojpoměru je zajištěna možnost

sčítání vzdáleností. Uvažujme body A, C, B dle Obr. 3.5. Potom pro příslušné dvojpoměry platí $(UVCA) \cdot (UVBC) = (UVBA)$, zatímco pro jejich logaritmy platí

$$\ln(UVCA) + \ln(UVBC) = \ln(UVBA),$$

což koresponduje s naší představou o možnosti sčítání vzdáleností. Absolutní hodnota zase zaručí nezávislost vzdálenosti dvou bodů na jejich pořadí, protože, když $(UVAB) = (UVBA)^{-1} = (VUAB)^{-1} = (VUBA)$, potom

$$|\ln(UVAB)| = |\ln(UVBA)| = |\ln(VUAB)| = |\ln(VUBA)|.$$

Pro takto definovanou vzdálenost bodů, je potom délka úsečky UV vlastně nekonečná. Dobře tak hraje roli přímky.

Figure 1.5: Vzdálenost bodů v Kleinově (Beltramiho–Kleinově) modelu

V. Axiomy spojitosti A, C, D

Souvisejí s hledáním odpovědí na otázky: *Lze změřit každou úsečku? Existuje ke každému číslu odpovídající úsečka?*

Archimédův axiom

A: Jsou dány úsečky AB, CD . Na polopřímku AB postupně nanášíme úsečku CD a dostaneme body $P_1, P_2, \dots, P_n, P_{n+1}$. Potom existuje takové $n \in \mathbb{N}$, že bod P_{n+1} neleží uvnitř AB .

Poznámka. Archimédův axiom formuluje základní princip měření délek. Má proto své místo ve výuce matematiky na základní škole (dokonce již na prvním stupni). Tam ale použijeme spíše fyzické nebo grafické znázornění, které se opírá o tuto jeho strážlivější formulaci: *Pro libovolná dvě kladná čísla a, b existuje přirozené číslo n takové, že $na > b$.*

Cantorův axiom (axiom úplnosti)

C: Průnik posloupnosti úseček do sebe zařazených je neprázdný.

Věta 1.6. Jestliže průnik posloupnosti úseček do sebe zařazených neobsahuje žádnou úsečku, je tento průnik množinou s jedním bodem.

Proof. Dokážeme sporem □

Věta 1.7. V geometrii [IUSAC] je každé kladné číslo velikostí nějaké úsečky.

Axiomy A, C lze nahradit jediným axiomem D:

Dedekindův axiom

D: Každý omezený konvexní útvar na přímce, který obsahuje aspoň dva různé body, je úsečka (případně s vynecháním jednoho nebo obou krajních bodů).

ABSOLUTNÍ GEOMETRIE [IUSAC], [IUSD]:

Jedná se o společný základ *eukleidovské* i *neeuukleidovské* geometrie.

VI. Axiom rovnoběžnosti R

Figure 1.6: Rovnoběžky v Kleinově modelu

Rovnoběžkami budeme rozumět dvě přímky v téže rovině, které nemají společný bod. Jak bylo uvedeno na str. 12, existují geometrie, v nichž bodem neležícím na přímce prochází více rovnoběžek s touto přímkou. Potom můžeme tyto rovnoběžky rozlišit na tzv. *souběžky* a *rozběžky*. Souběžkami nazýváme *mezí* přímky ze svazku rovnoběžek procházejících bodem *A*. Například v Kleinově modelu na Obr. 1.6 jsou *souběžkami* přímky *a* a *b*, ostatní rovnoběžky jsou *rozběžkami* (tj. vyplňují vrcholové úhly, jejichž rameny jsou souběžky).

Některé věty absolutní geometrie:

Věta 1.8 (Legendrova). Jsou-li čísla α, β, γ velikosti vnitřních úhlů trojúhelníku ABC , platí $\alpha + \beta + \gamma \leq \pi$.

Věta 1.9. Jestliže je p libovolná přímka, A bod, který na ní neleží, potom bodem A prochází aspoň jedna rovnoběžka s přímkou p .

Axiom rovnoběžnosti

R: *Nechť p je libovolná přímka, A libovolný bod, který na ní neleží. Potom bodem A prochází nejvýše jedna rovnoběžka s přímkou p .*

Tento axiom je ekvivalentní s Eukleidovým pátým postulátem uvedeným na str. 21. Ten se jeví tak samozřejmý, že byl dlouho považován za pouhý důsledek předchozích čtyř postulátů. Snahy o jeho odvození z těchto postulátů však vedly vždy jenom k jeho novým formulacím (některé viz níže). Důkazem toho, že axiom rovnoběžnosti je skutečným axiomem a nikoliv důsledkem jiných axiomů, bylo až objevení existence geometrie [IUSDnonR] (Lobačevskij), která se ukázala jako logicky bezesporná. R a zároveň nonR nemůže být totiž důsledkem axiomů IUSD, jsou tedy na nich nezávislé.

[IUSDR] = eukleidovská geometrie

[IUSDnonR] = hyperbolická (Lobačevského) geometrie

Některé věty ekvivalentní s axiomem rovnoběžnosti R

1. Existuje aspoň jeden eukleidovský trojúhelník.
2. Existuje dutý úhel takový, že každý jeho vnitřní bod náleží úsečce, jejíž krajní body leží na ramenech tohoto úhlu.
3. Pythagorova věta.
4. Každé dvě kolmice ke dvěma různoběžkám jsou různoběžné.
5. Součet vnitřních úhlů ve čtyřúhelníku je 2π .
6. Každému trojúhelníku lze opsat kružnici.
7. Eukleidův pátý postulát (viz str. 21).

Poznámka. Jak bylo uvedeno výše, objevení ekvivalence uvedených vět s axiomem R je výsledkem snah o odvození R z ostatních axiomů. Více o historii těchto pokusů najde zájemce například v [13] a [17].

Kapitola 2

Eukleidovská geometrie

Eukleidovskou geometrií rozumíme geometrickou teorii roviny a trojrozměrných těles založenou na soustavě objektů a axiomů formulovaných *Eukleidem* (kolem roku 300 př. n. l.) spolu s dalšími poznatky považovanými za zřejmé na základě zkušenosti. Jak už bylo uvedeno na str. 7, určujícím dílem pro eukleidovskou geometrii jsou Eukleidovy *Základy* o 13 knihách [5, 4].

Eukleides celou geometrii odvodil ze 14 *axiomů*, z nichž 5 nazval *postuláty* (tj. základní úlohy, dle Servíta *úkoly prvotné*), [13, 17].

Eukleidovy postuláty (dle [5, 4]):

1. Dva dané (různé) body spojit úsečkou.
2. Danou úsečku na jedné i druhé straně libovolně prodloužit.
3. Vytvořit kružnici s daným středem a procházející daným bodem (různým od středu).
4. Všechny pravé úhly jsou shodné.
5. Dvě přímky v rovině, které protínají jinou přímku této roviny a tvoří s ní po jedné straně vnitřní úhly, jejichž součet je menší dvou pravých, se vždy protínají a to po té straně, kde je součet menší.

Eukleidovská geometrie je geometrií roviny (*planimetrie*) a trojrozměrného prostoru (*stereometrie*) jak ji známe ze základní a střední školy. Je to nejstarší disciplína matematiky, je stará přes 2000 let. Po většinu své existence, konkrétně do 2. poloviny 19. století, se jednalo o jedinou *geometrii*, bez přívlastku *eukleidovská*. Ten začal být používán až pro odlišení od *neeukleidovských* geometrií.

Úplná soustava axiomů eukleidovské geometrie byla zformulována až na konci 19. století německým matematikem *Davidem Hilbertem*, viz kap. 1.2, [IUSDR].

Moderní verzi eukleidovské geometrie je teorie *Eukleidovských vícerozměrných prostorů*.

2.1 Eukleidovské konstrukce

Konstrukce uskutečňované podle prvních tří Eukleidových postulátů jsou známé jako *eukleidovské konstrukce*, též konstrukce kružítkem a pravítkem (bez měřítka) (anglicky *Compass and straightedge constructions*).

Ne každou geometrickou úlohu lze řešit pomocí těchto konstrukcí. Uveďme si tři nejznámější klasické problémy, které nelze řešit eukleidovsky.

Kvadratura kruhu

Nalezení strany a čtverce, jehož obsah bude stejný jako obsah daného kruhu o poloměru r . Uvažujme poloměr daného kruhu $r = 1$. Potom pro hledané a platí

$$a = \sqrt{\pi}.$$

Nemožnost eukleidovské konstrukce úsečky této délky, tj. řešení *kvadratury kruhu*, vyplynula až z důkazu transcendentnosti čísla π , který podal *Ferdinand von Lindemann* v roce 1882.

ÚKOL: Jednodušší analogií kvadratury kruhu je kvadratura obdélníku, tj. nalezení strany čtverce, jehož obsah je shodný s obsahem daného obdélníku. Řešte!

Zdvojení krychle

Nalezení délky x hrany krychle, jejíž objem je dvakrát větší než objem dané krychle s hranou a . Uvažujme $a = 1$. Potom

$$x = \sqrt[3]{2}.$$

Posloupností nemalého počtu kroků lze dokázat (sporem), že nelze eukleidovsky sestavit úsečku délky $\sqrt[3]{2}$.

Problém zdvojení krychle je často interpretován jako *Dělský problém*, týkající se otázky zdvojnásobení objemu krychlového oltáře.

Trisekce úhlu

Rozdělení daného úhlu na tři stejně velké úhly. Označíme-li si uvažovaný úhel θ , chceme dokázat nemožnost eukleidovské konstrukce úhlu $\frac{\theta}{3}$. Pro algebraickou reprezentaci problému použijeme vyjádření $\cos \theta$ ve tvaru

$$\cos \theta = 4 \cos^3 \frac{\theta}{3} - 3 \cos \frac{\theta}{3}.$$

Potom pro $\cos \theta = g$ zkoumáme řešitelnost kubického polynomu

$$4z^3 - 3z - g = 0.$$

Z poznatků o řešitelnosti kubických polynomů přitom vyplývá, že otázka eukleidovské konstruovatelnosti jejich řešení je ekvivalentní s existencí jejich racionálních kořenů. Pokud kubický polynom s racionálními koeficienty nemá racionální kořeny, žádný z jeho kořenů není eukleidovsky sestrojitelný. Protože se jedná o obecnou vlastnost eukleidovské konstruovatelnosti třetiny úhlu, která by musela platit pro všechny úhly bez výjimky, stačí najít jediný konkrétní úhel θ , jehož třetinu prokazatelně nejde sestrojit. Tím by byla dokázána obecná nemožnost trisekce. Dosadíme tedy $\theta = 60^\circ$, tj. $\cos \theta = \frac{1}{2}$ a zabýváme se polynomem

$$8z^3 - 6z - 1 = 0.$$

Nemožnost vyřešit tyto úlohy pouze užitím kružítko a pravítka byla dokázána až v 19. století, po vytvoření náležitého matematického aparátu. Nemožnost eukleidovské konstrukce *zdvojení krychle* a *trisekce úhlu* dokázal *Pierre Wantzel* v roce 1837.

ÚKOL: Jednodušší analogií trisekce úhlu je trisekce úsečky. Pokuste se řešit eukleidovsky!

2.2 Mascheroniový konstrukce

Mascheroniový konstrukce, též *Mohr–Mascheroniový konstrukce* jsou konstrukce vykonávané pouze *kružítkem*.

Lorenzo Mascheroni, a zhruba 100 let před ním, ovšem nepovšimnut, *Georg Mohr*, dokázal v roce 1797 větu, která tvrdí, že všechny konstrukce, které

lze provádět pravítkem a kružítkem (tj. eukleidovské konstrukce), lze vykonat pouze *kružítkem*.

ÚKOL: Je dána kružnice $k(S; r)$; dále je dána dvěma body A, B (body neleží na kružnici) její sečna p , která neprochází středem S . Sestrojte průsečíky přímky p s kružnicí k , aniž přitom použijete pravítka.

Kapitola 3

Neeukleidovské geometrie

Eukleidův pátý postulát se většinou nazývá *postulát o rovnoběžkách*, viz str. 18. Od ostatních postulátů a axiomů se liší tím, že ho nelze experimentálně ověřit. Týká se totiž nekonečných přímek a existence/neexistence jejich průsečíku ležícího kdesi mimo pozorovatelovo zorné pole. Vystává tak otázka, zda tento postulát nelze odvodit z ostatních. Celá staletí se matematici pokoušeli tuto možnost odvození 5. postulátu dokázat. Neúspěšnost těchto snah dala vzniknout *problému rovnoběžek*. Nebylo jasné, zda pokusy selhávají proto, že důkaz není možný, nebo proto, že sice možný je, ale pro jeho provedení je třeba nějakého dosud neznámého obratu.

Snahy o dokázání 5. postulátu pomocí ostatních axiomů a postulátů vedly ke vzniku tzv. *neeukleidovských geometrií*. Zasloužili se o to Carl Friedrich Gauss (1777–1855), János Bolyai (1802–1860) a Nikolaj Ivanovič Lobačevský (1793–1856), později pak Bernhard Riemann (1826–1866).

Připomeňme si 5. Eukleidův postulát ve formě, v jaké je uveden na str. 19.

Nechť p je libovolná přímka, A libovolný bod, který na ní neleží. Potom bodem A prochází nejvýše jedna rovnoběžka s přímkou p .

Z uvedené formulace je patrné, že pro geometrie neeukleidovské, tj. založené na neplatnosti 5. postulátu v uvedeném znění, se nabízejí dvě možnosti, jak 5. postulát nahradit, každá odpovídající jinému typu neeukleidovské geometrie.

Nahradíme-li 5. Eukleidův postulát tvrzením: **Nechť p je libovolná přímka, A libovolný bod, který na ní neleží. Potom bodem A**

procházejí alespoň dvě přímky, které s přímkou p nemají společný průsečík, dostáváme hyperbolickou geometrii.

Nahradíme-li 5. Eukleidův postulát tvrzením: **Nechť p je libovolná přímka, A libovolný bod, který na ní neleží. Potom každá přímka procházející bodem A má s přímkou p společný průsečík, dostáváme eliptickou geometrii.**

Prívlastky *hyperbolická*, *parabolická* a *eliptická* pro tři možné typy geometrie použil poprvé v roce 1871 Felix Klein. Přitom jako parabolickou označil Eukleidovskou geometrii. Důvody, proč třem možným geometriím přiřadil tyto názvy zde nebudeme rozebírat. Je to poněkud komplikované. Souvisí to s invariantností jistých geometrických vlastností daných geometrií. Přiřazení názvů je ovlivněno znaménkem křivosti příslušné plochy. [7]

3.1 Lobačevského geometrie [IUSDnonR] (hyperbolická geometrie)

Též *hyperbolická geometrie*. Lobačevský (stejně jako Bolyai a zřejmě i Gauss, který z nich byl první, ale své objevy nezveřejnil) použil pro důkaz 5. postulátu metodu nepřímého důkazu (tj. uplatnění *principu o vyloučeném třetím*). Vzal všechny věty, které se dají dokázat bez 5. postulátu (tj. věty tvořící *absolutní geometrii*, viz str. 18) a k nim přidal negaci 5. postulátu: *Existuje alespoň jedna dvojice neprotínajících se přímek v rovině, které protínají tutéž přímku a tvoří s ní po jedné její straně vnitřní úhly, jejichž součet je menší dvou pravých*. Přitom doufal, že dojde ke sporu, což se ale nestalo. Jeho systém tvrzení byl bezesporný, vytvořil tak novou, neeukleidovskou geometrii, *Lobačevského neeukleidovskou geometrii*. Poprvé ji veřejně představil při přednášce v roce 1826, formou publikace pak v roce 1829, [13]. Bolyai objevil tuto geometrii nezávisle na Lobačevském a publikoval ji v roce 1832 (literární formou je historie vzniku neeukleidovské geometrie pěkně popsána v [17]). Pro další použití využijeme následující formulaci negace 5. postulátu:

L: *Existují přímka p a bod D , který na ní neleží, takové, že alespoň dvě různé přímky jdoucí bodem D neprotínají přímku p .*

Vybrané vlastnosti Lobačevského geometrie

- Součet vnitřních úhlů v trojúhelníku je menší než π :

$$\alpha + \beta + \gamma < \pi.$$

- Shodují-li se dva trojúhelníky v úhlech, jsou shodné.
- Čím je menší součet úhlů trojúhelníka, tím je větší jeho obsah.
- Čím menší je obsah trojúhelníka, tím je součet úhlů bližší k π .

Lobačevského formule

pro vztah $\alpha = \Pi(x)$ mezi úhlem souběžnosti α a vzdáleností x .

Figure 3.1: Vztah mezi úhlem souběžnosti α a délkou x úsečky AB

Uvažujme souběžku b s přímkou a jdoucí bodem A , který je ve vzdálenosti x od a , viz Obr. 3.1. Potom platí formule

$$\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}\Pi(x)\right) = e^{-\frac{x}{k}},$$

kde $\alpha = \Pi(x)$ vyjadřuje závislost úhlu souběžnosti α na x a k je libovolná konstanta. Potom je zřejmé, že platí

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\Pi(x)) = \frac{\pi}{2}.$$

Z toho vyplývá, že v dostatečně malé části Lobačevského roviny lze užívat euklidovské geometrie, aniž se dopustíme podstatných chyb, [11].

Modely Lobačevského (hyperbolické) geometrie

Vedle vytvoření logicky konzistentního systému geometrických vět je důležité vytvořit také model takovéto geometrie. Uvedeme si dva jednoduché modely rovinné, oba kruhové, a jeden model prostorový.

Poincarého kruhový model

Modelem roviny je jednotkový kruh, bez hraniční kružnice, viz Obr. 3.2 a 3.3. Bodem je vnitřní bod kruhu. Přímkou je kruhový oblouk, bez krajních bodů, patřící kružnici ortogonálně protínající hranici modelu.

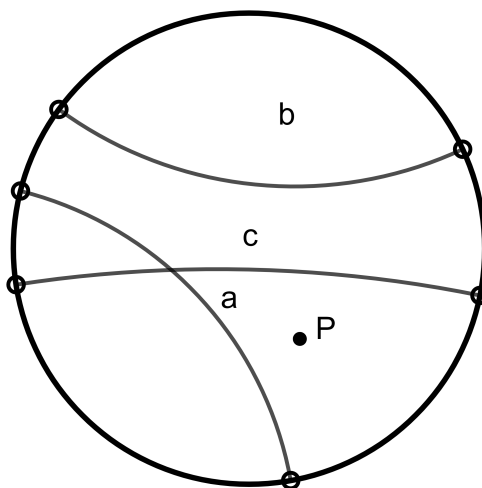


Figure 3.2: Poincarého model; přímky a bod

Poincarého model zachovává velikost úhlu, tj. úhel mezi jeho přímkami odpovídá úhlu (ve smyslu eukleidovské geometrie) mezi příslušnými oblouky (tj. mezi tečnami oblouků v jejich společném dodě). Říkáme, že Poincarého

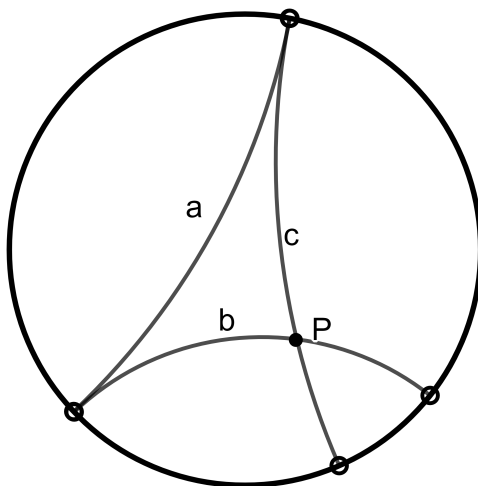


Figure 3.3: Poincarého model; přímky b , c jsou souběžkami přímky a

model je *konformní*. S pomocí tohoto modelu tak snadno a velmi názorně ukážeme, že součet vnitřních úhlů “hyperbolického trojúhelníku” je menší než π , viz GeoGebra: Poincarého model.

Kleinův model

Na Obr. 3.4 představený *Kleinův model* (*Kleinův kruhový (diskový) model*) je, stejně jako předchozí Poincarého model, rovinnou variantou obecnějšího *Beltramiho–Kleinova modelu*). Modelem roviny je kruh, přímkou je jeho

Figure 3.4: Kleinův model Lobačevského (hyperbolické) geometrie

tětiva. Z Obr. 3.4 je zřejmé, že bodem ležícím mimo danou přímku může být vedeno nekonečně mnoho přímek, které s ní nemají nic společného. Už tímto jednoduchým modelem je potvrzeno, že 5. postulát nelze odvodit z ostatních. Kdyby tomu tak bylo, musel by v Kleinově modelu platit.

Kleinův (též Beltramiho–Kleinův) model byl představen již v kapitole 1.2. Připomeňme si zde zavedení neeukleidovské vzdálenosti uvedené na str. 16.

Zavedení neeukleidovské vzdálenosti v Beltramiho–Kleinově modelu

Vzdálenost bodu B od bodu A (viz Obr. 3.5) definujeme výrazem

$$|\ln(UVBA)|, \quad (3.1)$$

kde U, V jsou krajní body tětivy, na které leží body A, B , a $(UVBA)$ je dvojpoměr bodů U, V, B, A . Je zřejmé, že pokud se bod B blíží hranici kruhu, jeho vzdálenost od A se blíží nekonečnu. Použitím logaritmu dvojpoměru místo pouhého dvojpoměru je zajištěna možnost sčítání vzdáleností. Uvažujme body A, C, B dle Obr. 3.5. Potom pro příslušné dvojpoměry platí $(UVCA) \cdot (UVBC) = (UVBA)$, zatímco pro jejich logaritmy platí

$$\ln(UVCA) + \ln(UVBC) = \ln(UVBA),$$

což koersponduje s naší představou o možnosti sčítání vzdáleností. Absolutní hodnota zase zaručí nezávislost vzdálenosti dvou bodů na jejich pořadí, protože, když $(UVAB) = (UVBA)^{-1} = (VUAB)^{-1} = (VUBA)$, potom

$$|\ln(UVAB)| = |\ln(UVBA)| = |\ln(VUAB)| = |\ln(VUBA)|.$$

Pro takto definovanou vzdálenost bodů, je potom délka úsečky UV vlastně nekonečná. Dobře tak hraje roli přímky.

Figure 3.5: Vzdálenost bodů v Kleinově (Beltramiho–Kleinově) modelu

Hyperbolický paraboloid

Dalším možným modelem Lobačevského (hyperbolické) geometrie je plocha hyperbolického paraboloidu (svým tvarem připomínající sedlo), viz Obr. 3.6. Nejkratší spojnicí dvou bodů na ploše je tzv. *geodetická čára* (viz též “Geodesics on an ellipsoid”), která se u ploch různých od roviny liší od úsečky. V důsledku toho má trojúhelník tvořený třemi body na hyperbolickém paraboloidu součet vnitřních úhlů menší než 180° . Naproti tomu

Figure 3.6: Hyperbolický paraboloid

u trojúhelníku na kulové ploše (představte si např. rovnoramenný trojúhelník se základnou na rovníku a s hlavním vrcholem v severním pólu) je součet úhlů větší než 180° . Kulová plocha je tak modelem další neeukleidovské geometrie, tzv. *Riemannovy (eliptické) geometrie*.

3.2 Riemannova geometrie (eliptická geometrie)

Též *eliptická geometrie*. Bernhard Riemann (1826–1866) formuloval v roce 1854 teorii *obecné metrické geometrie*, která zahrnovala kromě *eukleidovské geometrie* a nedávno objevené *hyperbolické (Bolyai–Lobačevského) geometrie* ještě novou *eliptickou geometrii*, později též nazývanou *Riemannova geometrie*.

Figure 3.7: Povrch koule jako model Riemannovy eliptické geometrie

Typickou vlastností této geometrie je skutečnost, že součet vnitřních úhlů v trojúhelníku je větší než π :

$$\alpha + \beta + \gamma > \pi$$

Modelem Riemannovy geometrie je pak povrch koule (sféry).

Kapitola 4

Určení polohy bodu

4.1 Afinní a kartézské souřadnice

Afinní soustava souřadnic (též nazývaná *repér*) φ v afinním bodovém prostoru A_n je množina obsahující jeden bod, *počátek* soustavy souřadnic (oz-

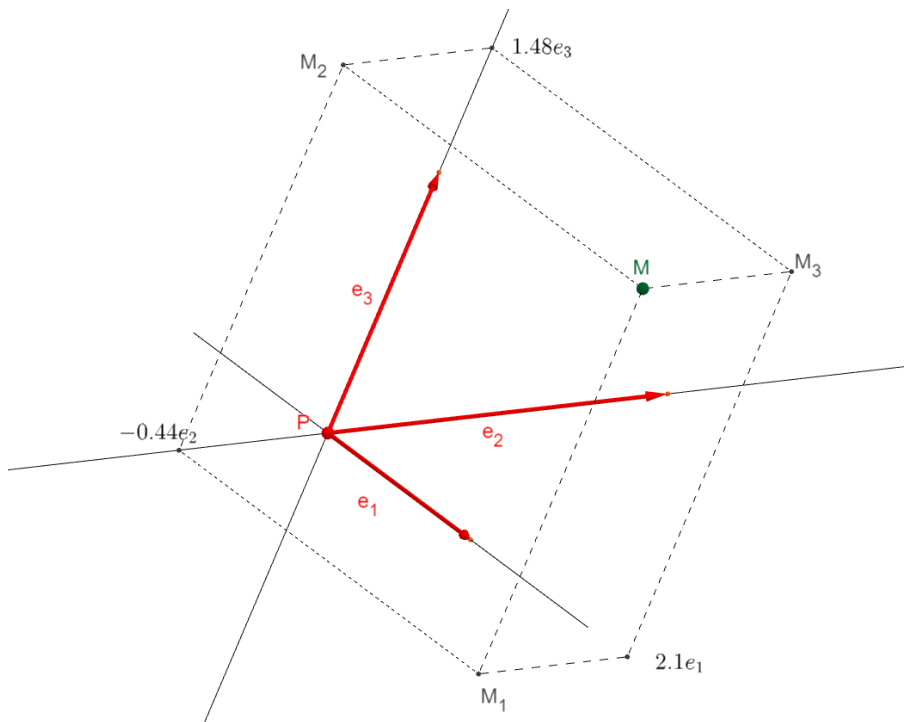


Figure 4.1: Afinní soustava souřadnic $\varphi = \{P, u_1, u_2, u_3\}$

načme ho P) a n lineárně nezávislých vektorů, tvořících bázi vektorového prostoru V_n , který je zaměřením prostoru A_n (označme je $u_1, u_2, \dots, u_n$), viz Obr. 4.1, symbolicky zapíšeme takto:

$$\varphi = \{P; u_1, u_2, \dots, u_n\}.$$

Abychom soustavu souřadnic, například v trojrozměrném prostoru, jejíž příklad je na Obr. 4.1, mohli nazvat *afinní*¹, stačí, aby splňovala jediný požadavek, aby vektory $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$ neležely v jedné rovině. Ekvivalentní podmínkou je požadavek, aby v jedné rovině neležel bod P spolu s koncovými body vektorů $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$ (tyto body ovšem nejsou v obrázku popsány).

Afinní soustavu souřadnic nazýváme:

- *kosoúhlou*, pokud alespoň dvě její souřadnicové osy (tj. jejich směrové vektory) nejsou navzájem kolmé, viz Obr. 4.1,
- *pravoúhlou* (*ortogonální*), pokud každé dvě její osy (tj. jejich směrové vektory) jsou navzájem kolmé,
- *kartézskou* (*ortonormální*), pokud každé dvě její osy jsou navzájem kolmé (tj. jsou ortogonální) a zároveň jsou jednotky na všech těchto osách stejné.

Ve školní matematice pracujeme s *kartézskou soustavou souřadnic*. Je pojmenována po francouzském matematikovi a filosofovi *René Descartovi*, který se systematickým zavedením metody práce se souřadnicemi bodů v prostoru zasloužil o vznik *analytické geometrie* (tj. analytické metody v geometrii).

Souřadnice bodu $A[a_1, a_2]$, $A[a_1, a_2, a_3]$ viz Obr. 4.2.

Figure 4.2: Souřadnice bodu A v rovině (vlevo) a v trojrozměrném prostoru (vpravo)

¹Zavedení pojmu *afinní* do geometrie je připisováno švýcarskému matematikovi *Leonardu Eulerovi*. *Afinní zobrazení* můžeme stručně charakterizovat jako zobrazení, které přímku zobrazuje opět na přímku nebo na bod, a které střed dvojice bodů–vzorů zobrazí zase na střed odpovídající dvojice bodů–obrazů (přesněji řečeno, zachovává dělicí poměr, viz (Hašek: PLA 2020), str. 15). *Afinní geometrií* potom rozumíme geometrii, která zkoumá takové vlastnosti geometrických útvarů, které se nemění při jejich afinních zobrazeních.

4.2 Polární a sférické souřadnice

Existují i jiné soustavy souřadnic, než jsou kartézské nebo kosoúhlé. Jaké znáte?

Polární souřadnice

Polární souřadnice (r, φ) bodu X v rovině si zavedeme dle Obr. 4.3. Polární soustava souřadnic je určena *pólem* P a *polární osou* p . Obrázek nabízí jednoduchý přechod od polárních souřadnic $X = (r, \varphi)$ k souřadnicím kartézským $X = [x; y]$. Pokud ztotožníme pól P s počátkem kartézské soustavy souřadnic a polární osu p s kladnou poloosou x , lze pro bod X psát:

$$x = r \cdot \cos \varphi, \quad (4.1)$$

$$y = r \cdot \sin \varphi. \quad (4.2)$$

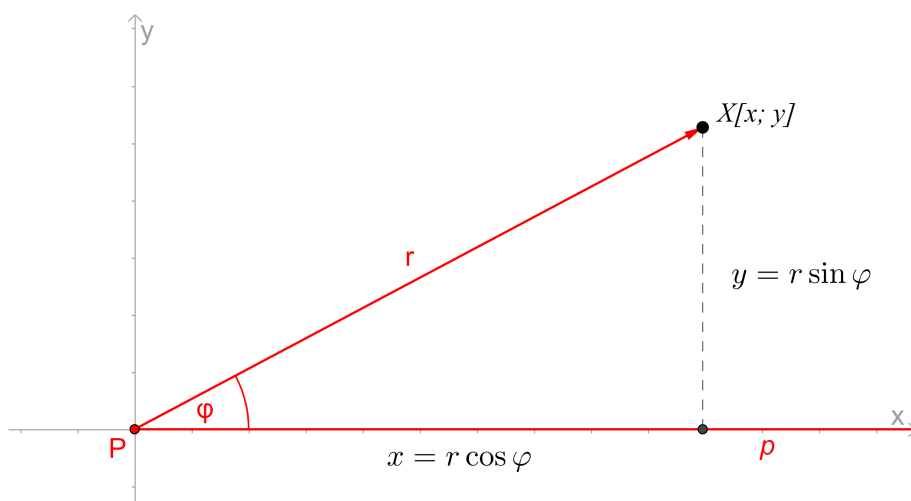
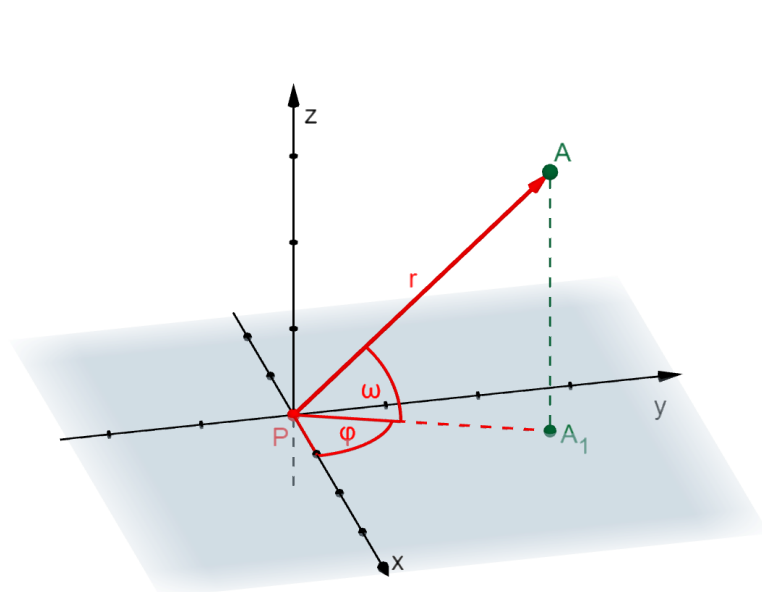


Figure 4.3: Polární souřadnice

Příklad 4.1. Napište parametrické rovnice kružnice se středem v počátku soustavy souřadnic a s poloměrem $r = 5$. Napište rovnici této kružnice v polárních souřadnicích.

Sférické souřadnice

Polární souřadnice můžeme chápat jako rovinnou analogií trojrozměrných *sférických souřadnic*, viz Obr. 4.4. Mohou tak sloužit jako jednodušší

Figure 4.4: Sférické souřadnice (r, φ, ω)

předstupen pro pochopení sférických souřadnic a význam rovnic pro jejich převedení na kartézské souřadnice, viz (4.3), (4.4), (4.5).

Příklad 4.2. Využijte princip sférických souřadnic k odvození parametrických rovnic kulové plochy a k jejímu zobrazení v GeoGebře.

Řešení: Použijeme sférické souřadnice (r, φ, ω) zavedené dle Obr. 4.4, které se mírně liší od jejich zavedenějšího pojetí (místo našeho úhlu ω se používá $\theta = \pi/2 - \omega$), viz Wikipedia: Spherical Coordinate System.

Potom pro parametrické rovnice kulové plochy platí:

$$x(r, \varphi, \omega) = r \cdot \cos \omega \cdot \cos \varphi, \quad (4.3)$$

$$y(r, \varphi, \omega) = r \cdot \cos \omega \cdot \sin \varphi, \quad (4.4)$$

$$z(r, \varphi, \omega) = r \cdot \sin \omega; \quad r \geq 0, \varphi \in \langle 0; \pi \rangle, \omega \in \langle 0, 2\pi \rangle. \quad (4.5)$$

Po zavedení posuvníku pro hodnoty r a po zadání příkazu `Plocha( $r \cdot \cos \omega \cdot \cos \varphi$ ,  $r \cdot \cos \omega \cdot \sin \varphi$ ,  $r \cdot \sin \omega$ ,  $\varphi$ ,  $0$ ,  $\pi$ ,  $\omega$ ,  $0$ ,  $2\pi$ )` získáme graf kulové plochy zachycený na Obr. 4.5. Měníme-li posuvníkem hodnotu r , mění se velikost (poloměr) kulové plochy.

Vedle sférických souřadnic můžeme jako další příklad systému souřadnic

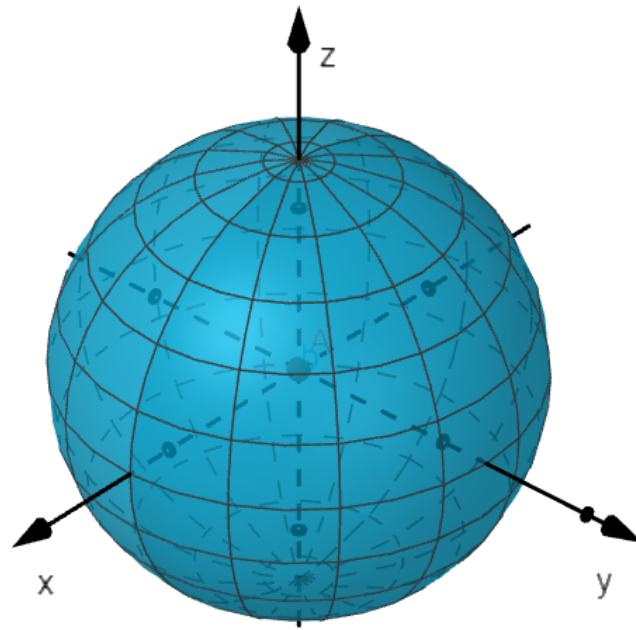


Figure 4.5: Kulová plocha

používaného k popisu trojrozměrného prostoru uvést *cylické souřadnice*, viz Wikipedia: Cylindrical Coordinate System.

4.3 Dělicí poměr

Dělicím poměrem rozumíme číslo, které jednoznačně udává polohu bodu na přímce vzhledem ke dvěma pevně daným bodům této přímky.

Figure 4.6: Tři kolineární body

Definice 4.1 (Dělicí poměr). Nechtě A, B, C ; $A \neq B$, $C \neq B$, jsou tři body ležící na přímce (tj. tři kolineární body). Dělicím poměrem bodu C vzhledem k bodům A, B rozumíme reálné číslo λ , které zapisujeme (ABC) , a pro jehož absolutní hodnotu platí

$$|(ABC)| = \frac{|AC|}{|BC|}, \quad (4.6)$$

přitom pro bod C ležící vně úsečky AB je $(ABC) > 0$ a pro bod C ležící uvnitř AB je $(ABC) < 0$. Pro $C = A$ je zřejmě $(ABC) = 0$.

Poznámka. Uvedená definice zavádí dělicí poměr pomocí podílu vzdáleností bodu C od daných bodů A, B . Protože vzdálenosti jsou kladné, nepřináší jejich podíl žádnou informaci o znaménku dělicího poměru, kterému pak musí být věnována zvláštní část definice. Tomu se vyhneme, pokud použijeme k zavedení pojmu dělicí poměr odpovídající vektory definované příslušnou trojicí bodů, viz Obr.4.7.

Figure 4.7: Dělicí poměr bodu C vzhledem k bodům A, B

Definice 4.2 (Dělicí poměr; alternativní definice). Nechť A, B, C ; $A \neq B$, $C \neq B$, jsou tři body ležící na přímce (tj. tři kolineární body). Potom číslo λ definované rovnicí

$$C - A = \lambda(C - B) \quad (4.7)$$

značíme (ABC) a nazýváme dělicím poměrem bodu C vzhledem k bodům A, B .

Poznámka. Ve vztahu (4.7) je obsažena kompletní informace o čísle λ , tj. o jeho absolutní hodnotě i o znaménku. Pro snazší zapamatování si můžeme (4.7) přepsat do tvaru

$$\lambda = \frac{C - A}{C - B},$$

který sice není formálně správně, ale jasně koresponduje se vztahem (4.6). Smysl získá až dosazením souřadnic bodů $A = [a_1; a_2]$, $B = [b_1; b_2]$, $C = [c_1; c_2]$:

$$\lambda = \frac{c_1 - a_1}{c_1 - b_1} = \frac{c_2 - a_2}{c_2 - b_2}.$$

Příklad 4.3. Určete dělicí poměr (ABS) středu S úsečky AB vzhledem k jejím krajním bodům A, B .

Příklad 4.4. Pro body A, B, C platí $(ABC) = \lambda$. Zapište pomocí λ dělicí poměry (BAC) , (CBA) , (ACB) , (CAB) a (BCA) .

Řešení: Vztah (4.7) pro $(ABC) = \lambda$ přepíšeme do tvaru $A = \lambda B + (1 - \lambda)C$. Odtud po vydělení λ dostaneme $B = \frac{1}{\lambda}A + (1 - \frac{1}{\lambda})C$. Odtud je zřejmé,

že $(BAC) = \frac{1}{\lambda}$. Poznamenejme ještě, že ke stejnému výsledku vede také toto odvození: $(BAC) = \frac{C-B}{C-A} = \frac{1}{\frac{C-A}{C-B}} = \frac{1}{\lambda}$. Analogicky odvodíme vyjádření dalších dělicích poměrů v rámci dané trojice bodů: $(CBA) = \frac{\lambda}{\lambda-1}$, $(ACB) = 1 - \lambda$, $(CAB) = \frac{1}{1-\lambda}$ a $(BCA) = 1 - \frac{1}{\lambda}$.

Příklad 4.5. V rovině jsou dány dva pevné body A , B . Určete množinu všech bodů X této roviny, pro které platí

$$\frac{|AX|}{|BX|} = k,$$

kde k je reálná konstanta.

Řešení: Hledanou množinou je kružnice, které je známá jako *Apolloniova kružnice*. Nalezení její rovnice si usnadníme vhodným umístěním bodů A , B vzhledem k souřadnicovým osám. Konkrétně je umístíme na osu x tak, že $A = [-a, 0]$ a $B = [a, 0]$, kde $a \in \mathbb{R}$. Potom má vyšetřovaná množina bodů $X = [x, y]$ rovnici

$$\left(x - \frac{a(k^2 + 1)}{k^2 - 1}\right)^2 + y^2 = \frac{4a^2k^2}{(k^2 - 1)^2},$$

která skutečně odpovídá kružnici.

Náhled řešení příkladu 4.5 v programu GeoGebra vidíme na Obr. 4.8. Příslušný applet je dostupný na adrese www.geogebra.org/m/xt9ettcr

Poznámka. S aplikací dělicího poměru se setkáme asi ve všech programech dynamické geometrie. Jedná se o to, že pokud umístíme na přímku danou dvěma body, označme je A , B , třetí bod, označme ho C , při jakékoliv změně vzájemné vzdálenosti bodů A , B se mění vzdálenost třetího bodu C vůči nim tak, aby dělicí poměr (ABC) byl pořád stejný. Vyzkoušejte v programech GeoGebra a Desmos.

Poznámka. V GeoGebře je implementována funkce `DeliciPomer(A,B,C)`. Dělicí poměr bodu C vzhledem k bodům A , B , který zapisujeme ve tvaru (ABC) s její pomocí vypočítáme zadáním příkazu `DeliciPomer(C,B,A)`. Vyzkoušejte!

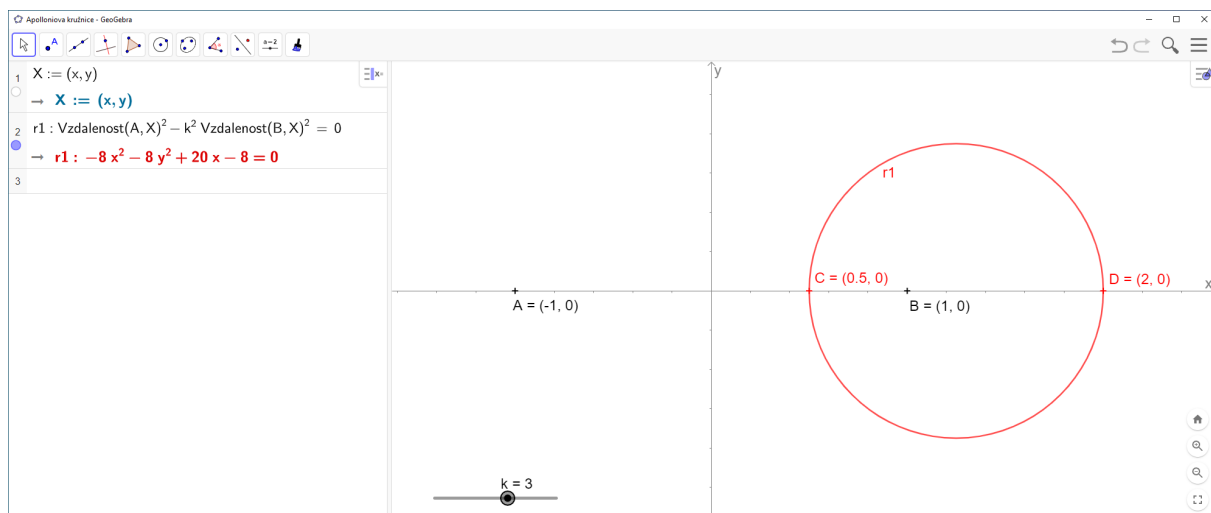


Figure 4.8: Množina bodů X v rovině, pro které platí $|AX| = k|BX|$; řešeno v programu GeoGebra

4.4 Barycentrické souřadnice

Výše uvedené skutečnosti nás mohou přivést k možnosti vyjádření polohy bodu nezávisle na volbě soustavy souřadnic. Bod C můžeme, při zvolených bodech A, B , zapsat takto:

$$C = \frac{1}{1 - \lambda}A - \frac{\lambda}{1 - \lambda}B.$$

Jedná se o příklad tzv. barycentrických¹ souřadnic.

Barycentrické souřadnice vzhledem ke dvěma bodům

Bod X leží na přímce AB právě tehdy, když existují dvě čísla $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ taková, že platí

$$X = \alpha A + \beta B, \quad \alpha + \beta = 1. \quad (4.8)$$

Tato čísla nazýváme **barycentrickými souřadnicemi** bodu X vzhledem k bodům A, B . Rovnice $X = \alpha A + \beta B$, kde $\alpha + \beta = 1$ se nazývá **bodová rovnice přímky**.

Jak je uvedeno v poznámce, *barycentrum* znamená *hmotný střed*. Důvodem použití tohoto slova je skutečnost, že barycentrické souřadnice bodu vzhledem k jiným bodům v prostoru mají analogii v určení souřadnic těžiště

¹ *Barus* znamená řecky *těžký*. Slovem *barycentrum* se označuje *hmotný střed* soustavy těles, většinou kosmických. Použití barycentrických souřadnic má analogii ve výpočtu polohy těžiště soustavy těles. Uvažujme například dvě bodová tělesa o hmotnostech m_1 a m_2 , která jsou umístěna v daném pořadí v bodech X a Y . Potom pro souřadnice těžiště T této soustavy dvou těles platí: $T = \frac{m_1 X + m_2 Y}{m_1 + m_2} = \frac{m_1}{m_1 + m_2}X + \frac{m_2}{m_1 + m_2}Y$, kde $\frac{m_1}{m_1 + m_2} + \frac{m_2}{m_1 + m_2} = 1$.

vzhledem k hmotným bodům v prostoru. Ilustrujme si to na příkladu výpočtu souřadnice těžiště na přímce, tj. v prostoru dimenze 1.

Příklad 4.6. Určete souřadnici x_T těžiště T soustavy dvou hmotných bodů umístěných na ose x takto: Hmotnost m_1 je umístěna v bodě $X_1[x_1]$, hmotnost m_2 v bodě $X_2[x_2]$.

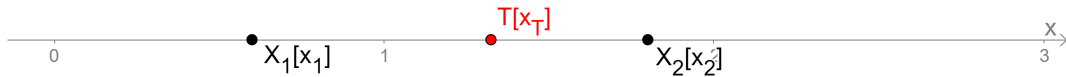


Figure 4.9: Těžiště soustavy dvou hmotných bodů umístěných na ose X

Řešení: Viz Obr. 4.9. Pro zachování stability soustavy musí platit momentová věta, tj. součet momentů sil působících na soustavu je roven nule. Konkrétně, uvažujeme-li jako střed otáčení počátek soustavy souřadnic na ose x , platí

$$m_1x_1 + m_2x_2 = (m_1 + m_2)x_T.$$

Po úpravě dostáváme

$$x_T = \frac{m_1x_1 + m_2x_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_1}{m_1 + m_2}x_1 + \frac{m_2}{m_1 + m_2}x_2. \quad (4.9)$$

Pro výrazy $\frac{m_1}{m_1+m_2}$, $\frac{m_2}{m_1+m_2}$ z 4.9 evidentně platí

$$\frac{m_1}{m_1 + m_2} + \frac{m_2}{m_1 + m_2} = 1,$$

odpovídají tak definici barycentrických souřadnic dané vztahem 4.8.

Poznámka. Analogicky se souřadnicemi vzhledem ke dvěma bodům můžeme zavést barycentrické souřadnice bodu X také vzhledem ke třem, čtyřem, obecně pak k bodům. Proveďte pro $k = 3, 4$.

Příklad 4.7. Napište barycentrické souřadnice středu úsečky AB vzhledem k jejím krajním bodům.

Příklad 4.8. Napište barycentrické souřadnice těžiště trojúhelníku ABC vzhledem k jeho vrcholům.

Barycentrické souřadnice vzhledem ke třem bodům

Definici barycentrických souřadnic bodu P vzhledem k bodům A, B, C vyhovují poměry obsahů trojúhelníků tvořených vždy jednou stranou trojúhelníku a bodem P , viz barevné trojúhelníky na Obr. 4.10, a obsahu celého trojúhelníku

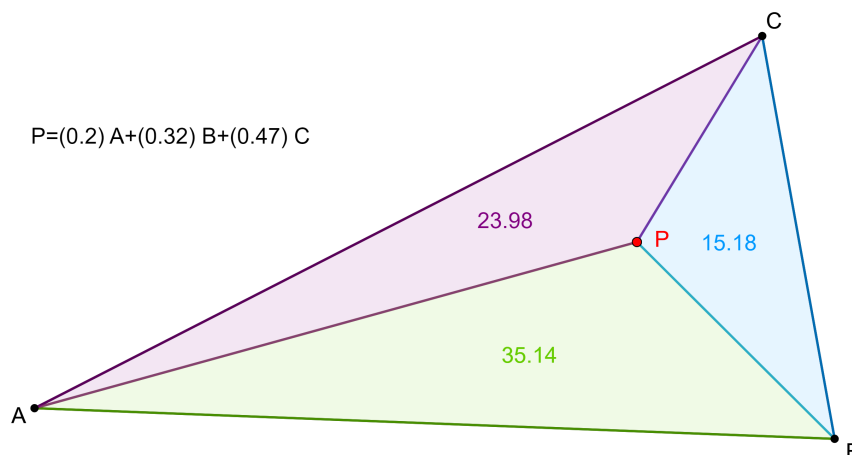


Figure 4.10: Barycentrické souřadnice bodu P vzhledem k A, B, C určené pomocí obsahů dílčích trojúhelníků s vrcholem P ; provedeno v programu GeoGebra, applet viz www.geogebra.org/m/n9shewzb

ABC . Pokud je bod P vně trojúhelníku, je obsah trojúhelníku, jehož stranou bod P “opustil” trojúhelník ABC , záporný. Jedná se o tzv, *orientovaný obsah*, který počítáme pomocí determinantu. Označíme-li obsahy trojúhelníků s vrcholem P na d stranami a, b, c trojúhelníku ABC postupně S_a, S_b, S_c a obsah trojúhelníku ABC S , lze bod P zapsat pomocí barycentrických souřadnic vzhledem k A, B, C takto

$$P = \frac{S_a}{S}A + \frac{S_b}{S}B + \frac{S_c}{S}C. \quad (4.10)$$

Příklad 4.9. Výše uvedené poznatky o souvislosti příslušných obsahů s barycentrickými souřadnicemi bodu P vzhledem k A, B, C se mohou stát zdrojem pro ustavení jednoduché metody ověření toho, zda daný bod náleží danému trojúhelníku. Tuto metodu popište. Potom vymyslete konkrétní příklad, na kterém ověříte a prokážete její funkčnost.

Kapitola 5

Projektivní geometrie

Pohledy zachycené na Obr. 5.1 mají společný jev, který je nám dobře znám, reálně rovnoběžné linie se sbíhají do jednoho bodu.



Figure 5.1: Rovnoběžné linie staveb a kolejí se v našem pohledu sbíhají do jednoho bodu

Nahlížíme-li na tento jev z hlediska geometrie, jedná se o promítnutí bodu U_∞ v nekonečnu (nazýváme ho *nevlastní bod*), kterým je v našich představách průsečík rovnoběžek, do skutečného bodu U v našem zorném poli (*vlastní bod*) ve středovém promítání se středem v našem oku. Tomuto obrazu nevlastního bodu říkáme *úběžník*, viz bod U na Obr. 5.2.

Pozorovaný jev můžeme stručně popsat tak, že příslušné rovnoběžky se promítají do různoběžek. (se společným bodem U). To, že se rovnoběžky mohou ve středovém promítání zobrazit jako různoběžky je doloženo dynamickým modelem v GeoGebře, jehož náhled je na Obr. 5.3. Je zřejmé, že toto zobrazení vykazuje určité geometrické vlastnosti, které je třeba znát pro jeho věrohodnou interpretaci rovinným obrázkem. Klíčovou roli hrají



Figure 5.2: Bod v nekonečnu se v našem pohledu promítá do skutečného bodu, *úběžníku*

všude tam, kde je třeba zobrazovat reálně svět kolem nás, tj. kromě geometrie např. v umění, architektuře apod. Studium těchto vlastností dalo

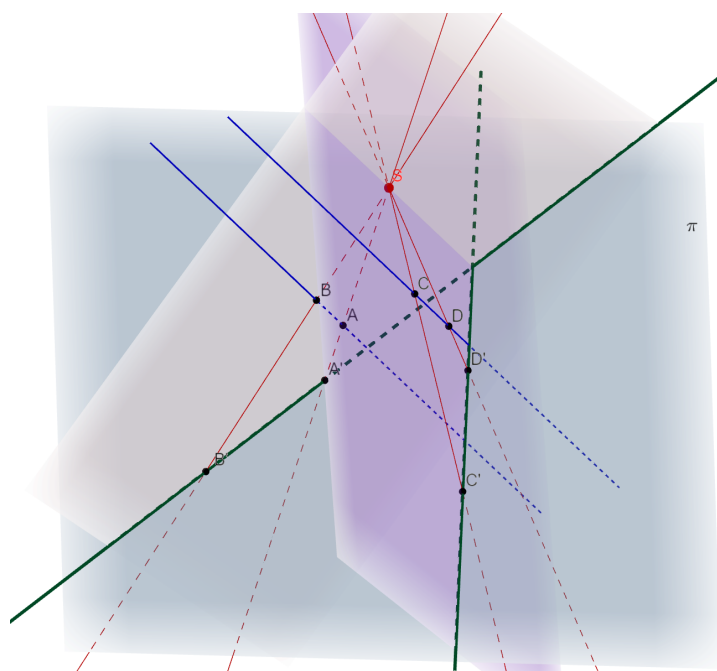


Figure 5.3: Obrazem rovnoběžek AB , CD ve středovém promítání daném středem S a průmětnou π jsou různoběžky $A'B'$, $C'D'$

základ vzniku *projektivní geometrie*.

5.1 Projektivní rozšíření $\bar{E}_n$ prostoru E_n

Jak je patrné z výše uvedeného, prvním “nedostatkem” eukleidovského prostoru (uvažujme zde obecný prostor E_n , následně se omezíme na rovinu E_2), na který při zkoumání projektivních vlastností narazíme, je absence reprezentace bodů v nekonečnu. V našem příkladu se jednalo o průsečík rovnoběžek, jehož reálný obraz jsme schopni identifikovat. Těmito body, kterým říkáme *nevlastní body*, proto musíme eukleidovský prostor doplnit. Hovoříme o *projektivním rozšíření eukleidovského prostoru E_n* . Výsledný prostor značíme $\bar{E}_n$. Takovéto rozšíření eukleidovského prostoru nám podstatně zjednodušuje popis a zkoumání některých geometrických vztahů. Využívá se třeba při výkladu perspektivy, zavádění kolineace nebo při zkoumání kuželoseček a kvadrik.

5.2 Projektivní rozšíření $\bar{E}_2$ roviny E_2

Přímka je určena buď *dvěma body*, nebo *bodem a směrem* (směrovým vektorem), viz Obr. 5.4. Dvě přímky v rovině, které nejsou totožné, mají buď *jeden společný bod*, nebo nemají žádný společný bod, ale mají *společný směr*.

Figure 5.4: Přímka je určena buď *dvěma body*, nebo *bodem a směrem* (směrovým vektorem).

Kdybychom směry ztotožnili s body, mohli bychom výše uvedená tvrzení nahradit těmito jednoduššími:

Přímka je určena dvěma body. Dvě přímky v rovině mají vždy alespoň jeden společný bod.

Řešením je doplnění roviny o tzv. *nevlastní body* N_∞ , tj. body v nekonečnu, které si můžeme představovat jako směry všech přímek roviny. Důsledkem zavedení těchto nevlastních bodů do eukleidovské roviny je její doplnění také o tzv. *nevlastní přímku* n_∞ , která je z nevlastních bodů složena.

Prvotní představa o nevlastním bodu přímky je taková, že je to bod této přímky, který leží v nekonečnu. Proto je logické, že *nevlastní bod přímky ztotožňujeme s jejím směrem*.

Definice 5.1 (Směr). Je-li $\vec{u}$ libovolný nenulový vektor, potom množinu všech vektorů $k\vec{u}$, $k \in R$ nazýváme směrem, značíme $\langle \vec{u} \rangle$. Libovolný vektor daného směru pak nazýváme reprezentantem tohoto směru.

Potom můžeme projektivně rozšířený prostor $\bar{E}_2$ chápat jako sjednocení eukleidovského prostoru E_2 s množinou všech směrů $\langle V_2 \rangle$ (kde V_2 je zaměřením E_2), tj. s množinou všech nevlastních bodů N_∞ ;

$$\bar{E}_2 = E_2 \cup N_\infty = E_2 \cup \langle V_2 \rangle.$$

Bodem prostoru $\bar{E}_2$ tak je jak bod, jak význam tohoto pojmu chápeme v eukleidovské geometrii (tj. *vlastní bod*), tak i směr (tj. *nevlastní bod*).

Poznámka. Každá vlastní přímka má právě jeden nevlastní bod (směr).

5.3 Homogenní souřadnice v $\bar{E}_2$

Je otázka, jak reprezentovat body projektivně rozšířeného prostoru $\bar{E}_2$. Tato reprezentace by měla být na jedné straně jednotná, na druhé straně by však měla dovolovat rozlišovat mezi body vlastními (tj. body původního eukleidovského prostoru E_2) a nevlastními (tj. směry zaměření V_2 původního eukleidovského prostoru E_2).

Tento na první pohled obtížný úkol elegantně řeší zavedení tzv. *homogenních souřadnic*. Homogenní souřadnice v $\bar{E}_2$ jsou výsledkem projektivního rozšíření, to jest ztotožnění vlastních i nevlastních bodů prostoru $\bar{E}_2$ se směry $\langle V_3 \rangle$ prostoru E_3 . Souřadnice vektoru z V_3 , který ukazuje na konkrétní bod prostoru $\bar{E}_2$ potom nazýváme *aritmetickým zástupcem* tohoto bodu.

Figure 5.5: Myšlenka zavedení homogenních souřadnic.

Myšlenka zavedení homogenních souřadnic je založena na tom, že celou projektivně rozšířenou eukleidovskou rovinu $\bar{E}_2$ umístíme do eukleidovského trojrozměrného prostoru E_3 , vhodně v něm zvolíme pevný bod Q a všechny body prostoru $\bar{E}_2$ ztotožníme se směry *pohledů* z tohoto bodu, tj. s vektory z vektorového prostoru V_3 .

Možné řešení je zachyceno na Obr. 5.5. Eukleidovský prostor E_2 je znázorněn modrou (spodní) rovinou, ta tedy představuje množinu *vlastních bodů*. *Nevlastním bodům*, tj. směrům přímek z E_2 , potom odpovídají vektory rovnoběžné s touto rovinou. Pro zjednodušení našich představ volíme umístění všech těchto vektorů v bodě Q . *Nevlastní body* potom vyplňují červenou (horní) rovinu.

Zvolíme-li kartézskou soustavu souřadnic “hostitelského” prostoru E_3 tak, aby její počátek splýval s bodem Q , osy x, y ležely v rovině rovnoběžné s E_2 a osa z byla orientována tak, že její průsečík s rovinou E_2 má souřadnici 1, jak vidíme na Obr. 5.5, je zřejmé, že každý vlastní bod X má v této soustavě souřadnice $X = \langle x, y, 1 \rangle$, kde x, y jsou kartézské souřadnice bodu X v rovině E_2 , zatímco nevlastní bod U má souřadnice $U = \langle u_1, u_2, 0 \rangle$, kde u_1, u_2 jsou kartézské souřadnice vektoru $\vec{u}$ příslušného směru z V_2 , který je zaměřením E_2 . Tak se nám podařilo dosáhnout vytčeného cíle.

Uvedený postup není samozřejmě jediný. Nemí např. nutné, aby třetí souřadnice vlastního bodu byla 1. Protože nám jde o směr “pohledu” z bodu Q do daného bodu, není nezbytné, aby vektor tohoto směru v příslušném bodě končil. Podstatné je, aby tímto bodem procházela přímka tohoto směru. Obecně tak může být třetí souřadnicí vlastního bodu jakékoliv nenulové číslo.

Pokud však všechny souřadnice tímto nenulovým číslem vydělíme, dostaneme výše uvedený speciální případ homogenních souřadnic, který také odpovídá situaci na Obr. 5.5. Hovoříme o tzv. *afinních homogenních souřadnicích*. Ty nám způsobem svého zavedení umožňují v případě vlastních bodů přejít k afinním (nebo přímo kartézským) souřadnicím v $\bar{E}_n$. V případě nevlastních bodů pak k souřadnicím příslušných směrových vektorů ve $\bar{V}_n$. Pro zjednodušení však budeme i pro tento typ souřadnic používat stručnější označení *homogenní souřadnice*.

(*Afinní*) *homogenní souřadnice vlastního bodu* $X \in \bar{E}_2$:

$$X = \langle h_1, h_2, h_3 \rangle = \left\langle \frac{h_1}{h_3}, \frac{h_2}{h_3}, 1 \right\rangle = \langle x_1, x_2, 1 \rangle.$$

(*Afinní*) *homogenní souřadnice nevlastního bodu (směru)* $Z \in \bar{E}_2$:

$$Z = \langle z_1, z_2, 0 \rangle.$$

Potom (x_1, x_2) jsou afinní (nebo rovnou kartézské) souřadnice bodu X v E_2 , zatímco (z_1, z_2) jsou afinní (nebo rovnou kartézské) souřadnice směrového vektoru $\vec{z}$ ve V_2 .

5.4 Rovnice přímky v $\bar{E}_2$

V $\bar{E}_2$ existují různé způsoby vyjádření přímky, která je v E_2 dána obecnou rovnicí $ax + by + c = 0$. Uvažujeme-li homogenní souřadnice jejího libovolného bodu X ve tvaru $X = \langle x, y, z \rangle = \left\langle \frac{x}{z}, \frac{y}{z}, 1 \right\rangle$, její obecná rovnice je ve tvaru

$$ax + by + cz = 0.$$

Je-li přímka dána dvěma body A, B s homogenními souřadnicemi $A = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle, B = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle$, můžeme ji zadat pomocí rovnice

$$X = \alpha \cdot A + \beta \cdot B,$$

která vyjadřuje její obecný bod X jako lineární kombinaci bodů (směrů) A, B . K vyjádření téhož lze využít i determinant. Rovnice přímky dané body A, B má potom tvar

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Příklad 5.1. V rovině E_2 je dána přímka $2x + 5y + 7 = 0$. Vypočtete (afinní) homogenní souřadnice jejího nevlastního bodu.

Příklad 5.2. V rovině $\bar{E}_2$ jsou dány body $A = \langle 0, 3, 2 \rangle, B = \langle 2, 8, 2 \rangle$. Napište rovnici přímky AB .

Příklad 5.3. V rovině $\bar{E}_2$ je $A = \langle 1, 2, 0 \rangle, B = \langle 1, 1, -1 \rangle, C = \langle 0, 1, 0 \rangle, D = \langle 1, 0, -3 \rangle$. Určete souřadnice průsečíku přímek AB a CD .

5.5 Rovnice kuželosečky v $\bar{E}_2$

Kuželosečka s algebraickou rovnicí ve tvaru $ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0$ má v $\bar{E}_2$ homogenní rovnici

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dxz + 2eyz + fz^2 = 0.$$

Příklad 5.4. V rovině E_2 je dána kuželosečka $x^2 + y^2 + 2xy - 6x - 4y + 2 = 0$. Vypočtěte její nevlastní body v $\bar{E}_2$.

5.6 Projektivní prostor dimenze n

Myšlenku projektivního rozšíření roviny můžeme zobecnit na prostor dimenze n . Výsledný prostor nazýváme projektivní prostor P_n a lze ho ztotožnit s množinou směrů $\langle V_{n+1} \rangle$:

$$P_n = \bar{E}_n = \langle V_{n+1} \rangle$$

(Afinní) homogenní souřadnice: $X = \langle x_1, \dots, x_n, x_{n+1} \rangle$.

Příklad 5.5. Napište rovnici roviny, která prochází body $A = \langle 2, -1, 1, 2 \rangle$, $B = \langle -1, 0, 0, 1 \rangle$, $C = \langle -3, 2, 2, 3 \rangle$.

Příklad 5.6. V prostoru $\bar{A}_3$ určete průsečík P přímky AB s rovinou CDE ; $A = \langle 0, 1, 0, 1 \rangle$, $B = \langle -1, 1, 2, 0 \rangle$, $C = \langle 0, 0, 0, 1 \rangle$, $D = \langle 1, 2, 0, 1 \rangle$, $E = \langle 0, 2, -5, 1 \rangle$.

5.7 Cvičení: Projektivní rozšíření prostoru

1. V rovině je dána přímka $2x - 3y + 7 = 0$. Napište její rovnici v příslušných afinních homogenních souřadnicích a vypočtete její nevlastní bod U .

2. V prostoru $\bar{E}_3$ je přímka popsána v afinních homogenních souřadnicích rovnicemi

$$2x_1 + 3x_2 - 4x_3 + 5x_4 = 0,$$

$$7x_1 - 4x_2 + 4x_3 - 4x_4 = 0.$$

Vypočtete její nevlastní bod U .

3. Napište rovnici roviny, která v prostoru P_3 prochází body $A = \langle 2, -1, 1, 2 \rangle$, $B = \langle -1, 0, 0, 1 \rangle$, $C = \langle -3, 2, 2, 3 \rangle$.

4. Každá shodnost může být v homogenních souřadnicích vyjádřena jednou maticí. Pokuste se najít příslušné matice.

5. Určete obrazy bodů $A = [2, 5]$, $B = [-1, 0]$ v rotaci $R(S, \alpha)$; $S = [1, 2]$, $\alpha = \pi/3$. Použijte matici v homogenních souřadnicích.

6. V prostoru $\bar{E}_3$ určete průsečík P přímky AB s rovinou CDE .

$A = (0, 1, 0, 1)$, $B = (-1, 1, 2, 0)$, $C = (0, 0, 0, 1)$, $D = (2, 0, 1, 1)$, $E = (0, 2, -5, 1)$.

7. Rovnice kuželoseček přepište do homogenních souřadnic a určete jejich nevlastní body.

a) $-x^2 + 2xy + 3y^2 - 2x + 4y + 1 = 0$,

b) $x^2 + 4xy + 4y^2 - 4x - 8y + 3 = 0$,

c) $x^2 - 5xy + 6y^2 - 2x + 1 = 0$.

8. V projektivním prostoru $\bar{P}_4$ najděte společný bod M rovin

$$x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 - 3x_5 = 0,$$

$$2x_1 + x_2 + 4x_3 + 3x_4 - 10x_5 = 0,$$

$$-6x_2 + 2x_3 + 3x_4 + x_5 = 0,$$

$$2x_1 + 10x_2 - 2x_3 - 4x_4 - 6x_5 = 0.$$

Kapitola 6

Vybrané vlastnosti a věty projektivní geometrie

6.1 Desarguesova věta

Následující větu o perspektivě dvou trojúhelníků, známou jako Desarguesova věta, formuloval na základě hlubšího studia teorie perspektivy francouzský matematik a architekt *Girard Desargues* (1593–1662). Jedná se o jeden z nejranějších poznatků projektivní geometrie. Desargues je tak považován za jednoho ze zakladatelů této geometrické disciplíny. Systematické studium projektivních vlastností, přesněji *vlastností invariantních vůči projektivní transformaci*, začalo na přelomu 18. a 19. století. Podíleli se na něm J. V. Poncelet, von Staudt, M. Chasles a další.

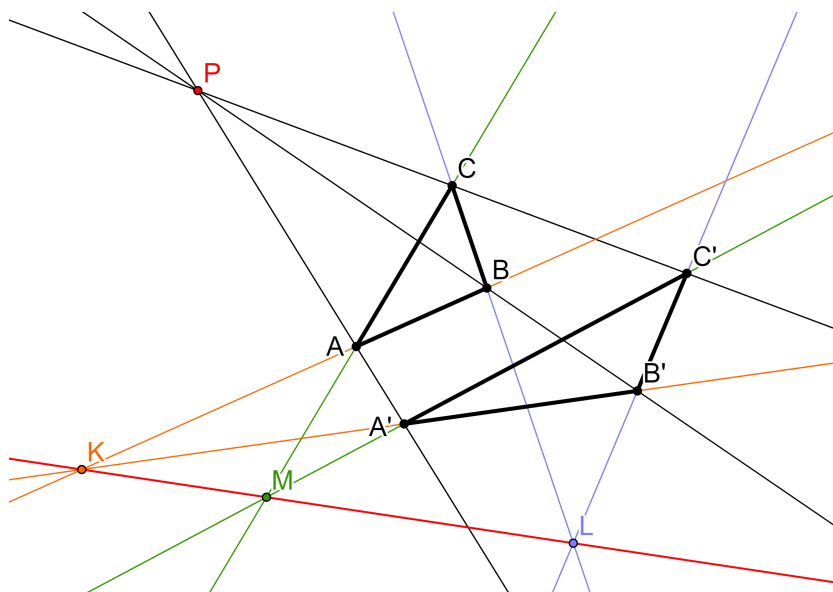


Figure 6.1: Desarguesova věta

Věta 6.1 (Desarguesova věta o trojúhelnících). Jestliže pro dva trojúhelníky v rovině platí, že přímky spojující jejich sobě odpovídající vrcholy mají společný jeden bod, potom se dvojice přímek, které jsou vždy prodlouženími sobě odpovídajících stran těchto trojúhelníků, protínají ve třech kolineárních bodech (viz Obr. D.9).

Proof. Větu uvádíme bez důkazu. Pro její pochopení a akceptaci je však postačující sestavení 3D analogie.

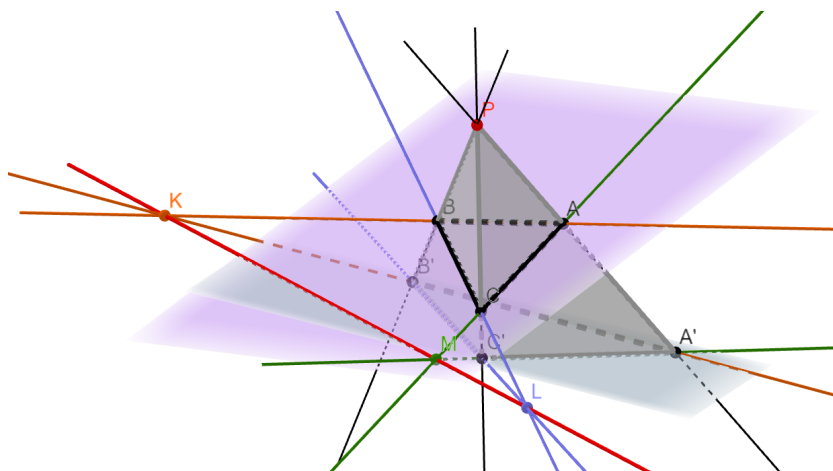


Figure 6.2: Desarguesova věta ve 3D; řez jehlanu rovinou

□

Figure 6.3: Desarguesova věta ve středové kolineaci

Poznámka. Platí i obrácená věta k výše uvedené větě 6.1: “Leží-li tři průsečíky prodloužení sobě odpovídajících stran dvojice trojúhelníků v přímce, protínají se přímky spojující jejich sobě odpovídající vrcholy v jednom bodě.”

Poznámka. Vztah mezi dvojicí trojúhelníků popsany Desarguesovou větou známe ze *středové kolineace*, viz Obr. 6.3.

6.2 Dvojpoměr jako afinní invariant

Pro každé geometrické zobrazení jsou typické určité vlastnosti, které se při něm zachovávají. Hovoříme o tzv. *invariantech* daného geometrického zobrazení. Pro shodné zobrazení je to např. vzdálenost bodů, pro podobné zobrazení poměr vzdáleností bodů, pro afinní zobrazení je to dělicí poměr.

Přirozeně nás proto zajímá *projektivní invariant*, tj. *vlastnost, která se zachovává např. při středovém promítání mezi dvěma různoběžnými rovinami v trojrozměrném prostoru, nebo mezi dvěma různoběžnými přímkami v rovině*. Jak je patrné z Obr. 6.4, dělicí poměr jím být nemůže. Je jím ale *podíl dělicích poměrů*, tzv. *dvojpoměr*. Sdělení toho, že projektivním invariantem je dvojpoměr je spolu s důkazem tohoto tvrzení předmětem *Pappovy věty o projektivní invariantnosti dvojpoměru*, viz věta 6.5 na str. 64.

Figure 6.4: Středové promítání mezi dvěma různoběžnými přímkami (rovinami) na rozdíl od rovnoběžného nezachovává dělicí poměr (sledujte, jak se zobrazuje bod Z , střed úsečky XY).

Dvojpoměrem $(ABCD)$ čtyř různých kolineárních bodů rozumíme poměr dělicích poměrů $(ABC)/(ABD)$ (viz následující definice 6.1). Pro podrobnější studium otázek invariantů geometrických zobrazení, zvláště pak dvojpoměru, lze doporučit [9].

Výše uvedené úvahy o invariantech můžeme shrnout takto:

- vzdálenost – metrický (eukleidovský) invariant,
- dělicí poměr – afinní invariant,
- dvojpoměr – projektivní invariant.

Definice 6.1 (Dvojpoměr). Nechť A, B, C, D jsou čtyři navzájem různé body přímky. Číslo $\delta = \frac{(ABC)}{(ABD)}$ nazýváme dvojpoměrem bodů A, B, C, D (v tomto pořadí) a značíme $\delta = (ABCD)$.

Poznámka. Zápisem (ABC) , resp. (ABD) , rozumíme dělicí poměr bodu C , resp. D , vzhledem k bodům A, B .

Příklad 6.1. Na přímce p jsou dány body A, B . Sestrojte na přímce p bod C tak, aby dělicí poměr $(ABC) = \lambda$ byl roven danému číslu.

- a) $\lambda = 3$, b) $\lambda = \frac{1}{2}$, c) $\lambda = -2$.

Příklad 6.2. Určete hodnoty dělicích poměrů (ABC_∞) , $(AB_\infty C)$, $(A_\infty BC)$, kde $A_\infty, B_\infty, C_\infty$ jsou nevlastní body.

Řešení: $(ABC_\infty) = 1$, $(AB_\infty C) = 0$, $(A_\infty BC = \infty)$.

Příklad 6.3. Jak vidíme na Obr. 6.5, na přímce p jsou ve stejných vzdálenostech postupně umístěny body A, B, C, D . Určete hodnotu dvojpoměru $(ABCD)$.

Figure 6.5: Určete hodnotu dvojpoměru $(ABCD)$.

Věta 6.2. Dvojpoměr čtyř bodů se nezmění, vyměníme-li vzájemně dva z nich a zároveň ještě oba zbývající, t.j. platí $(ABCD) = (BADC) = (CDAB) = (DCBA)$.

Proof. Dokážeme přímo, rozepsáním dle definice 6.1. □

Věta 6.3. Vyměníme-li poslední dva body mezi sebou, změní se hodnota dvojpoměru v hodnotu převrácenou, t.j. platí $(ABCD) = \frac{1}{(ABDC)}$.

Proof. Dokážeme přímo, rozepsáním dle definice 6.1. □

6.2.1 Harmonická čtveřice

Definice 6.2 (Harmonická čtveřice). Je-li $(ABCD) = -1$, říkáme, že body A, B, C, D tvoří harmonickou čtveřici bodů, nebo že body C, D jsou harmonicky sdruženy vzhledem k bodům A, B , nebo že body C, D oddělují harmonicky body A, B .

Příklad 6.4. Jsou-li na přímce dány body A, B, C , sestrojte bod D tak, aby A, B, C, D tvořily harmonickou čtveřici.

Řešení: Jedna z možných konstrukcí harmonické čtveřice, založená na podobnosti trojúhelníků, je zobrazena na Obr. 6.6. Vyjdeme z ní při

Figure 6.6: Jedna z možných konstrukcí harmonické čtveřice

hledání postupu konstrukce, který by byl projektivně invariantní (neměl by být založen na rovnoběžnosti).

Konstrukci nejprve modifikujeme (viz Obr. 6.7) tak, že dvojicemi bodů A, F a B, E vedeme přímky, jejichž průsečíkem G následně vedeme rovnoběžku n s přímkami k, l . Průsečíkem přímek n a p je potom hledaný bod

Figure 6.7: Další z možných konstrukcí harmonické čtveřice

D .

Nyní zbývá nahradit nevlastní průsečík přímek k, l, n vlastním bodem Q . Výsledkem je konstrukce na Obr. 6.8, která je ekvivalentní s původní a přitom při ní nemusíme využívat rovnoběžnost. Postup této konstrukce je takový, že bodem C vedeme libovolnou přímku m , na ní zvolíme dva různé body E, F a vedeme jimi přímky $k = AE$ a $n = BF$, jejichž průsečík nazveme Q . Bod D je potom určen jako průsečík přímek p a $l = QG$, kde G je průsečíkem přímek AF a BE .

Figure 6.8: Jednoduchá konstrukce harmonické čtveřice

Body A, B, F, E na Obr. 6.8 (viz též Obr. 6.9) tvoří tzv. *úplný čtyřroh*. Takto nazýváme skupinu čtyř bodů v rovině, z nichž žádné tři neleží v jedné přímce. Body A, B, F, E potom nazýváme *vrcholy úplného čtyřrohu*. Šest přímek, které tyto vrcholy spojují, nazýváme *stranami úplného čtyřrohu*. Tyto strany se protínají ještě v dalších třech bodech G, C, Q , jimž říkáme *diagonální vrcholy úplného čtyřrohu*; trojúhelník jimi určený se nazývá *diagonální trojúhelník* a jeho strany *diagonálními stranami úplného čtyřrohu*. Nalezená jednoduchá konstrukce harmonické čtveřice potom odráží *harmonickou vlastnost* úplného čtyřrohu, která je formulována v následující větě, více viz [6].

Věta 6.4. Na každé straně úplného čtyřrohu tvoří oba jeho vrcholy a dvojice bodů, z nichž jeden je diagonální vrchol a druhý je incidentní s jeho protější diagonální stranou, dvě dvojice bodů, které se harmonicky oddělují.

Figure 6.9: Úplný čtyřroh A, B, F, E a diagonální trojúhelník $\triangle GCQ$.

Poznámka. Tvrzení, že body A, B, C, D (viz Obr. 6.8 a 6.9) se harmonicky oddělují znamená, že pro dvojpoměr těchto bodů v uvedeném pořadí platí $(ABCD) = -1$.

Příklad 6.5. V P_2 jsou dány body $A = (1, 2, 3), B = (3, 2, 1), C = (1, 1, 1)$. Dokažte, že leží na přímce a vypočtěte bod D tak aby $(ABCD) = -1$.

Příklad 6.6. Střed úsečky AB je harmonicky sdružen s nevlastním bodem přímky, určené body A, B , vzhledem k bodům A, B . Dokažte.

6.3 Pappova věta a její důsledky

Pappos z Alexandrie (?290–?350), řecký matematik a astronom. Pod označením *Pappova věta* je uváděno více vět. Proto je třeba uvést, o jaké z těchto vět hovoříme. Zde se budeme věnovat *Pappově větě o invarianci dvojpoměru při promítání*. Přestože je dvojpoměr invariantní vůči rovnoběžnému i středovému promítání, omezíme se zde pouze na středové promítání. Vůči rovnoběžnému promítání je invariantní i dělicí poměr. Později uvedeme ještě *Pappovu větu o šestiúhelníku*.

Věta 6.5 (Pappova věta o invarianci dvojpoměru). Jestliže jsou A', B', C', D' rovnoběžné nebo středové průměty čtyř navzájem různých bodů A, B, C, D přímky p na přímku $p' \neq p$, potom $(A'B'C'D') = (ABCD)$.

Proof. Jak bylo již řečeno, omezíme se pouze na středové promítání. Důkaz invariance dvojpoměru vůči rovnoběžnému promítání přenecháváme laskavému čtenáři.

Figure 6.10: Pappova věta.

Důkaz naznačíme pro konfiguraci bodů A, B, C, D dle Obr. 6.10. Diskusi obecné platnosti přenecháme čtenáři pro samostatnou práci.

Nebudeme dokazovat přímo rovnost $(ABCD) = (A'B'C'D')$. Dokážeme, že hodnota dvojpoměru čtyř bodů na přímce p , resp. p' , závisí pouze na úhlech, které svírají přímky spojující tyto body se středem S (úhly $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ na Obr. 6.10). Protože tak nezávisí na umístění přímky p , je při zachování velikostí uvedených úhlů pro všechny její polohy tento dvojpoměr stejný.

Pro dvojpoměr $(ABCD)$ platí

$$(ABCD) = \frac{(ABC)}{(ABD)}, \quad (6.1)$$

kde uvedené dělicí poměry můžeme vzhledem k Obr. 6.10 zapsat takto

$$(ABC) = \frac{|AC|}{|BC|}, \quad (ABD) = \frac{|AD|}{|BD|}. \quad (6.2)$$

Nyní provedeme ekvivalentní úpravy těchto rovností (6.2) tak, aby se v nich *objevily* vztahy pro výpočet obsahů vybraných trojúhelníků, které tvoří body A, B, C, D, S na Obr. 6.10 (konkrétně se jedná o $\triangle ACS$, $\triangle BCS$, $\triangle BDS$ a $\triangle CDS$):

$$(ABC) = \frac{|AC|}{|BC|} = \frac{\frac{1}{2}|AC|v}{\frac{1}{2}|BC|v} = \frac{S_{\triangle ACS}}{S_{\triangle BCS}}, \quad (ABD) = \frac{|AD|}{|BD|} = \frac{\frac{1}{2}|AD|v}{\frac{1}{2}|BD|v} = \frac{S_{\triangle ADS}}{S_{\triangle BDS}}, \quad (6.3)$$

kde v je společná výška těchto trojúhelníků, tj. kolmá vzdálenost bodu S od přímky p .

Nyní vyjádříme každý z uvedených obsahů trojúhelníků za použití jiných základů a výšek

$$S_{\triangle ACS} = \frac{1}{2}|AS||SC| \sin \alpha, \quad S_{\triangle BCS} = \frac{1}{2}|BS||SC| \sin \beta, \quad (6.4)$$

$$S_{\triangle ADS} = \frac{1}{2}|AS||SD| \sin \gamma, \quad S_{\triangle BDS} = \frac{1}{2}|BS||SD| \sin \delta. \quad (6.5)$$

a dosadíme do vztahů (6.3)

$$(ABC) = \frac{S_{\triangle ACS}}{S_{\triangle BCS}} = \frac{\frac{1}{2}|AS||SC| \sin \alpha}{\frac{1}{2}|BS||SC| \sin \beta} = \frac{|AS| \sin \alpha}{|BS| \sin \beta}, \quad (6.6)$$

$$(ABD) = \frac{S_{\triangle ADS}}{S_{\triangle BDS}} = \frac{\frac{1}{2}|AS||SD| \sin \gamma}{\frac{1}{2}|BS||SD| \sin \delta} = \frac{|AS| \sin \gamma}{|BS| \sin \delta}, \quad (6.7)$$

zjednodušené tvary pak do (6.8)

$$(ABCD) = \frac{\frac{|AS| \sin \alpha}{|BS| \sin \beta}}{\frac{|AS| \sin \gamma}{|BS| \sin \delta}}, \quad (6.8)$$

abychom po zjednodušení dostali vztah

$$(ABCD) = \frac{\sin \alpha \sin \delta}{\sin \beta \sin \gamma}, \quad (6.9)$$

ze kterého vyplývá nezávislost hodnoty dvojpoměru $(ABCD)$ na volbě přímky p . Je tedy

$$(ABCD) = (A'B'C'D'). \quad (6.10)$$

□

Pappovu větu můžeme formulovat i jednodušším způsobem.

Věta 6.6 (Pappova věta o invarianci dvojpoměru II). Dvojpoměr se promítáním nemění.

Poznámka. Pappova věta o invarianci dvojpoměru platí i v případě, že je jeden z uvažovaných bodů nevlastní. Například pro D_∞ (viz Obr. 6.11) platí

$$(ABCD_\infty) = (ABC). \quad (6.11)$$

Postup důkazu tohoto vztahu je analogický s důkazem věty 6.5. Jak ukazuje Obr. 6.11, body A, B, C, D_∞ , kde D_∞ je nevlastní, leží na přímce p . Je však třeba mít na paměti, že pro jinou přímku, např. p' dle Obr. 6.11, mohou být všechny čtyři body A', B', C', D' vlastní.

Figure 6.11: Pappova věta pro nevlastní bod.

Skutečnost uvedenou v poslední poznámce můžeme výhodně využít při řešení následujícího příkladu.

Příklad 6.7. Na přímce p jsou dány tři různé body A, B, C . Sestrojte bod D tak, aby $(ABCD) = \mu$, kde μ je dané číslo.

Řešení: Viz Obr. 6.12. Vyjdeme z toho, že platí $(ABCD) = (A'B'C'D'_\infty) = (A'B'C')$. Nejprve sestrojíme (libovolnou) přímku p' procházející bodem $C = C'$, na ní potom zvolíme body A', B' tak, aby platilo $(A'B'C') = \mu$. Jako průsečík přímek AA', BB' dostaneme střed S , kterým vedeme rovnoběžku s p' . Jejím průsečíkem s p je hledaný bod D .

Figure 6.12: Konstrukce daného dvojpoměru.

6.3.1 Dvojpoměr čtyř přímek

Z výše uvedeného důkazu Pappovy věty (Věty 6.5) vyplývá, že pravdivost jejího tvrzení závisí pouze na zachování velikostí úhlů mezi promítacími přímkami a, b, c, d , viz Obr. 6.10. Místo dvojpoměru čtveřice bodů A, B, C, D ležících na jedné přímce p tak můžeme klidně uvažovat dvojpoměr čtveřice přímek a, b, c, d procházejících jedním bodem S , viz Obr. 6.13. Zaměnili jsme tedy body za přímky a přímky za body, a dostali jsme opět smysluplný vztah. To je projevem tzv. *principu duality v projektivní rovině*, kterému se věnujeme v následující kapitole 6.4.

Figure 6.13: Dvojpoměr čtyř přímek.

Pro dvojpoměr čtyř přímek a, b, c, d z Obr. 6.10 a 6.13 zřejmě platí

$$(abcd) = (ABCD) = \frac{\sin \alpha \sin \delta}{\sin \beta \sin \gamma}. \quad (6.12)$$

Příklad 6.8. Určete hodnotu $(abxy)$, jsou-li a, b dvě různoběžné přímky a x, y osy souměrnosti úhlů, které přímky a, b svírají.

Řešení: Viz Obr. 6.14. Je zřejmé, že platí $(abxy) = -1$.

Figure 6.14: Dvojpoměr dvou různoběžek a os jejich úhlů.

Analogicky s dvojpoměrem čtyř přímek zavedeme dvojpoměr čtyř nevlastních bodů a dvojpoměr čtyř rovin.

6.3.2 Dvojpoměr čtyř nevlastních bodů

$$(A_{\infty}B_{\infty}C_{\infty}D_{\infty}) = (abcd).$$

6.3.3 Dvojpoměr čtyř rovin

$$(\alpha\beta\gamma\delta) = (abcd).$$

Viz Obr. 6.15.

Figure 6.15: Dvojpoměr čtyř rovin.

6.4 Princip duality v projektivní rovině

Z každé věty v rovinné projektivní geometrii dostaneme novou správnou větu, když v ní příslušné pojmy nahradíme pojmy s nimi duálními, například slovo bod nahradíme slovem přímka a slovo přímka nahradíme slovem bod, přičemž incidenci zachováme. Kompletní přehled vzájemně duálních pojmů a tvrzení nabízí následující tabulka 6.1. Vzájemnými záměnami uvedených pojmů vznikají dvojice navzájem duálních vět.

bod	přímka
leží na	prochází
přímka spojující dva body	průsečík dvou přímek
přímky procházející jedním bodem	body ležící na jedné přímce
čtyřroh	čtyřstran
pól	polára
množina bodů dané vlastnosti	obálka
tečna	bod dotyku

Table 6.1: Vzájemně duální pojmy, [2]

6.4.1 Ukázka dvojice navzájem duálních vět:

Věta 1: Dvěma různými body prochází jediná přímka.

Věta 2: Dvě různé přímky se protínají v jediném bodě.

Poznámka. Dualizovat nelze vzdálenost a úhel.

6.4.2 Princip duality v praxi

Uplatnění principu duality ilustrují také dvě následující vzájemně duální definice – definice úplného čtyřrohu (viz Obr. 6.16) a definice úplného čtyřstranu.

Definice 6.3 (Úplný čtyřroh). Skupina čtyř bodů A, B, C, D v rovině, z nichž žádné tři neleží v jedné přímce, se nazývá **úplný čtyřroh** A, B, C, D . Body A, B, C, D se nazývají jeho **vrcholy**. Šest přímk, z nichž každá je incidentní se dvěma z těchto vrcholů, nazýváme **stranami** úplného čtyřrohu A, B, C, D . Tyto strany se protínají ještě v dalších třech bodech P, Q, R , jimž říkáme **diagonální vrcholy** úplného čtyřrohu; trojúhelník jimi určený se nazývá **diagonální trojúhelník** a jeho strany **diagonálními stranami** úplného čtyřrohu A, B, C, D .

Definice 6.4 (Úplný čtyřstran). Skupina čtyř přímk a, b, c, d v rovině, z nichž žádné tři neprocházejí týmž bodem, se nazývá **úplný čtyřstran** a, b, c, d . Přímk a, b, c, d se nazývají jeho **strany**. Šest bodů, z nichž každý je incidentní se dvěma z těchto stran, nazýváme **vrcholy** úplného čtyřstranu a, b, c, d . Tyto vrcholy lze spojit ještě dalšími třemi přímkami p, q, r , jimž říkáme **diagonální strany**; trojúhelník jimi určený se nazývá **diagonální trojúhelník** a jeho vrcholy pak **diagonálními vrcholy** úplného čtyřstranu a, b, c, d .

Věta 6.7. Na každé straně úplného čtyřrohu tvoří oba jeho vrcholy (viz Obr. 6.16, body A, B) a pár bodů, z nichž jeden je diagonální vrchol a druhý je incidentní s jeho protější diagonální stranou (viz Obr. 6.16, body P', P''), dvě dvojice bodů, jež se navzájem oddělují harmonicky.

Figure 6.16: Úplný čtyřroh.

Proof. Uvažujme nejprve středové promítání se středem R , potom se středem Q . Dostaneme

$$(DCPP'') = (ABPP'), \quad (DCPP'') = (BAPP'), \quad (6.13)$$

odkud plyne

$$(ABPP') = (BAPP') = \frac{1}{(ABPP')}, \quad (6.14)$$

tj.

$$(ABPP')^2 = 1. \quad (6.15)$$

Protože body P a P' jsou odděleny bodem B , musí být dvojpoměr $(ABPP')$ záporný. Výsledkem odmocnění (6.15) je tedy rovnost

$$(ABPP') = -1. \quad (6.16)$$

Tím je věta dokázána. □

Věta 6.7 nám dovoluje konstruovat harmonickou čtveřici jednoduše pomocí úplného čtyřrohu, jak jsme uvedli již na str. 63.

6.5 Cvičení: Pappova věta a princip duality

1. K větě 6.7 vyslovte větu **duální** a tu **dokažte**.
2. Dvě protější strany úplného čtyřrohu jsou harmonicky sdruženy vzhledem k příslušným diagonálním stranám. Dokažte.
3. Ke konstrukci harmonické čtveřice bodů (doplnit D , známe-li A, B, C) vymyslete konstrukci duální, tj. konstrukci harmonické čtveřice přímek.

Kapitola 7

Afinní zobrazení

Shodná zobrazení a stejnolehlost, geometrická zobrazení, která známe ze základní a střední školy, patří do skupiny *afinních zobrazení*, viz níže uvedená Def. 7.1. V této kapitole se krátce seznámíme s některými obecnými vlastnostmi afinních zobrazení. Především stojí za zmínku, že obecně se afinní zobrazení může uskutečňovat jak v rámci jednoho prostoru, tak i mezi dvěma různými afinními bodovými prostory, jejichž dimenze se nemusí shodovat. Příkladem takového afinního zobrazení z prostoru A_3 do prostoru A_2 je rovnoběžné promítání (z trojrozměrného prostoru do roviny) na Obr. 7.1.

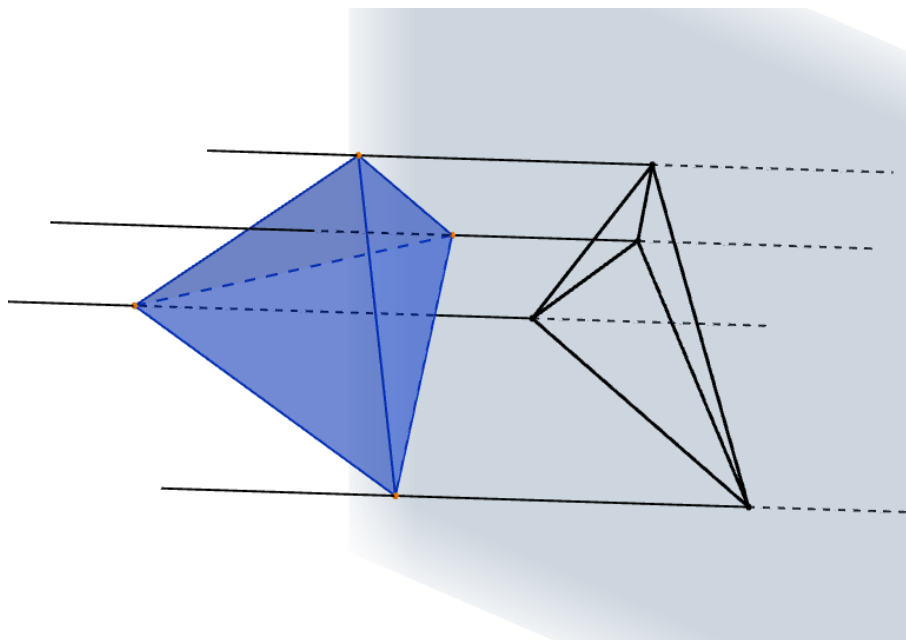


Figure 7.1: Rovnoběžný průmět čtyřstěnu do roviny; zobrazení z A_3 do A_2

Jak už bylo řečeno, ve školní praxi se setkáváme převážně s afinním zo-

brazením, které se uskutečňuje v rámci jednoho afinního bodového prostoru (většinou se jedná o rovinu, tj. o *eukleidovský prostor* E_2 , nebo o trojrozměrný prostor, tj. *eukleidovský prostor* E_3). Je-li takové afinní zobrazení afinního bodového prostoru na sebe *vzájemně jednoznačné*, nazýváme ho *afinní transformace* daného bodového prostoru, zkráceně *afinita*. Mezi tyto afinity patří právě *shodnosti v rovině* a *stejnolehlost*, které se vyučují v matematice na základní a střední škole.

Definice 7.1 (Afinní zobrazení). Zobrazení f afinního prostoru A do afinního prostoru A' se nazývá afinní, jestliže má tuto vlastnost: Leží-li tři navzájem různé body B, C, D z prostoru A na přímce, pak jejich obrazy $f(B), f(C), f(D)$ buď splývají, nebo jsou navzájem různé, leží na jedné přímce a jejich dělicí poměr se rovná odpovídajícímu dělicímu poměru jejich vzorů, tj.:

$$(f(B), f(C); f(D)) = (B, C; D).$$

Poznámka. Místo označení $f(B), f(C), f(D)$ obrazů bodů B, C, D , které je použito v definici, většinou píšeme jednodušší B', C', D' .

Afinní zobrazení se týká bodů patřících do afinních bodových prostorů. Z definice afinního bodového prostoru víme, že existuje úzký vztah mezi tímto bodovým prostorem a prostorem vektorovým, který nazýváme jeho zaměřením. Každými dvěma body bodového prostoru je určen vektor z příslušného zaměření. Není tedy ničím překvapivým, že spolu se zavedením afinního zobrazení na bodech z afinního bodového prostoru vzniká zároveň zobrazení definované na vektorech ze zaměření tohoto prostoru.

Definice 7.2 (Asociovaný homomorfismus¹ zobrazení f). Uvažujme afinní zobrazení f prostoru A do prostoru A' , např. $f : E_2 \rightarrow E_2$. Potom **asociovaným** (tj. jednoznačně přiřazeným) **homomorfismem** afinního zobrazení f rozumíme lineární zobrazení φ , které zobrazuje zaměření V prostoru A do zaměření V' prostoru A' takto:

$$\vec{u} = Y - X \Rightarrow \varphi(\vec{u}) = f(Y) - f(X), \quad (7.1)$$

kde X, Y jsou body z A , $\vec{u} \in V$; $f(X), f(Y)$ body z A' , $\varphi(\vec{u}) \in V'$.

¹ Zobrazení φ vektorového prostoru V do vektorového prostoru V' se nazývá homomorfismus (též lineární zobrazení),

Figure 7.2: Asociovaný homomorfismus φ afinního zobrazení f

Role asociovaného homomorfismu φ afinního zobrazení f je patrná z Obr. 7.2. Afinní zobrazení f se uskutečňuje mezi body, tj. zobrazuje body X, Y po řadě na body $f(X), f(Y)$. Homomorfismus φ asociovaný s f potom operuje na vektorech příslušejících dvojicím těchto bodů, tj. vektor $\vec{u} = Y - X$ zobrazuje na vektor $\varphi(\vec{u}) = f(Y) - f(X)$.

7.1 Rovnice afinního zobrazení z A_n do A_m

Zde jsou uvedeny pouze finální podoby různých forem reprezentace afinního zobrazení, kompletní odvození všech rovnic najde čtenář v příloze E, od strany 193.

Pro vztah mezi souřadnicemi vzoru $X = [x_1, x_2, \dots, x_n]$ a jeho obrazu $X' = [x'_1, x'_2, \dots, x'_m]$ platí

$$x'_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j + b_i, \quad (7.2)$$

kde $a_{ij}, b_i \in R$, $i = 1, 2, \dots, m$, $j = 1, 2, \dots, n$. Jinými formami zápisu (7.2) jsou:

(i) soustava rovnic

$$\begin{aligned} x'_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n + b_1 \\ x'_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n + b_2 \\ &\vdots \\ x'_n &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n + b_n, \end{aligned}$$

(ii) maticový zápis této soustavy

$$\begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}, \quad (7.3)$$

jestliže pro všechna $\vec{u}, \vec{v} \in V$, $k \in T$ (místo obecného tělesa T můžeme uvažovat R) platí:

- (1) $\varphi(\vec{u} + \vec{v}) = \varphi(\vec{u}) + \varphi(\vec{v})$,
- (2) $\varphi(k\vec{u}) = k\varphi(\vec{u})$.

(iii) případně maticová rovnice

$$\mathbf{X}' = A \cdot \mathbf{X} + B. \quad (7.4)$$

7.2 Rovnice homomorfismu asociovaného s afinním zobrazením

Zde je uvedena pouze finální podoba algebraické reprezentace asociovaného homomorfismu, kompletní odvození představené podoby těchto rovnic najde čtenář v příloze E, od strany 194.

Rovnice homomorfismu asociovaného s afinním zobrazením (7.2):

$$u'_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} u_j, \quad i = 1, \dots, m. \quad (7.5)$$

Jedná se tedy o soustavu rovnic analogickou s (7.2), v níž akorát v jednotlivých rovnicích chybí členy b_i . Zajímá nás vyjádření asociovaného homomorfismu maticovou rovnicí analogickou s (7.4). Vyjdeme z Obr. 7.2, akorát místo $f(X), f(Y)$ budeme pro jednoduchost používat X', Y' . Dle (7.4) platí

$$X' = A \cdot X + B, \quad Y' = A \cdot Y + B. \quad (7.6)$$

Protože X, Y, X', Y' v (7.6) jsou matice o jednom sloupci, viz (7.3), vzniknou jako jejich rozdíly *sloupcové vektory*. Proto místo $\vec{u}, \vec{u}'$ uvažujeme vektory k nim transponované $\vec{u}^T, \vec{u}'^T$. Platí

$$\vec{u}^T = Y - X, \quad \vec{u}'^T = Y' - X', \quad (7.7)$$

$$\vec{u}'^T = Y' - X' = A \cdot Y + B - A \cdot X - B = A \cdot (Y - X) = A \cdot \vec{u}^T. \quad (7.8)$$

Výsledkem úprav je potom hledaná maticová rovnice asociovaného homomorfismu

$$\vec{u}'^T = A \cdot \vec{u}^T. \quad (7.9)$$

Příklad 7.1. Afinní zobrazení f je dáno rovnicí

$$f : \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

Určete souřadnice obrazu bodu $K = [4, 1]$ v zobrazení f a souřadnice obrazu vektoru $\vec{m} = (-9, 12)$ v homomorfismu φ asociovaném s f .

7.3 Věta o určenosti afinního zobrazení

Afinní zobrazení přiřazuje bodu prostoru A_n body prostoru A'_m . Zajímá nás, kolik dvojic bodů ve vztahu *vzor–obraz* je třeba minimálně uvést, aby tím bylo afinní zobrazení určeno jednoznačně. Tedy, abychom při znalosti těchto dvojic mohli najít obraz jakéhokoliv dalšího bodu z A_n . Například pro jednoznačné určení shodnosti v rovině musíme znát alespoň tři dvojice bodů ve vztahu *vzor–obraz*, což nám říká tzv. *věta o určenosti shodnosti v rovině*. Ta je speciálním případem *věty o určenosti afinního zobrazení*, kterou si zde uvádíme.

Zde je věta uvedena bez důkazu. Ten, spolu s několika příklady, najde čtenář v příloze E, na straně 195.

Věta 7.1 (O určenosti afinního zobrazení). Mějme dva afinní bodové prostory A_n, A'_m . Nechť $M_0, M_1, M_2, \dots, M_n$ je $n + 1$ lineárně nezávislých bodů v A_n , $M'_0, M'_1, \dots, M'_n$ $n + 1$ libovolně zvolených bodů v A'_m . Pak existuje právě jedno afinní zobrazení f prostoru A_n do A'_m , které přiřazuje bodům M_j body M'_j tak, že

$$M'_j = f(M_j); \quad j = 0, 1, \dots, n.$$

Příklad 7.2. Zjistěte, zda existuje afinní zobrazení $f : A_2 \rightarrow A_3$, při kterém se body $B[1, 0]$, $C[0, 1]$, $D[2, p]$ zobrazí po řadě na body $B'[2, 1, -1]$, $C'[3, 2, 0]$, $D'[1, 0, 2]$.

Řešení v programu wxMaxima:

```
(%i1) r1:a11+b1=2; r2:a21+b2=1; r3:a31+b3=-1; r4:a12+b1=3;
      r5:a22+b2=2; r6:a32+b3=0; r7:2*a11+p*a12+b1=1;
      r8:2*a21+p*a22+b2=0; r9:2*a31+p*a32+b3=2;
```

$$(\%o1) \quad b1 + a11 = 2$$

$$(\%o2) \quad b2 + a21 = 1$$

$$(\%o3) \quad b3 + a31 = -1$$

$$(\%o4) \quad b1 + a12 = 3$$

$$(\%o5) \quad b2 + a22 = 2$$

$$(\%o6) \quad b3 + a32 = 0$$

$$(\%o7) \quad a12p + b1 + 2a11 = 1$$

$$(\%o8) \quad a22p + b2 + 2a21 = 0$$

$$(\%o9) \quad a32p + b3 + 2a31 = 2$$

```
(%i10) res:solve([r1,r2,r3,r4,r5,r6,r7,r8,r9],
                 [a11,a12,a21,a22,a31,a32,b1,b2,b3])[1];
```

$$(\%o10) \quad [a11 = -1, a12 = 0, a21 = -1, a22 = 0, a31 = -\frac{p-3}{p+1}, a32 = \frac{4}{p+1}, b1 = 3, b2 = 2, b3 = -\frac{4}{p+1}]$$

```
(%i11) ev([x1=a11*x+a12*y+b1,y1=a21*x+a22*y+b2,
           z1=a31*x+a32*y+b3],res);
```

$$(\%o11) \quad [x1 = 3 - x, y1 = 2 - x, z1 = \frac{4y}{p+1} - \frac{(p-3)x}{p+1} - \frac{4}{p+1}]$$

7.4 Skládání afinních zobrazení

Nechť f_1 je afinní zobrazení prostoru A do A' , f_2 afinní zobrazení prostoru A' do A'' . Jestliže každému bodu $X \in A$ je v f_1 přiřazen bod $f_1(X) \in A'$ a bodu $f_1(X)$ přiřazen bod $f_2[f_1(X)] \in A''$, říkáme, že zobrazení f přiřazující bodu X bod $f_2[f_1(X)]$ vzniklo složením zobrazení f_1 a f_2 . Zapisujeme $f = f_2 \cdot f_1$, $f = f_2 f_1$ nebo $f = f_2(f_1(X))$.

Věta 7.2. Složením dvou afinních zobrazení f_1, f_2 vznikne afinní zobrazení f . Zobrazení φ asociované k f vznikne složením zobrazení φ_1, φ_2 asociovaných po řadě k f_1, f_2 .

Příklad 7.3. V prostoru E_2 jsou dány dvě středové souměrnosti S_1 a S_2 . Určete zobrazení $Z = S_1 S_2$.

Příklad 7.4. V prostoru E_2 je dána středová souměrnost S a osová souměrnost O . Určete zobrazení $Z_1 = SO$ a $Z_2 = OS$.

Příklad 7.5. V prostoru E_2 je dáno posunutí T a středová souměrnost S . Určete zobrazení $Z_1 = TS$ a $Z_2 = ST$.

7.5 Afinní grupa v A_n

Věta 7.3 (Inverzní zobrazení). Uvažujme afinní zobrazení f afinního prostoru A_n na afinní prostor A'_m . Nechť je toto zobrazení navíc prosté (prostory A_n, A'_m mají stejnou dimenzi, tj. $m = n$). Pak k zobrazení f existuje zobrazení inverzní f^{-1} , které je rovněž afinním zobrazením.

Proof. Jsou-li B', C', D' tři kolineární body v prostoru A'_n a platí $(B', C', D') = \lambda$, uvažujme vzory B, C bodů B', C' při zobrazení f a na jimi určené přímce BC zvolme bod D tak, že dělicí poměr $(B, C, D) = \lambda$. Pak bod $f(D)$ leží na přímce $B'C' = f(B)f(C)$ a platí $(B', C', f(D)) = \lambda$. Protože také $(B', C', D') = \lambda$, je $f(D) = D'$ a dělicí poměr $(B', C', D') = (B, C, D)$. $\square$

Jak víme, pojmem afinita se rozumí vzájemně jednoznačné zobrazení prostoru A_n na sebe, tj. speciální případ afinního zobrazení, kdy prostory A_n a A'_m splynou.

Věta 7.4. Všechny afinity prostoru A_n tvoří při obvyklém skládání grupu, tzv. afinní grupu prostoru A_n .

Proof. Složením dvou afinit prostoru A_n vznikne opět afinita prostoru A_n . K afinitě f existuje inverzní afinita f^{-1} (viz Věta 7.3). Neutrálním prvkem je potom identita. $\square$

7.6 Souvislost mezi skládáním afinních zobrazení a násobením matic

Pro zjednodušení budme uvažovat pouze *lineární zobrazení*. To jsou afinní transformace s nulovým vektorem posunutí, tj. v rovnicích (E.15) mají $b_1 = b_2 = 0$.

Příklad 7.6. Jsou dána lineární zobrazení f, g :

$$f : \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \quad g : \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Určete matici M složeného zobrazení

$$g \cdot f : \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = M \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Řešení: Uvažujme situaci znázorněnou na Obr. 7.3. Bod $X[x, y]$ je afini-

Figure 7.3: Skládání afinit f a g v rovině

itou f zobrazen na bod $X_1[x_1, y_1]$, ten je pak afinitou g zobrazen na bod $X'[x', y']$. Tuto skutečnost můžeme zapsat rovnicemi

$$X \xrightarrow{f} X_1 : \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}; \quad X_1 \xrightarrow{g} X' : \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix},$$

odkud po dosazení za $\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$ z první rovnice do druhé dostáváme

$$X \xrightarrow{g \cdot f} X' : \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}. \quad (7.10)$$

Skládání afinit znázorněné Obr. 7.3 ale můžeme zapsat i pomocí rovnic. Platí

$$X \xrightarrow{f} X_1 : \begin{array}{l} x_1 = ax + by \\ y_1 = cx + dy \end{array}; \quad X_1 \xrightarrow{g} X' : \begin{array}{l} x' = Ax_1 + By_1 \\ y' = Cx_1 + Dy_1 \end{array}.$$

Potom po dosazení za x_1 a y_1 z první soustavy rovnic do druhé dostaneme

$$X \xrightarrow{g \cdot f} X' : \begin{aligned} x' &= A(ax + by) + B(cx + dy) = (Aa + Bc)x + (Ab + Bd)y \\ y' &= C(ax + by) + D(cx + dy) = (Ca + Dc)x + (Cb + Dd)y \end{aligned}$$

po přepsání do maticového tvaru

$$X \xrightarrow{g \cdot f} X' : \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Aa + Bc & Ab + Bd \\ Ca + Dc & Cb + Dd \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}. \quad (7.11)$$

Z porovnání (E.40) a (E.41) je zřejmé, že pro matici M složené afinity $g \cdot f$ platí:

$$M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Aa + Bc & Ab + Bd \\ Ca + Dc & Cb + Dd \end{bmatrix}. \quad (7.12)$$

Rovnost (E.42) tak přináší známý algoritmus pro násobení dvou matic.

Příklad 7.7. Řešení příkladu E.8 využijte ke zdůvodnění skutečnosti, že skládání afinit v rovině není komutativní. Zobecněte na E_n .

7.7 Cvičení: Afinní zobrazení

1. Určete rovnici afinního zobrazení $f : A_2 \rightarrow A_1$, při kterém se body $[2, 1]$, $[3, 2]$, $[0, 1]$ zobrazí po řadě na body $[2]$, $[4]$, $[10]$.
2. Pro jaké hodnoty parametrů p, q existuje afinní zobrazení $f : A_2 \rightarrow A'_2$, při kterém se body $[2, 1]$, $[-2, 3]$, $[4, 0]$ zobrazí po řadě na body $[p, 3]$, $[0, q]$, $[1, 1]$.

Kapitola 8

Afinita

Afinita je stručný název pro *afinní transformaci prostoru*, tj. případ afinního zobrazení, kdy prostory A_n a A'_m splynou v jeden prostor A_n . Jedná se tak o *vzájemně jednoznačné afinní zobrazení bodového prostoru A_n na sebe*.

Poznámka. Vzájemně jednoznačným zobrazením rozumíme zobrazení, které je zároveň prosté a na množinu.

Afinita má stejné analytické vyjádření jako obecné afinní zobrazení, viz (7.2), (7.3) nebo (7.4). Vzhledem k tomu, že se jedná o vzájemně jednoznačné zobrazení, je akorát matice afinity čtvercová a regulární. Afinitu tak lze zapsat maticovou rovnicí

$$\mathbf{X}' = A \cdot \mathbf{X} + B, \quad (8.1)$$

kde A je regulární čtvercová matice n -tého řádu a X, B a X' jsou matice typu $(n, 1)$. Jako příklady si uveďme afinity prostorů A_2 a A_3 .

Každé afinní zobrazení f afinní roviny A_2 do sebe je vzhledem k libovolně zvolené lineární soustavě souřadnic dáno rovnicemi:

$$\begin{aligned} f : x' &= a_{11}x + a_{12}y + b_1 \\ y' &= a_{21}x + a_{22}y + b_2 \end{aligned} \quad (8.2)$$

které můžeme zapsat jednou maticovou rovnicí ve tvaru

$$f : \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}. \quad (8.3)$$

Každé afinní zobrazení f v prostoru A_3 můžeme zapsat soustavou rovnic

$$\begin{aligned} g : x'_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + b_1 \\ x'_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + b_2, \\ x'_3 &= a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + b_3 \end{aligned} \quad (8.4)$$

nebo jednou maticovou rovnicí

$$g : \begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}. \quad (8.5)$$

Příklad 8.1. Zdůvodněte, proč ze skutečnosti, že afinita je vzájemně jednoznačným zobrazením, vyplývá, že její matice je regulární.

8.1 Afinita v rovině

Definice 8.1. Vzájemně jednoznačné afinní zobrazení afinního prostoru E_2 na sebe nazýváme afinitou prostoru E_2 nebo afinní transformací prostoru E_2 .

Poznámka. Množina afinit v rovině spolu s operací skládání geometrických zobrazení tvoří grupu, tzv. afinní grupu roviny. Obecné formulaci této skutečnosti je věnována věta E.7 na str. 203.

8.2 Rovnice afinity v rovině

Každé afinní zobrazení f v rovině E_2 , které bodu $X = [x, y]$ přiřazuje obraz $X' = [x', y']$, je možné zapsat rovnicemi

$$\begin{aligned} f : x' &= a_{11}x + a_{12}y + b_1 \\ y' &= a_{21}x + a_{22}y + b_2 \end{aligned} \quad (8.6)$$

a naopak, každé zobrazení v rovině, které je dáno soustavou rovnic (E.14), je afinitou v rovině. Soustavu (E.14) můžeme zapsat také pomocí matic

$$\begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}. \quad (8.7)$$

Potom řekneme, že afinitou je každé zobrazení, které lze zapsat maticovou rovnicí

$$\mathbf{X}' = A \cdot \mathbf{X} + B,$$

kde $X' = \begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ a $B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$.

Kompletní odvození výše uvedených vztahů je uvedeno v příloze E, na straně 197.

8.3 Věta o určenosti afinity v rovině

Věta 8.1 (O určenosti afinity v rovině). Nechť K, L, M a K', L', M' jsou dvě skupiny nekolineárních bodů v rovině. Pak existuje jediná afinita f této roviny, která body K, L, M zobrazuje v daném pořadí na body K', L', M' .

Věta je zde uvedena bez důkazu. Ten najde čtenář v příloze E, na straně 199. Význam věty je ilustrován následujícím Obr. 8.1.

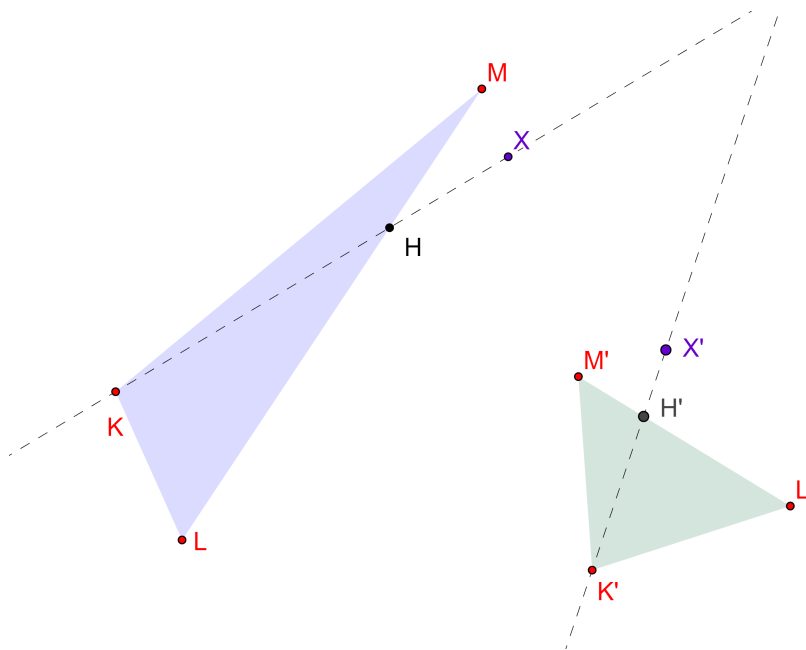


Figure 8.1: Věta o určenosti afinity v rovině

Příklad 8.2. Určete afinitu v rovině A_2 , ve které při dané soustavě souřadné se bod $B = [0, 0]$ zobrazuje do bodu $B' = [1, 0]$, bod $C = [1, 0]$ do bodu $C' = [0, 1]$ a bod $D = [0, 1]$ do bodu $D' = [0, 0]$.

8.4 Modul afinity

Protože afinita prostoru A_n je zobrazení vzájemně jednoznačné, pro determinant afinity dané rovnicemi (E.38) platí

$$\delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Tento determinant se nazývá **modulem afinity**. Dá se ukázat, že modul afinity nezávisí na volbě báze uvažovaného prostoru.

Zde se zaměříme pouze na vlastnost modulu afinity, která je metrická, tj. závislá na existenci skalárního součinu. Proto se v dalším omezíme ve svých úvahách na eukleidovské prostory, přesněji na E_3 a E_2 .

Příklad 8.3. Určete afinitu v A_2 , je-li obrazem bodu $B = [6; -2]$ bod $B' = [1; 1]$, obrazem vektoru $\vec{u} = (2; 1)$ vektor $\vec{u}' = (4; 2)$ a vektoru $\vec{v} = (-1; 2)$ vektor $\vec{v}' = (-3; 6)$. Porovnejte obsahy trojúhelníků BCD a $B'C'D'$, kde $C = B + \vec{u}$, $D = B + \vec{v}$ a $C' = B' + \vec{u}'$, $D' = B' + \vec{v}'$.

Souvislost modulu afinity s mírou uplatněnou v daných prostorech na dané útvary popisuje následující věta.

Věta 8.2. Nechť f je afinita v prostoru E_3 (resp. E_2), která má modul δ . Nechť U je měřitelný útvar v E_3 (resp. E_2), který má objem V (resp. obsah V). Nechť obrazem útvaru U v afinitě f je útvar U' , který má objem V' (resp. obsah V'). Potom platí

$$V' = |\delta| \cdot V. \quad (8.8)$$

Proof. Míra měřitelných útvarů v E_3 (resp. E_2) je definována pomocí rovnoběžnostěnů (resp. rovnoběžníků). Proto se v důkazu omezíme na afinní zobrazení rovnoběžnostěnů v E_3 a rovnoběžníků v E_2 . Nechť v E_3 je rovnoběžnostěn určen trojicí nezávislých vektorů $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$, které mají ve zvolené bázi souřadnice $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$, $\vec{w} = (w_1, w_2, w_3)$. Obrazy těchto vektorů v zobrazení φ asociovaném k afinitě f označme $\vec{u}' = \varphi(\vec{u})$, $\vec{v}' = \varphi(\vec{v})$, $\vec{w}' = \varphi(\vec{w})$ a jejich souřadnice $\vec{u}' = (u'_1, u'_2, u'_3)$,

$\vec{v}' = (v'_1, v'_2, v'_3)$, $\vec{w}' = (w'_1, w'_2, w'_3)$. V afinitě f a zobrazení φ platí dle vztahu (E.39)

$$u'_i = \sum_{j=1}^3 a_{ij}u_j, \quad v'_i = \sum_{j=1}^3 a_{ij}v_j, \quad w'_i = \sum_{j=1}^3 a_{ij}w_j; \quad i = 1, 2, 3. \quad (8.9)$$

Objem V' zobrazeného rovnoběžnostěnu U' určíme známým vztahem smíšeného součinu, stejně tak objem V rovnoběžnostěnu U :

$$V' = \begin{vmatrix} u'_1 & u'_2 & u'_3 \\ v'_1 & v'_2 & v'_3 \\ w'_1 & w'_2 & w'_3 \end{vmatrix}, \quad V = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}. \quad (8.10)$$

Dosazením (8.9) dostaneme

$$V' = \begin{vmatrix} \sum_{j=1}^3 a_{1j}u_j & \sum_{j=1}^3 a_{2j}u_j & \sum_{j=1}^3 a_{3j}u_j \\ \sum_{j=1}^3 a_{1j}v_j & \sum_{j=1}^3 a_{2j}v_j & \sum_{j=1}^3 a_{3j}v_j \\ \sum_{j=1}^3 a_{1j}w_j & \sum_{j=1}^3 a_{2j}w_j & \sum_{j=1}^3 a_{3j}w_j \end{vmatrix}, \quad (8.11)$$

což lze zapsat součinem

$$V' = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} \quad (8.12)$$

a tedy

$$V' = \delta \cdot V. \quad (8.13)$$

Pokud je $\delta < 0$, pak lze znaménko minus vytknout, tj. $V' = -\delta \cdot (-V)$. Ve druhém determinantu pak zaměníme pořadí sousedních řádků, např. prvního a druhého. Pro obsahy vzoru a obrazu měřitelného útvaru v E_2 zřejmě stačí, uvážíme-li obsah V libovolně zvoleného rovnoběžníka určeného lineárně nezávislými body M, N, P a jeho obrazu v dané afinitě určeného body M', N', P' . $\square$

8.5 Afinita přímá a nepřímá, ekviafinita

Definice 8.2. Je-li modul afinity kladný, nazývá se *afinita přímá*. Afinita se záporným modulem se nazývá *nepřímá*. Afinita, jejíž modul se rovná v absolutní hodnotě jedné, se nazývá ekviafinní afinita, stručně *ekviafinita*.

Poznámka. Je zřejmé, že složením dvou ekviafinit vznikne zase ekviafinita. Protože ostatní vlastnosti se “dědí” z grupy afinit v daném prostoru (pohybujeme se v rovině), je možné říci, že ekviafinity tvoří grupu, hovoříme o *grupě ekviafinit*.

Příklad 8.4. Určete rovnice a modul afinity $f : E_3 \rightarrow E_3$, v níž se body $K[0, 0, 0]$, $L[1, 4, 0]$, $M[-1, 0, 6]$, $N[4, 5, 8]$ zobrazí na body $K'[1, 1, 1]$, $L'[-2, 9, 6]$, $M'[0, -5, 12]$, $N'[0, 3, 26]$. Rozhodněte, zda se jedná o afinitu přímkou či nepřímou a zda je to ekviafinita.

Řešení v programu wxMaxima:

```
(%i25) r1:b1=1; r2:b2=1; r3:b3=1; r4:a11+4*a12+b1=-2;
      r5:a21+4*a22+b2=9; r6:a31+4*a32+b3=6; r7:-a11+6*a13+b1=0;
      r8:-a21+6*a23+b2=-5; r9:-a31+6*a33+b3=12;
      r10:4*a11+5*a12+8*a13+b1=0; r11:4*a21+5*a22+8*a23+b2=3;
      r12:4*a31+5*a32+8*a33+b3=26;
```

```
(%o25) b1 = 1
```

```
(%o26) b2 = 1
```

```
(%o27) b3 = 1
```

```
(%o28) b1 + 4 a12 + a11 = -2
```

```
(%o29) b2 + 4 a22 + a21 = 9
```

```
(%o30) b3 + 4 a32 + a31 = 6
```

```
(%o31) b1 + 6 a13 - a11 = 0
```

```
(%o32) b2 + 6 a23 - a21 = -5
```

```
(%o33) b3 + 6 a33 - a31 = 12
```

```
(%o34) b1 + 8 a13 + 5 a12 + 4 a11 = 0
```

```
(%o35) b2 + 8 a23 + 5 a22 + 4 a21 = 3
```

```
(%o36) b3 + 8 a33 + 5 a32 + 4 a31 = 26
```

```
(%i37) res:solve([r1,r2,r3,r4,r5,r6,r7,r8,r9,r10,r11,r12],
      [a11,a12,a13,a21,a22,a23,a31,a32,a33,b1,b2,b3])[1];
```

```
(%o37) [a11 = 1, a12 = -1, a13 = 0, a21 = 0, a22 = 2, a23 = -1, a31 =
1, a32 = 1, a33 = 2, b1 = 1, b2 = 1, b3 = 1]
```

```
(%i38) ev([x1=a11*x+a12*y+a13*z+b1,y1=a21*x+a22*y+a23*z+b2,
      z1=a31*x+a32*y+a33*z+b3],res);
```

```
(%o38) [x1 = -y + x + 1, y1 = -z + 2 y + 1, z1 = 2 z + y + x + 1]
```

```
(%i40) A:ev(matrix([a11,a12,a13],[a21,a22,a23],[a31,a32,a33]),res);
```

```
(%o40) 
$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

```

```
(%i42) determinant(A);
```

```
(%o42) 6
```

8.6 Cvičení: Afinity

1. Uveďte maticové zápisy následujících transformací:

- a) středová souměrnost se středem v počátku,
- b) středová souměrnost se středem v bodě $[5, 10]$,
- c) osová souměrnost podle souřadnicové osy x ,
- d) stejnolehlost se středem v počátku soustavy souřadnic a s koeficientem $\kappa = 2$,
- e) stejnolehlost se středem v počátku soustavy souřadnic a s koeficientem $\kappa = \frac{-1}{2}$.

Využijte applet na GeoGebraTube: www.geogebra.org/m/UcqvE9uT

Kapitola 9

Klasifikace afinit

Samodružnými body a směry zobrazení rozumíme body a směry, které se v zobrazují samy na sebe. Například otočení $\mathcal{R}(S)$ má jediný samodružný bod, střed S , a nemá žádný samodružný směr. Osová souměrnost $\mathcal{O}(o)$ má celou přímku samodružných bodů, osu o , a dva samodružné směry, jeden rovnoběžný s osou o , druhý kolmý na o (přímky těchto směrů se zobrazí na přímky s nimi rovnoběžné nebo totožné, tj. zobrazí se na přímky se stejnými směrovými vektory). Stejnolehlost $\mathcal{H}(S, \kappa)$ má jediný samodružný bod, střed S , ale má všechny směry samodružné (tj. každá přímka se zobrazí na přímku s ní rovnoběžnou).

Samodružné prvky má smysl uvažovat jenom v případě, že se uvažovaný bodový prostor (v případě směrů pak jemu příslušející vektorový prostor, tj. zaměření) zobrazuje do sebe. Nadále se omezíme pouze na afinity (ty jsou dokonce zobrazeními uvažovaného prostoru na sebe) .

9.1 Samodružné body

Samodružným bodem (afinity) zobrazení rozumíme bod, který se zobrazí sám na sebe, tj. pro jeho souřadnice platí $X' = X$. Po dosazení do maticové rovnice afinity $\mathbf{X}' = A \cdot \mathbf{X} + B$ tak dostaneme

$$X = A \cdot X + B,$$

po úpravě

$$(I - A) \cdot X = B, \tag{9.1}$$

kde I je jednotková matice stejného řádu jako A . Za rovnicí (9.1) se skrývá nehomogenní soustava n rovnic o n neznámých $x_1, x_2, \dots, x_n$, souřadnicích hledaných samodružných bodů. Z teorie řešitelnosti soustav lineárních

rovníc víme, že řešením může být jedna, žádná nebo nekonečně mnoho uspořádaných n -tic $[x_1, x_2, \dots, x_n]$, tj. jeden, žádný nebo nekonečně mnoho samodružných bodů. Množina řešení, tj. množina samodružných bodů uvažované afinity, má přitom charakter afinního bodového podprostoru (bod, přímka, rovina, ...).

Výpočet souřadnic samodružného bodu si ilustrujeme na příkladu afinity v rovině. Pokud do rovnic (E.14) dosadíme $x' = x$ a $y' = y$ je zřejmé, že souřadnice samodružných bodů příslušné afinity jsou řešením soustavy rovnic

$$\begin{aligned}(1 - a_{11})x_1 - a_{12}x_2 &= b_1 \\ -a_{21}x_1 + (1 - a_{22})x_2 &= b_2.\end{aligned}\tag{9.2}$$

Příklad 9.1. Určete samodružné body afinity dané rovnicemi

$$\begin{aligned}x' &= -x + 4, \\ y' &= -y - 6.\end{aligned}$$

Řešení: Dosazením x' za x a y' za y do daných rovnic dostaneme soustavu

$$\begin{aligned}2x &= 4, \\ 2y &= -6,\end{aligned}$$

která má jediné řešení $[x, y] = [2, -3]$. Daná afinita má tedy jediný samodružný bod $S = [2, -3]$.

Poznámka. Protože $A^T \cdot A = I$, kde I je jednotková matice, jedná se o shodnost. V úvahu tak připadá otočení nebo středová souměrnost. O tom, které z nich to je, rozhodnou samodružné směry.

Příklad 9.2. Určete samodružné body afinity dané rovnicemi

$$\begin{aligned}x' &= x, \\ y' &= -y.\end{aligned}$$

Řešení: Dosazením x' za x a y' za y do daných rovnic dostaneme soustavu

$$\begin{aligned}0x &= 0, \\ 2y &= 0,\end{aligned}$$

která má tentokrát nekonečně mnoho řešení. Jsou jimi všechny uspořádané dvojice ve tvaru $[x, 0]$; $x \in R$. Jedná se tedy o afinitu jejíž všechny samodružné body leží v přímce o rovnici $y = 0$.

Poznámka. Protože opět platí $A^T \cdot A = I$, je to shodnost. V úvahu teď připadá jediná možnost, osová souměrnost s osou v souřadnicové ose x .

9.2 Samodružné směry

Samodružným směrem rozumíme směr, který se v (afinním) zobrazení zobrazí sám na sebe. Pro vyjádření směru používáme vektor, např. $\vec{u}$, říkáme mu reprezentant tohoto směru (takovým reprezentantem pak může být každý jeho násobek). Má-li být směr určený vektorem $\vec{u}$ samodružný, musí pro vektor $\vec{u}'$, který je obrazem $\vec{u}$, platit $\vec{u}' = \lambda \vec{u}$, kde $\lambda \in R$.

Poznámka. Směrem rozumíme množinu všech vektorů $k\vec{u}$; $k \in R$ vektoru $\vec{u} \neq \vec{o}$, tj. jednorozměrný vektorový prostor $[\vec{u}]$. Vektor $\vec{u}$ nazýváme reprezentantem tohoto směru. Pokud chceme zohlednit orientaci, použijeme orientovaný směr, tj. množinu všech vektorů $k\vec{u}$, kde ale $k \in \langle 0, \infty \rangle$.

Víme, že zobrazení mezi vektory z vektorového prostoru, který je zaměřením afinního bodového prostoru, v němž operuje uvažovaná afinita (obecně však toto zobrazení probíhá mezi různými zaměřenými různými bodovými prostory), zajišťuje tzv. asociovaný homomorfismus (též lineární zobrazení), viz definice 7.2 na str. 7.2¹.

Po dosazení do maticové rovnice asociovaného homomorfismu $\vec{u}' = A \cdot \vec{u}$ tak dostaneme

$$\lambda \vec{u} = A \cdot \vec{u},$$

po úpravě

$$(\lambda I - A) \cdot \vec{u} = \vec{o}, \quad (9.4)$$

kde I je jednotková matice stejného řádu jako A a vektor $\vec{u}$ je sloupcový (aby bylo definováno násobení $A \cdot \vec{u}$).

¹Zobrazení φ vektorového prostoru V do vektorového prostoru V' se nazývá homomorfismus (lineární zobrazení), jestliže pro všechna $\vec{u}, \vec{v} \in V$, $k \in T$ (místo obecného tělesa T můžeme uvažovat R) platí:

$$\begin{aligned} (1) \quad \varphi(\vec{u} + \vec{v}) &= \varphi(\vec{u}) + \varphi(\vec{v}), \\ (2) \quad \varphi(k\vec{u}) &= k\varphi(\vec{u}). \end{aligned}$$

Uvažujme afinitu f prostoru E_n . Potom asociovaným (tj. jednoznačně přiřazeným) homomorfismem afinity f rozumíme lineární zobrazení φ , které zobrazuje zaměření V_n prostoru E_n do sebe takto:

$$\vec{u} = Y - X \Rightarrow \varphi(\vec{u}) = f(Y) - f(X), \quad (9.3)$$

kde X, Y a $f(X), f(Y)$ jsou body z E_2 , $\vec{u}, \varphi(\vec{u}) \in V_2$.

9.2.1 Charakteristická rovnice, vlastní číslo, vlastní vektor

Za rovnicí (9.4) se skrývá homogenní soustava n rovnic o n neznámých $u_1, u_2, \dots, u_n$, souřadnicích reprezentanta hledaného samodružného směru. Z teorie řešitelnosti homogenních soustav lineárních rovnic víme, že řešením může být buď jenom nulový vektor $\vec{0}$, hovoříme o triviálním řešení, nebo je řešením nekonečně mnoho vektorů, které tvoří vektorový podprostor. Nenulové vektory z tohoto prostoru řešení nazýváme netriviální řešení. Protože nulový vektor neurčuje žádný směr, zajímají nás při vyšetřování samodružných směrů pouze netriviální řešení homogenní soustavy (9.4). Homogenní soustava lineárních rovnic má i netriviální řešení (triviální má vždycky) právě tehdy, když je matice soustavy singulární, tj. její determinant je roven nule. Afinita $X' = A \cdot X + B$ má proto samodružné směry právě tehdy, když

$$|\lambda I - A| = 0. \quad (9.5)$$

Rovnici (9.5) říkáme charakteristická rovnice příslušného homomorfismu φ . Jedná se o algebraickou rovnici n -tého stupně pro neznámou λ . Každé číslo λ , které je řešením této charakteristické rovnice, pak nazýváme vlastní číslo homomorfismu φ . Každý vektor $\vec{u}$, pro který platí $\vec{u}' = \varphi(\vec{u}) = \lambda \vec{u}$, nazýváme vlastním vektorem homomorfismu φ (příslušnou hodnotu λ pak nazýváme vlastní číslo homomorfismu φ , odpovídající vektoru $\vec{u}$). Místo vlastní vektor a vlastní číslo se také používají termíny charakteristický vektor a charakteristické číslo.

Výpočet samodružných směrů si ilustrujeme na příkladu afinity v rovině. Asociovaný homomorfismus φ afinity f je v tomto případě dán soustavou

$$\begin{aligned} \varphi : u'_1 &= a_{11}u_1 + a_{12}u_2 \\ u'_2 &= a_{21}u_1 + a_{22}u_2, \end{aligned}$$

maticově pak

$$\varphi : \begin{bmatrix} u'_1 \\ u'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix},$$

což lze zapsat ve tvaru

$$\varphi : \vec{u}' = A \cdot \vec{u}. \quad (9.6)$$

Samodružný směr afinity (tj. vektory těchto směrů, pro které platí $\vec{u}' = \lambda \vec{u}$)

jsou potom netriviálním řešením homogenní soustavy rovnic

$$\begin{aligned}(\lambda - a_{11})u_1 - a_{12}u_2 &= 0 \\ -a_{21}u_1 + (\lambda - a_{22})u_2 &= 0.\end{aligned}\tag{9.7}$$

Homogenní soustava n lineárních rovnic o n neznámých má netriviální řešení právě tehdy, když je determinant soustavy roven nule. Soustava (9.6) má tedy nekonečně mnoho řešení právě tehdy, když platí rovnost

$$\begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} \end{vmatrix} = 0.\tag{9.8}$$

Postup určení samodružných směrů afinity v rovině si nyní budeme ilustrovat na zobrazeních použitých v příkladech 9.1 a 9.2.

Příklad 9.3. Určete samodružné směry afinity dané rovnicemi

$$\begin{aligned}x' &= -x + 4, \\ y' &= -y - 6.\end{aligned}$$

Řešení: Řešíme homogenní soustavu

$$\begin{aligned}(\lambda + 1)u_1 &= 0, \\ (\lambda + 1)u_2 &= 0,\end{aligned}$$

které přísluší charakteristická rovnice

$$\begin{vmatrix} (\lambda + 1) & 0 \\ 0 & (\lambda + 1) \end{vmatrix} = 0,$$

po úpravě ve tvaru

$$(\lambda + 1)^2 = 0.$$

Jejím jediným řešením je vlastní číslo $\lambda = -1$, které dosadíme do příslušné homogenní soustavy, abychom dostali soustavu rovnic

$$\begin{aligned}0u_1 &= 0, \\ 0u_2 &= 0,\end{aligned}$$

jejímž řešením je každý vektor $\vec{v} = (u_1, u_2) \in R \times R$.

Vyšetřovaná afinita má tedy všechny směry samodružné.

Poznámka. Vzhledem k tomu, že z řešení příkladu 9.1 víme, že daná afinita je shodností a má jediný samodružný bod $S = [2, -3]$, po zjištění, že má všechny směry samodružné, je možno učinit závěr, že se jedná o středovou souměrnost se středem S .

Příklad 9.4. Určete samodružné směry afinity dané rovnicemi

$$\begin{aligned}x' &= x, \\ y' &= -y.\end{aligned}$$

Řešení: Řešíme homogenní soustavu

$$\begin{aligned}(\lambda - 1)u_1 &= 0, \\ (\lambda + 1)u_2 &= 0,\end{aligned}$$

které přísluší charakteristická rovnice

$$\begin{vmatrix} (\lambda - 1) & 0 \\ 0 & (\lambda + 1) \end{vmatrix} = 0,$$

po úpravě ve tvaru

$$(\lambda - 1)(\lambda + 1) = 0.$$

Charakteristická rovnice má dva kořeny (vlastní čísla) $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1$, které postupně dosadíme do příslušné homogenní soustavy a vypočítáme souřadnice příslušných vlastních vektorů daného zobrazení.

Pro $\lambda_1 = 1$ dostáváme soustavu

$$\begin{aligned}0u_1 &= 0, \\ 2u_2 &= 0,\end{aligned}$$

jejímž řešením je každý vektor $\vec{v}_1 = (u_1, 0) \in R^2$. Samodružný směr určený těmito vektory je rovnoběžný s osou x (tj. s osou souměrnosti).

Pro $\lambda_2 = -1$ dostáváme soustavu

$$\begin{aligned}-2u_1 &= 0, \\ 0u_2 &= 0,\end{aligned}$$

jejímž řešením je každý vektor $\vec{v}_2 = (0, u_2) \in R^2$. Samodružný směr určený těmito vektory je kolmý k ose x (tj. k ose souměrnosti).

Daná afinita má tedy dva na sebe kolmé samodružné směry.

Poznámka. Zjištění, že daná afinita má dva na sebe kolmé samodružné směry, přitom jeden rovnoběžný s přímkou samodružných bodů a druhý na ni kolmý, je v souladu s poznatkem z řešení příkladu 9.2, že uvažovaná afinita je osovou souměrností.

Příklad 9.5. Zjistěte, zda existuje shodnost E_2 , při které se bod $K = [10; 0]$ zobrazí na počátek $K' = [0; 0]$ a bod $L = [25; 20]$ na bod $L' = [0; 25]$. V kladném případě napište rovnice tohoto zobrazení a najděte jeho samodružné body a směry.

Řešení: Začneme tím, že si ověříme, zda zadané body splňují definici shodného zobrazení, tj. zda $|K'L'| = |KL|$. V případě této úlohy zvládneme ověření provést z paměti. Výsledkem je, že zadání vyhovuje definici shodnosti.

Další postup řešení úlohy si ilustrujeme pomocí zápisu v programu wxMaxima

(viz <http://andrejv.github.io/wxmaxima/>)

```
(%i1)  A:matrix([a11,a12],[a21,a22]); B:matrix([b1],[b2]);
```

```
(%o1)   $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ 
```

```
(%o2)   $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ 
```

Rovnici $X' = A \cdot X + B$ vyjádříme ve tvaru $A \cdot X + B - X' = O$ a dosadíme souřadnice daných dvojic bodů K, K' a L, L' . Potom zapíšeme podmínku (10.11) pro to, aby bylo afinní zobrazení shodností ve tvaru $A^T \cdot A - I = O$. (V programu wxMaxima zapíšeme jenom levé strany uvedených rovnic. Jednotkovou matici I druhého stupně zadáme ve wxMaximě příkazem `ident(2)`.)

```
(%i3)  s1:A.[10,0]+B-[0,0]; s2:A.[25,20]+B-[0,25];
        s3:transpose(A).A-ident(2);
```

```
(%o3)   $\begin{pmatrix} b_1 + 10 a_{11} \\ b_2 + 10 a_{21} \end{pmatrix}$ 
```

```
(%o4)   $\begin{pmatrix} b_1 + 20 a_{12} + 25 a_{11} \\ b_2 + 20 a_{22} + 25 a_{21} - 25 \end{pmatrix}$ 
```

```
(%o5)   $\begin{pmatrix} a_{21}^2 + a_{11}^2 - 1 & a_{21} a_{22} + a_{11} a_{12} \\ a_{21} a_{22} + a_{11} a_{12} & a_{22}^2 + a_{12}^2 - 1 \end{pmatrix}$ 
```

Všechny prvky výše uvedených matic musí být rovny nule (Proč?). Dostaneme tak soustavu sedmi rovnic pro šest neznámých $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, b_1, b_2$.

```
(%i6)  rov:[s1[1,1],s1[2,1],s2[1,1],s2[2,1],s3[1,1],s3[1,2],s3[2,2]];
```

(%o6) $[b1 + 10 a11, b2 + 10 a21, b1 + 20 a12 + 25 a11, b2 + 20 a22 + 25 a21 - 25, a21^2 + a11^2 - 1, a21 a22 + a11 a12, a22^2 + a12^2 - 1]$

Tato soustava má následující dvě řešení (nejedná se o soustavu lineárních rovnic, proto může mít dvě řešení):

(%i7) `res:solve(rov,[a11,a12,a21,a22,b1,b2]);`

(%o7) $[[a11 = \frac{4}{5}, a12 = -\frac{3}{5}, a21 = \frac{3}{5}, a22 = \frac{4}{5}, b1 = -8, b2 = -6],$

$[a11 = -\frac{4}{5}, a12 = \frac{3}{5}, a21 = \frac{3}{5}, a22 = \frac{4}{5}, b1 = 8, b2 = -6]]$

Dvěma řešeními odpovídají dvě různé shodnosti. Zjistili jsme tedy, že existují dvě shodnosti, které převádějí body K, L na body K', L' (Což se, vzhledem ke *větě o určenosti shodného (afinního) zobrazení* dalo čekat. Proč?). Pokračujeme v řešení úlohy pro každou z těchto shodností zvlášť. Pro zápis rovnic uvažovaných shodností si nejprve připravíme matici `RovTr`, jejímiž řádky jsou rovnice afinity v obecném tvaru (tato matice není nutnou součástí postupu řešení, jedná se jenom o usnadnění vizuální prezentace rovnic v programu).

(%i8) `RovTr:matrix([x1=a11*x+a12*y+b1],[y1=a21*x+a22*y+b2]);`

(%o8)
$$\begin{pmatrix} x1 = a12 y + a11 x + b1 \\ y1 = a22 y + a21 x + b2 \end{pmatrix}$$

Řešení č. 1:

(%i9) `A1:ev(A,res[1]); B1:ev(B,res[1]);`

(%o9)
$$\begin{pmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix}$$

(%o10)
$$\begin{pmatrix} -8 \\ -6 \end{pmatrix}$$

Príslušná shodnost má rovnice

(%i11) `R1:ev(RovTr,res[1]);`

(%o11)
$$\begin{pmatrix} x1 = -\frac{3y}{5} + \frac{4x}{5} - 8 \\ y1 = \frac{4y}{5} + \frac{3x}{5} - 6 \end{pmatrix}$$

Samodružný bod je bod, pro který platí $X' = X$. Pro výpočet souřadnic samodružných bodů daného zobrazení tak do rovnice $X' = A \cdot X + B$ (pro

snazší zpracování programem přepsané do tvaru $A \cdot X + B - X = 0$) za X' dosadíme X a řešíme odpovídající soustavu dvou rovnic s neznámými x, y .

```
(%i12) RovSB1:A1.[x,y]+B1-[x,y]; solve([RovSB1[1,1],RovSB1[2,1]],[x,y]);
```

```
(%o12) 
$$\begin{pmatrix} -\frac{3y}{5} - \frac{x}{5} - 8 \\ -\frac{y}{5} + \frac{3x}{5} - 6 \end{pmatrix}$$

```

```
(%o13) 
$$[[x = 5, y = -15]]$$

```

Protože tato soustava má jediné řešení, má daná shodnost jediný samodružný bod $S = [5, -15]$.

Pro vyšetření samodružných směrů daného zobrazení řešíme charakteristickou rovnici (9.8)

```
(%i14) CharM1:A1-%lambda*ident(2);
CharR1:expand(determinant(CharM1))=0;
solve(CharR1,%lambda);
```

```
(%o14) 
$$\begin{pmatrix} \frac{4}{5} - \lambda & -\frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{4}{5} - \lambda \end{pmatrix}$$

```

```
(%o15) 
$$\lambda^2 - \frac{8\lambda}{5} + 1 = 0$$

```

```
(%o16) 
$$[\lambda = -\frac{3i-4}{5}, \lambda = \frac{3i+4}{5}]$$

```

Charakteristická rovnice nemá řešení v oboru reálných čísel. Daná shodnost tak nemá žádný samodružný směr.

Protože uvažované zobrazení má právě jeden samodružný bod a nemá žádný samodružný směr, jedná se o **otočení** se středem $S = [5, -15]$.

Poznámka. K úplné identifikaci daného zobrazení nám zbývá určit úhel otočení α . Jak to uděláme?

Řešení č. 2:

Postupujeme analogicky s řešením č. 1.

```
(%i17) A2:ev(A,res[2]); B2:ev(B,res[2]);
```

```
(%o17) 
$$\begin{pmatrix} -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix}$$

```

```
(%o18) 
$$\begin{pmatrix} 8 \\ -6 \end{pmatrix}$$

```

Rovnice zobrazení

```
(%i19) R2:ev(RovTr,res[2]);
```

$$(\%o19) \begin{pmatrix} x1 = \frac{3y}{5} - \frac{4x}{5} + 8 \\ y1 = \frac{4y}{5} + \frac{3x}{5} - 6 \end{pmatrix}$$

Samodružné body:

```
(%i20) RovSB2:A2.[x,y]+B2-[x,y]; solve([RovSB2[1,1],RovSB2[2,1]], [x,y])
```

$$(\%o20) \begin{pmatrix} \frac{3y}{5} - \frac{9x}{5} + 8 \\ -\frac{y}{5} + \frac{3x}{5} - 6 \end{pmatrix}$$

$$(\%o21) []$$

Toto zobrazení tedy nemá žádný samodružný bod.

Samodružné směry:

```
(%i22) CharM2:A2-%lambda*ident(2);
CharR2:expand(determinant(CharM2))=0;
solve(CharR2,%lambda);
```

$$(\%o22) \begin{pmatrix} -\lambda - \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{4}{5} - \lambda \end{pmatrix}$$

$$(\%o23) \lambda^2 - 1 = 0$$

$$(\%o24) [\lambda = -1, \lambda = 1]$$

```
(%i25) RovSS2:A2.[u,v]-[%lambda*u,%lambda*v];
```

$$(\%o25) \begin{pmatrix} \frac{3v}{5} - \lambda u - \frac{4u}{5} \\ -\lambda v + \frac{4v}{5} + \frac{3u}{5} \end{pmatrix}$$

```
(%i26) RovSS21:ev(RovSS2,%lambda=-1);
solve([RovSS21[1,1],RovSS21[2,1]], [u,v]);
```

$$(\%o26) \begin{pmatrix} \frac{3v}{5} + \frac{u}{5} \\ \frac{9v}{5} + \frac{3u}{5} \end{pmatrix} \text{ solve : dependent equations eliminated : (2)}$$

$$(\%o27) [[u = -3 \%r1, v = \%r1]]$$

```
(%i28) RovSS22:ev(RovSS2,%lambda=1);
solve([RovSS22[1,1],RovSS22[2,1]], [u,v]);
```

$$(\%o28) \begin{pmatrix} \frac{3v}{5} - \frac{9u}{5} \\ \frac{3u}{5} - \frac{v}{5} \end{pmatrix} \text{ solve : dependent equations eliminated : (2)}$$

$$(\%)o29) \left[\left[u = \frac{\%r2}{3}, v = \%r2 \right] \right]$$

Zobrazení má dva na sebe kolmé samodružné směry $\vec{u} = (-3, 1)$, $\vec{v} = (1, 3)$. Jedná se o posunuté zrcadlení, viz str. 114.

Poznámka. K úplné identifikaci výsledného zobrazení nám zbývá určit osu o a vektor posunutí $\vec{t}$. Jak to uděláme?

9.3 Homotetie, grupa homotetií

Definice 9.1 (Homotetie). Každé afinní zobrazení, které má všechny směry samodružné, se nazývá homotetické zobrazení, též homotetie.

Poznámka. Pro homotetie se používá také označení dilatace.

Každá homotetie je stejnolehlost, posunutí nebo identita (tj. posunutí o nulový vektor). V kapitole 13 věnované stejnolehlosti se dozvíme, že množina těchto tří shodností spolu s operací skládání tvoří grupu, tzv. grupu homotetií.

Poznámka. Z výše uvedené existence grupy homotetií vyplývá, že složením dvou zobrazení z množiny homotetií, tj. z množiny {stejnolehlost, posunutí, identita}, vznikne opět jedno z těchto zobrazení.

Kapitola 10

Shodná zobrazení v rovině

Definice 10.1. Zobrazení v rovině, které každým dvěma bodům X, Y přiřazuje body X', Y' tak, že

$$|X'Y'| = |XY|$$

se nazývá **shodné zobrazení** v rovině (též izometrické zobrazení).

Poznámka. Můžeme též říci, že shodné zobrazení zachovává vzdálenost bodů, tj. pro shodné zobrazení $f : X \rightarrow f(X)$ platí:

$$|f(X)f(Y)| = |XY|.$$

Věta 10.1. Každé shodné zobrazení je prosté a afinní.

Další vlastnosti shodných zobrazení:

1. Úsečka se zobrazí na úsečku.
2. Polopřímka se zobrazí na polopřímku.
3. Přímka se zobrazí na přímku.
4. Rovnoběžky se zobrazí na rovnoběžky.
5. Úhel se zobrazí na úhel s ním shodný.
6. Polorovina se zobrazí na polorovinu.

Příklad 10.1. V euklidovské rovině E_2 je zvolena kartézská soustava souřadnic. Určete, pro které hodnoty čísel a, b existuje shodné zobrazení roviny E_2 do sebe, zobrazující body $[0, 0]$, $[2, 1]$, $[4, a]$ po řadě na body $[1, 2]$, $[3, 1]$, $[5, b]$? Je toto shodné zobrazení určeno jednoznačně?

Z řešení předchozího příkladu vyplývá poznatek, že pro jednoznačné určení shodnosti v rovině nesmí být příslušné trojice bodů kolineární (tj. nesmí ležet v přímce).

Věta 10.2 (O určenosti shodného zobrazení v rovině 1). Shodné zobrazení v rovině je jednoznačně určeno libovolnými třemi nekolineárními body A, B, C a třemi nekolineárními body A', B', C' , které jsou po řadě jejich obrazy, viz Obr. 10.1¹.

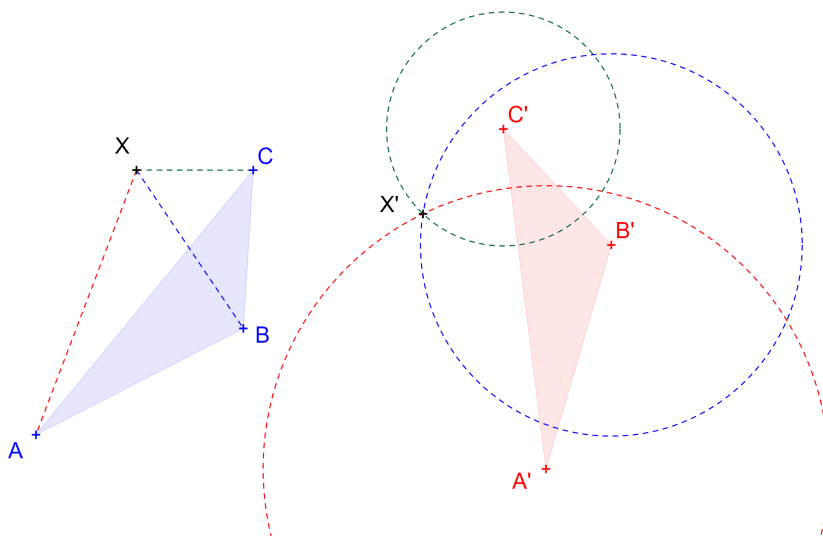


Figure 10.1: Věta o určenosti shodného zobrazení v rovině

Poznámka. Již víme, že stejná věta platí pro všechna afinní zobrazení v rovině (viz věta E.1 o určenosti afinního zobrazení na str. 195 a věta E.2 o určenosti afinity v rovině na str. 199).

10.1 Rovnice shodnosti v rovině

Každou afinitu f v rovině můžeme zapsat soustavou rovnic

$$\begin{aligned} f : x' &= a_{11}x + a_{12}y + b_1 \\ y' &= a_{21}x + a_{22}y + b_2, \end{aligned} \quad (10.1)$$

kterou přepíšeme užitím matic do tvaru

$$f : \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \quad (10.2)$$

¹GeoGebra applet viz <https://www.geogebra.org/m/RYaKE4Jw>

a stručně vyjádříme rovnici

$$f : X' = A \cdot X + B. \quad (10.3)$$

Jak poznáme, že afinita (10.1) je shodností?

Je-li tato afinita shodností, platí pro všechny dvojice bodů $X[x_1, x_2], Y[y_1, y_2]$ a jejich obrazy $X'[x'_1, x'_2], Y'[y'_1, y'_2]$ vztah $|X'Y'| = |XY|$, z něhož po dosazení souřadnic uvedených bodů dostaneme

$$\sqrt{(y'_1 - x'_1)^2 + (y'_2 - x'_2)^2} = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2}, \quad (10.4)$$

po umocnění obou stran na druhou

$$(y'_1 - x'_1)^2 + (y'_2 - x'_2)^2 = (y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2. \quad (10.5)$$

Nyní do levé strany (10.5) dosadíme z (10.1) (protože se body $X[x_1, x_2], Y[y_1, y_2]$ zobrazují v daném pořadí na body $X'[x'_1, x'_2], Y'[y'_1, y'_2]$, dosazujeme takto: $x'_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + b_1$, $x'_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + b_2$; $y'_1 = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + b_1$, $y'_2 = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + b_2$). Dostaneme rovnost

$$\begin{aligned} (a_{11}y_1 + a_{12}y_2 - a_{11}x_1 - a_{12}x_2)^2 + (a_{21}y_1 + a_{22}y_2 - a_{21}x_1 - a_{22}x_2)^2 \\ = (y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2, \end{aligned} \quad (10.6)$$

kterou postupně upravíme na tvar obsahující výrazy $(y_1 - x_1)$ a $(y_2 - x_2)$. Nejprve vytkneme společné koeficienty

$$\begin{aligned} [a_{11}(y_1 - x_1) + a_{12}(y_2 - x_2)]^2 + [a_{21}(y_1 - x_1) + a_{22}(y_2 - x_2)]^2 \\ = (y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2, \end{aligned} \quad (10.7)$$

potom umocníme závorky na levé straně a zjednodušíme ji na tvar polynomu s proměnnými $(y_1 - x_1)$ a $(y_2 - x_2)$

$$\begin{aligned} (a_{11}^2 + a_{21}^2)(y_1 - x_1)^2 + 2(a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22})(y_1 - x_1)(y_2 - x_2) + (a_{12}^2 + a_{22}^2)(y_2 - x_2)^2 \\ = (y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2. \end{aligned} \quad (10.8)$$

Nyní diskutujeme, za jakých podmínek je v (10.8) splněna rovnost levé strany s pravou stranou (využijeme toho, že dva polynomy jsou si rovny pro všechny hodnoty z příslušného oboru právě tehdy, když se rovnají koeficienty u sobě odpovídajících členů). Zjistíme tak, že rovnost $|X'Y'| =$

$|XY|$ nastává právě tehdy, když jsou pro prvky matice A (tj. koeficienty soustavy (10.1)) splněny vztahy

$$\begin{aligned} a_{11}^2 + a_{21}^2 &= 1, \\ a_{12}^2 + a_{22}^2 &= 1, \\ a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22} &= 0, \end{aligned} \tag{10.9}$$

které lze stručně vyjádřit rovností

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{10.10}$$

Odpověď na výše uvedenou otázku je tedy taková, že **rovnice (10.1) je rovnicí shodnosti, právě když platí**

$$A^T \cdot A = E, \tag{10.11}$$

kde E je jednotková matice, jinak řečeno, když je matice A **ortonormální**.

Poznámky.

1. Platí $A^T \cdot A = E$. Potom je ale $A^T = A^{-1}$ a platí tedy i rovnost $A \cdot A^T = E$.

2. Zobrazení, pro která platí $|\det A| = 1$ nazýváme ekviafinní zobrazení, stručně **ekviafinita**. Je zřejmé, že každá shodnost je ekviafinita. Platí toto tvrzení i obráceně? Můžeme říci, že každá ekviafinita je shodností?

3. Je třeba si uvědomit, že při shodném zobrazení mezi euklidovskými prostory různých dimenzí není matice A čtvercová. Potom výše uvedené úvahy o inverzní matici nemají smysl a v platnosti zůstává pouze původní podmínka $A^T \cdot A = E$.

10.2 Osová souměrnost

Definice 10.2. Nechť je dána přímka o , kterou nazýváme **osa souměrnosti**. Potom pro obraz M' libovolného bodu M této přímky o platí $M' \equiv M$. Ke každému bodu X , který neleží na přímce o , sestrojíme obraz X' následujícím způsobem: Bodem X vedeme kolmici k na přímku o a její patu označíme X_0 . Na polopřímce opačné k polopřímce X_0X sestrojíme

bod X' tak, že $|X'X_0| = |XX_0|$. Takto definované zobrazení nazýváme **osová souměrnost s osou o** a značíme ho $\mathcal{O}(o)$.

Figure 10.2: Definice osově souměrnosti

Poznámky:

1. O bodech X, X' říkáme, že je to dvojice bodů souměrně sdružených podle osy o .
2. Osová souměrnost je příkladem involutorního zobrazení (involuce).

Příklad 10.2. Je dána přímka p a body A, B v téže polorovině s hraniční přímkou p . Najděte všechny body $X \in p$ takové, že součet vzdáleností $|AX| + |BX|$ je minimální.²

Figure 10.3: Využití osově souměrnosti ke geometrickému řešení příkladu 10.3

Věta 10.3. Osová souměrnost je shodné zobrazení.

Samodružné body a směry osově souměrnosti

Každá shodnost je unikátní svou kombinací samodružných bodů a směrů. Tato vlastnost se využívá ke klasifikaci shodností.

Věta 10.4 (Alternativní definice osově souměrnosti). Shodné zobrazení, jehož všechny samodružné body vyplní přímku o , je souměrnost podle osy o .

Věta 10.5. Jestliže existují na přímce dva různé samodružné body, pak každý bod této přímky je samodružný.

Věta 10.6. Má-li shodnost aspoň tři nekolineární samodružné body, je to identita.

Věta 10.7. Má-li shodnost dva různé samodružné body a není identitou, pak je osovou souměrností.

Věta 10.8. Samodružné přímky osově souměrnosti jsou přímky kolmé na osu souměrnosti.

Analytické vyjádření osově souměrnosti $\mathcal{O}(o)$ v rovině

Příklad 10.3. Napište analytické vyjádření osově souměrnosti s osou v souřadnicové ose x (y).

²Tato úloha je známa jako Heronův problém; (Hérón Alexandrijský, přibl. 10-70 n.l.)

Řešení: Dle obrázku 10.4 je zřejmé, že uvedené osové souměrnosti mají níže uvedená analytická vyjádření.

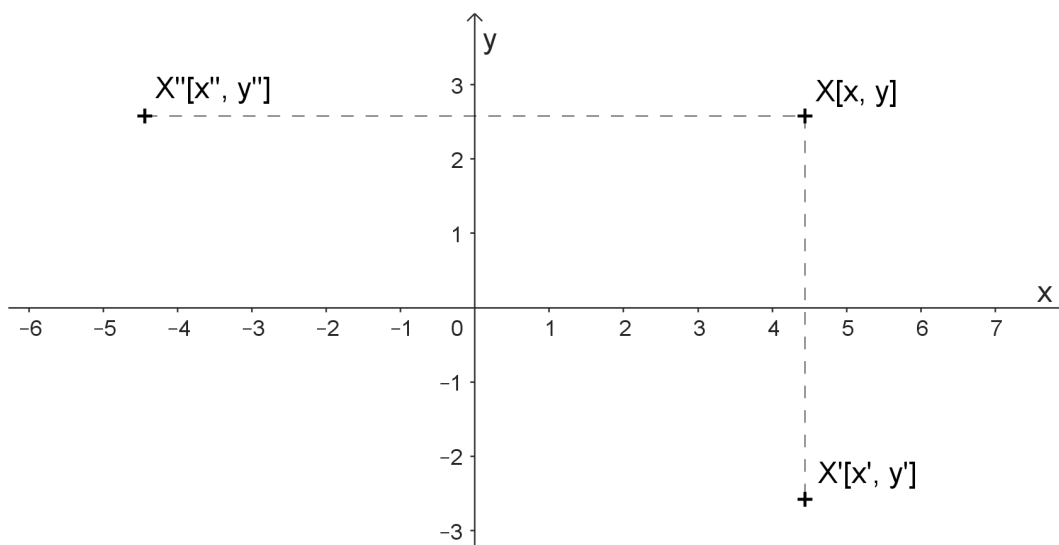


Figure 10.4: Odvození rovnic osové souměrnosti s osou v souřadnicové ose x (y)

Osová souměrnost s osou x :

$$x' = x$$

$$y' = -y$$

Osová souměrnost s osou y :

$$x' = -x$$

$$y' = y$$

Ne vždy je ale možné osu souměrnosti takto výhodně umístit do souřadnicové osy. Proto si odvodíme rovnice osové souměrnosti s obecně umístěnou osou.

Osová souměrnost podle osy o dané rovnicí $o : ax + by + c = 0$

Figure 10.5: Odvození rovnic osové souměrnosti $O(o)$

Dle obrázku 10.5 platí

$$X' - X = 2(X_0 - X),$$

$$X_0 - X = k(a, b).$$

Z druhé rovnosti vyjádříme $x_0 = x + ka, y_0 = y + kb$ a dosadíme je do obecné rovnice osy o : $a(x + ka) + b(y + kb) + c = 0$. Odsud potom vyjádříme parametr $k = -\frac{ax + by + c}{a^2 + b^2}$, který dosadíme do rovnice

$$X' - X = 2k(a, b).$$

Po úpravě a rozepsání po složkách dostáváme rovnice osové souměrnosti $O(o)$:

$$\begin{aligned}x' &= x - \frac{2a}{a^2 + b^2} (ax + by + c) \\y' &= y - \frac{2b}{a^2 + b^2} (ax + by + c)\end{aligned}$$

Příklad 10.4. V eukleidovské rovině je dána souměrnost podle přímky $p : 3x - 4y + 1 = 0$. Napište rovnice této souměrnosti.

10.3 Otočení

Definice 10.3. **Otočení** neboli **rotace** je zobrazení určené středem S a orientovaným úhlem velikosti φ , které bodu S přiřazuje týž bod S a libovolnému bodu $X \neq S$ přiřazuje bod X' tak, že $|X'S| = |XS|$ a orientovaný úhel XSX' má velikost φ . Zobrazení značíme $\mathcal{R}(S, \varphi)$, bod S se nazývá střed otočení a orientovaný úhel velikosti φ je úhel otočení.

Figure 10.6: Otočení $\mathcal{R}(S, \alpha)$

Shodnost, která není ani identitou ani osovou souměrností, má nejvýše jeden samodružný bod

Věta 10.9 (Alternativní definice otočení). Shodnost s právě jedním samodružným bodem S je otočením; bod S je střed otočení.

Příklad 10.5. Odvoďte analytické vyjádření otočení se středem v počátku souřadnicové soustavy o úhel α . Potom ukažte, že toto zobrazení má jediný samodružný bod - střed otočení.

Řešení: Postupujeme podle obrázku 10.7.

Figure 10.7: Otočení $\mathcal{R}([0, 0], \alpha)$

Rovnice otočení o úhel α kolem počátku jsou

$$\begin{aligned}x' &= x \cos \alpha - y \sin \alpha \\y' &= x \sin \alpha + y \cos \alpha\end{aligned}$$

Věta 10.10. Složením dvou osových souměrností s různoběžnými osami vznikne otočení, jehož středem je průsečík těchto os.

Věta 10.11. Každé otočení lze složit ze dvou osových souměrností, jejichž osy jsou různoběžky procházející středem otočení. Jednu z těchto os lze volit libovolně tak, že prochází středem otočení. Druhá je touto volbou určena jednoznačně.

Věta 10.12. Otočení se středem S a úhlem velikosti α převádí přímku p v přímku p' různoběžnou s p ; přitom dva vrcholové úhly, které p a p' tvoří, mají velikost α .

Analytické vyjádření otočení (rotace) $R(S, \alpha)$ v rovině

Souřadnice středu: $S = [s_1, s_2]$

$$\begin{aligned}x' &= (x - s_1) \cos \alpha - (y - s_2) \sin \alpha + s_1 \\y' &= (x - s_1) \sin \alpha + (y - s_2) \cos \alpha + s_2\end{aligned}$$

Po úpravě dostaneme:

$$\begin{aligned}x' &= x \cos \alpha - y \sin \alpha + s_1 - s_1 \cos \alpha + s_2 \sin \alpha \\y' &= x \sin \alpha + y \cos \alpha + s_2 - s_1 \sin \alpha - s_2 \cos \alpha\end{aligned}$$

Příklad 10.6. Afinní zobrazení euklidovské roviny na sebe zobrazuje vrchol A trojúhelníku ABC na bod B , bod B na bod C a bod C na bod A . Může to být zobrazení shodné? Jestliže ano, napište jeho rovnice vzhledem k vhodně zvolené kartézské soustavě souřadnic.

10.4 Středová souměrnost

Definice 10.4. **Středová souměrnost** se středem S je shodné zobrazení, které bodu S přiřazuje týž bod S a libovolnému bodu $X \neq S$ přiřazuje bod X' tak, že bod S je středem úsečky XX' . Zobrazení značíme $\mathcal{S}(S)$.

Figure 10.8: Středová souměrnost $\mathcal{S}(S)$

Poznámka. Středovou souměrnost můžeme chápat též jako speciální případ rotace $\mathbf{R}(S, \alpha)$ pro $\alpha = \pi$, tj. $\mathcal{S}(S) = \mathcal{R}(S, \pi)$.

Vlastnosti středové souměrnosti:

- 1) Lze ji rozložit na dvě osové souměrnosti, jejichž osy jsou navzájem kolmé a procházejí středem souměrnosti S ; jedna z os je volitelná.
- 2) Vznikne složením libovolných dvou osových souměrností, jejichž osy jsou k sobě kolmé (střed souměrnosti S odpovídá průsečíku těchto os).
- 3) Je jednoznačně určena svým středem
- 4) Je to *involutorní zobrazení* (též *involuce*).
- 5) Středová souměrnost je *přímá shodnost*.
- 6) Středová souměrnost má jediný samodružný bod, střed S , a všechny směry samodružné.

Věta 10.13. V souměrnosti podle středu S je obrazem každé přímky přímka s ní rovnoběžná. Přímka, která prochází středem S je samodružná.

Analytické vyjádření středové souměrnosti $\mathbf{S}(S)$ v rovině

Souřadnice středu: $S = [s_1, s_2]$

$$x' = -x + 2s_1$$

$$y' = -y + 2s_2$$

Věta 10.14. Každá shodnost v rovině se dá složit z nejvýše tří osových souměrností.

10.5 Posunutí

Definice 10.5. Orientovanou úsečkou AB je dán vektor $\vec{p} = \overrightarrow{AB}$. **Posunutí** neboli **translace** je zobrazení, které každému bodu X roviny přiřazuje bod X' tak, že platí $\overrightarrow{XX'} = \vec{p}$, tj. $X' = X + \vec{p}$. Zobrazení značíme $\mathcal{T}(\vec{p})$.

Figure 10.9: Posunutí $\mathcal{T}(\vec{p})$

Poznámka. Posunutí (translaci) můžeme definovat též jako shodnost, která vznikne složením dvou osových souměrností s rovnoběžnými a různými osami. Směr posunutí je potom kolmý na směr těchto os a jeho velikost je rovna dvojnásobku jejich vzdálenosti.

Věta 10.15. Každou translaci lze složit ze dvou osových souměrností s rovnoběžnými osami z nichž jednu lze volit libovolně, kolmo na směr translace a druhá je touto volbou určena jednoznačně.

Věta 10.16. Posunutí (translace) nemá žádný samodružný bod a zobrazuje přímku do přímky s ní rovnoběžné (tj. má všechny směry samodružné).

Věta 10.17. Nechť X' je obraz libovolného (proměnného) bodu X v dané translaci $\mathbf{T}$. Pak všechny přímky XX' jsou navzájem rovnoběžné a všechny úsečky XX' jsou navzájem shodné.

Analytické vyjádření posunutí $\mathbf{T}(\vec{p})$ v rovině

Rovnice posunutí $\mathcal{T}(\vec{p})$, kde $\vec{p} = (p_1, p_2)$:

$$x' = x + p_1$$

$$y' = y + p_2$$

Příklad 10.7. Jaké zobrazení může být výsledkem skládání dvou posunutí?

10.6 Posunuté zrcadlení

Příklad 10.8. Je dána přímka p a dva body A, B v téže polorovině s hraniční přímkou p . Na přímce p sestrojte úsečku XY délky d tak, aby součet $|AX| + |XY| + |YB|$ byl co nejmenší.

Víme, že každá shodnost v rovině se dá složit z nejvýše tří osových souměrností. V případech jedné a dvou osových souměrností už máme jasno - složením jedné osové souměrnosti může vzniknout samozřejmě jenom tato souměrnost, složením dvou osových souměrností pak lze vytvořit otočení (různoběžné osy), středovou souměrnost (kolmé osy), posunutí (rovnoběžné osy) a identitu (dvě totožné osy). Každé z těchto zobrazení je zároveň unikátní svou skladbou samodružných bodů a směrů

- osová souměrnost má přímku samodružných bodů a dva na sebe kolmé samodružné směry,
- otočení má jediný samodružný bod a žádný samodružný směr,

- středová souměrnost má jediný samodružný bod a všechny směry samodružné,
- identita má všechny body i směry samodružné.

Pokud existuje nějaké další shodné zobrazení, nemůže mít žádný samodružný bod (jinak by to bylo otočení, středová souměrnost, osová souměrnost nebo identita). Naším úkolem je proto vyšetřit, zda **existuje shodné zobrazení bez samodružných bodů, které vznikne složením tří osových souměrností**.

Ukáže se, že takové zobrazení skutečně existuje. Nazveme ho *posunuté zrcadlení* (též *posunutá souměrnost*).

Definice 10.6. Je dána přímka o . Zobrazení složené z posunutí ve směru přímky o a osově souměrnosti podle osy o se nazývá posunuté zrcadlení (též posunutá souměrnost).

Figure 10.10: Posunuté zrcadlení $\mathcal{Z} : X \rightarrow X'$

Věta 10.18. Posunuté zrcadlení se dá složit z osově a středové souměrnosti, přičemž střed středové souměrnosti neleží na ose osově souměrnosti.

Věta 10.19. Posunuté zrcadlení nemá samodružné body.

Příklad 10.9. Nechť AB , $A'B'$ jsou různoběžné a shodné úsečky. Dokažte, že existuje posunuté zrcadlení nebo osová souměrnost, které převádějí body A , B po řadě v body A' , B' .

Řešení:

Figure 10.11: Posunuté zrcadlení $\mathcal{Z} : AB \rightarrow A'B'$

Analytické vyjádření posunutého zrcadlení

Figure 10.12: Posunuté zrcadlení $\mathcal{Z} : X \rightarrow X'$

Posunuté zrcadlení dané osou souměrnosti v ose x a vektorem posunutí $\vec{p} = (p_1, 0)$ (viz Obr. 10.12)

$$\begin{aligned}\mathcal{Z} : x' &= x + p_1, \\ y' &= -y.\end{aligned}$$

10.7 Cvičení: Shodnosti v rovině

2. Napište rovnice souměrnosti podle přímky $o : 2x - 3y + 1 = 0$.
3. Sestrojte trojúhelník ABC , je-li dán obvod $o = 12\text{cm}$ a úhly $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 45^\circ$.
4. Dokažte Vivianiho větu.

Věta 10.20 (Vivianiho věta). V rovnostranném trojúhelníku je hodnota součtu vzdáleností libovolného bodu od stran trojúhelníku konstantní, nezávislá na poloze bodu.

5. Jsou dány dvě různoběžky p, q a bod A mimo ně. Najděte body $B \in p$, $C \in q$ tak, aby obvod trojúhelníku ABC byl minimální.
6. Řešte **Fagnanův problém**: Danému ostroúhlému trojúhelníku vepište trojúhelník o nejmenším obvodu.
7. Sestrojte konvexní čtyřúhelník $ABCD$ se stranami dané velikosti, je-li $\mapsto AC$ osou vnitřního úhlu při vrcholu A .
8. Sestrojte čtverec $ABCD$, je-li dáno $a + e = 10\text{cm}$.
9. Sestrojte obdélník $ABCD$, je-li dáno $e = 7\text{cm}$, $a - b = 1\text{cm}$.
10. Sestrojte lichoběžník $ABCD$ ($AB \parallel CD$), je-li dáno $b = 3\text{cm}$, $c = 2.5\text{cm}$, $d = 2.6\text{cm}$, $\alpha - \beta = 20^\circ$.
11. **Mascheroniová konstrukce.** Je dána kružnice $k(S; r)$; dále je dána dvěma body A, B (body neleží na kružnici) její sečna p , která neprochází středem S . Sestrojte průsečíky přímky p s kružnicí k , aniž přitom použijete pravítka.
12. Dokažte, že body souměrně sdružené s průsečíkem výšek podle stran trojúhelníka, leží na kružnici trojúhelníku opsané.
13. Dokažte následující větu
Věta 10.21. V každém trojúhelníku dělí osa libovolného vnitřního úhlu protější stranu v poměru stran přilehlých.
14. Napište rovnice osové souměrnosti, zobrazující počátek na bod $[1, 5]$.
15. Je dána přímka p a dvě kružnice k_1, k_2 oddělené přímkou p . Sestrojte rovnostranný trojúhelník tak, aby na každé z kružnic k_1, k_2 byl jeden vrchol a jedna z výšek ležela na přímce p .

16. Jsou dány tři různé přímky p_1, p_2, p_3 , procházející bodem S ; na přímce p_1 je dán bod $A \neq S$. Sestrojte trojúhelník ABC , jehož osy vnitřních úhlů leží v přímkách p_1, p_2, p_3 .
17. Jsou dány tři přímky o_1, o_2, o_3 procházející bodem O . Na o_1 dán bod A_1 . Sestrojte $\triangle ABC$ tak, aby o_1, o_2, o_3 byly osami jeho stran a bod A_1 středem strany BC .
18. Jsou dány body X, Y a přímka p , která je odděluje. Sestrojte rovnoramenný trojúhelník ABC , jehož hlavním vrcholem je bod C , osou souměrnosti přímka p a jehož ramena mají danou velikost a . Přímka AC nechť prochází bodem X a přímka BC bodem Y .
19. Je dána přímka p a body A, B , ležící ve stejné polorovině s hraniční přímkou p . Sestrojte bod $X \in p$ tak, aby $|\angle AXp| = 2|\angle BXp|$.
20. Jsou dány body A, B, C a přímka p kolmá k přímce AB tak, že prochází bodem C a body A, B leží v téže polorovině určené přímkou p . Sestrojte na přímce p takový bod X , aby z něho byla vidět úsečka AB pod stejným úhlem jako úsečka BC .
21. Obrazy středu S kružnice opsané trojúhelníku ABC v osových souměrnostech podle přímek BC, AC, AB jsou vrcholy trojúhelníku $A_1B_1C_1$. Dokažte, že je tento trojúhelník shodný s trojúhelníkem ABC .

Otočení

22. Jsou dány dvě shodné úsečky AB, CD . Určete otočení, které zobrazí A na C a B na D . [2]
23. Je dána kružnice $k(S; r)$ a bod $P \neq S$. Bodem P vedte přímku, na které kružnice vytíná úsečku dané velikosti d .
24. Jsou dány různé rovnoběžné přímky a, b, c a bod A , který leží na přímce a . Sestrojte všechny rovnostranné trojúhelníky ABC , jejichž vrcholy B, C leží po řadě na přímkách b, c .
25. Je dána kružnice $k(S; 3\text{cm})$ a bod A ($|SA| = 1.5\text{cm}$). Sestrojte všechny tětivy XY kružnice k o délce 5.5cm , které procházejí bodem A .
26. Je dána kružnice $k(S; r)$, bod B a úsečka délky d ($d < 2r$). Sestrojte tětivu XY kružnice k délky d tak, aby byla vidět z bodu B pod úhlem 60° .

27. Jsou dány dvě rovnoběžné přímky a, b a mimo ně bod C . Sestrojte rovnostranný trojúhelník ABC tak, aby jeho vrcholy A, B ležely po řadě na přímkách a, b .

28. Jsou dány kružnice k , přímka p a bod A ležící vně k . Sestrojte rovnostranný trojúhelník s vrcholem v bodě A tak, aby zbývající vrcholy ležely na k a na p .

29. Při odvalování kružnice po přímce se body soustavy spojené s kružnicí pohybují po trajektoriích, kterým se říká **cykloidy**. Rozlišujeme tři typy cykloid, v závislosti na tom, zda bod leží vně, na nebo uvnitř kružnice. Zobrazte tyto křivky pomocí programu GeoGebra.

Středová souměrnost

30. Je dána kružnice $k(O; r)$ a přímka p , která má od středu O vzdálenost $v > 0$; dále je dán bod S , který leží uvnitř poloroviny pO . Sestrojte úsečku se středem S , která má krajní body K, P po řadě na kružnici k a na přímce p .

31. Je dána kružnice $k(S, r)$. Bodem P , který leží vně kružnice k , veďte přímku p , která protíná kružnici v bodech A, B tak, že A je středem úsečky BP .

32. Je dán úhel AVB a bod S jeho vnitřku. Sestrojte na rameni VA bod X a na rameni VB bod Y tak, aby bod S byl středem úsečky XY .

33. Je dána úsečka AA_1 ($|AA_1| = 5\text{cm}$). Sestrojte všechny trojúhelníky ABC , pro které je AA_1 těžnicí t_a a pro které platí: $c = 4\text{cm}, b = 7\text{cm}$.

34. Je dána úsečka AA_1 ($|AA_1| = 5\text{cm}$). Sestrojte všechny trojúhelníky ABC , pro které je AA_1 těžnicí t_a a pro které platí: $\gamma = 45^\circ, \beta = 60^\circ$.

35. Jsou dány dvě kružnice k_1, k_2 , které se protínají ve dvou bodech Q a R . Bodem Q veďte přímku, která vytíná na obou kružnicích tětivy stejné délky.

36. Je dán trojúhelník ABC a jeho vnitřní bod M . Sestrojte všechny úsečky XY se středem M a s krajními body X, Y na hranici trojúhelníku.

37. Vepište danému rovnoběžníku $ABCD$ čtverec $XYUV$ tak, aby na každé straně rovnoběžníku ležel jeden vrchol čtverce.

38. Je dán úhel AVB a bod S jeho vnitřku. Sestrojte na rameni VA bod X a na rameni VB bod Y tak, aby XYS byl rovnoramenný pravoúhlý trojúhelník s přeponou XY .

39. Je dána úsečka AA_1 ; $|AA_1| = 4.5\text{cm}$. Sestrojte všechny pravoúhlé trojúhelníky ABC s pravým úhlem při vrcholu C , v nichž AA_1 je těžnicí t_a a $t_b = 6\text{cm}$.

Posunutí

40. Jsou dány přímka p a dvě nesoustředné kružnice $k_1(S_1, r_1)$, $k_2(S_2, r_2)$. Věďte přímku rovnoběžnou s přímkou p tak, aby na ní kružnice k_1, k_2 vytínaly shodné tětivy.

41. Sestrojte čtyřúhelník $ABCD$, jehož úhlopříčky svírají pravý úhel, jsou-li dány velikosti úhlopříček $|AC| = e$, $|BD| = f$ a velikosti úhlů $|\angle ABC| = 90^\circ$, $|\angle ADC| = \delta$.

42. Sestrojte lichoběžník, jsou-li dány velikosti jeho stran a, b, c, d .

43. Sestrojte čtyřúhelník $ABCD$, jsou-li dány velikosti jeho stran $|AB| = a$, $|BC| = b$, $|CD| = c$, $|DA| = d$ a odchylka ω přímek AD , BC .

44. Sestrojte rovnoběžník, jsou-li dány délky jeho stran a velikost úhlu jeho úhlopříček.

45. Sestrojte lichoběžník $ABCD$, jsou-li dány délky obou jeho základů a, c a obou jeho úhlopříček e, f .

46. Jsou dány dvě různoběžky a, b a úsečka délky r . Sestrojte všechny kružnice k se středem na přímce a , poloměrem r , které na přímce b vytínají tětivu délky r .

Posunuté zrcadlení

47. Jsou dány dvě různoběžky a, b a na nich dva body $A \neq B$ (A na a , B na b). Určete bod X na a a bod Y na b tak, aby platilo $|AX| = |BY|$ a dále aby:

- $XY \parallel p$, kde p je daná přímka; [1]
- $XY = d$, kde d je předem daná úsečka; [1]
- střed úsečky XY ležel na dané přímce q . [1]

Kapitola 11

Grupa shodností eukleidovského prostoru

Věta 11.1. Každou shodnost v rovině lze složit z nejvýše tří osových souměrností.¹

11.1 Skládání shodných zobrazení

- (a) Přímou shodnost lze rozložit v sudý počet osových souměrností, nepřímou shodnost v lichý počet osových souměrností.
- (b) Složíme-li dvě shodnosti přímé nebo dvě shodnosti nepřímé, dostaneme shodnost přímou; složíme-li shodnost přímou a nepřímou, vznikne shodnost nepřímá.

11.2 Grupa shodností v rovině

Výše uvedené poznatky nasvědčují tomu, že *množina shodností* v rovině spolu s *operací skládání zobrazení* tvoří grupu. Některé podmnožiny množiny shodností navíc tvoří spolu s operací skládání zobrazení podgrupy.

Příklad 11.1. Ověřte následující tvrzení:

- (a) Všechny shodnosti v rovině tvoří grupu G_S .
- (b) Všechny přímé shodnosti tvoří podgrupu G'_S grupy G_S .
- (c) Množina všech translací doplněná identitou, tvoří grupu, která je podgrupou grupy přímých shodností.
- (d) Množina všech translací a středových souměrností, doplněná identitou, tvoří podgrupu grupy G'_S .

¹viz též str. 113, věta 10.14

Příklad 11.2. Trojúhelník ABC byl převeden otočením daného smyslu se středem S a úhlem velikosti $\omega = 120^\circ$ v trojúhelník $A_1B_1C_1$, který byl dále převeden posunutím $\mathcal{T}(A_1 \rightarrow A_2)$ v trojúhelník $A_2B_2C_2$. Určete otočení, které převádí přímo $\triangle ABC$ v $\triangle A_2B_2C_2$.

Příklad 11.3. Je dán rovnostranný trojúhelník ABC . Najděte všechny shodnosti, které převádějí tento trojúhelník do něho samého. Zkoumejte vlastnosti množiny těchto shodností spolu s operací skládání shodností.

11.3 Klasifikace shodností roviny

Cílem klasifikace shodností v rovině (obecně afinních zobrazení v prostoru A_n) je získat úplný (vyčerpávající) přehled těchto zobrazení a jejich analytických vyjádření. Postupujeme od obecné podoby rovnice zobrazení. Z té analýzou všech možných konfigurací samodružných bodů a směrů, které toto zobrazení připouští, dostaneme úplný přehled všech jeho variant.

Myšlenka úplné klasifikace shodností: Myšlenka klasifikace shodností je dobře ilustrována konkrétními příklady uvedenými v kapitole 9. Zde se k ní vracíme s uplatněním obecnějšího pohledu. Klasifikace shodností roviny je založena na zkoumání možných samodružných bodů a směrů zobrazení, které je dáno rovnicí (soustavou lineárních rovnic)

$$f : X' = A \cdot X + B. \quad (11.1)$$

Tento postup si nejprve ilustrujeme řešením následujícího příkladu, poté provedeme obecnou klasifikaci shodností roviny E_2 , viz str. 127, a trojrozměrného prostoru E_3 , viz str. 132.

Příklad 11.4. Zjistěte, zda existuje shodnost E_2 , při které se bod $K = [10; 0]$ zobrazí na počátek $K' = [0; 0]$ a bod $L = [25; 20]$ na bod $L' = [0; 25]$. V kladném případě napište rovnice tohoto zobrazení a najděte jeho samodružné body.

Než začneme aplikovat níže uvedený postup, stojí za to si u takovýchto úloh ověřit, zda je vůbec splněna definice shodného zobrazení, tj. zda $|K'L'| = |KL|$.

Řešení v programu wxMaxima:

Definujeme obecnou podobu matic A, B z rovnice (11.1).

```
(%i30) A:matrix([a11,a12],[a21,a22]); b:matrix([b1],[b2]);
```

```
(%o30)  $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ 
```

```
(%o31)  $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ 
```

Do rovnice (11.1) dosadíme dané body a jejich obrazy, dostaneme dvojice rovnic $\mathbf{s}_1$ a $\mathbf{s}_2$. Třetí skupinu rovnic $\mathbf{s}_3$ dostaneme z podmínky $A^T \cdot A - I = 0$.

```
(%i32) s1:A.[10,0]+b-[0,0]; s2:A.[25,20]+b-[0,25];
s3:transpose(A).A-ident(2);
```

```
(%o32)  $\begin{pmatrix} b_1 + 10 a_{11} \\ b_2 + 10 a_{21} \end{pmatrix}$ 
```

```
(%o33)  $\begin{pmatrix} b_1 + 20 a_{12} + 25 a_{11} \\ b_2 + 20 a_{22} + 25 a_{21} - 25 \end{pmatrix}$ 
```

```
(%o34)  $\begin{pmatrix} a_{21}^2 + a_{11}^2 - 1 & a_{21} a_{22} + a_{11} a_{12} \\ a_{21} a_{22} + a_{11} a_{12} & a_{22}^2 + a_{12}^2 - 1 \end{pmatrix}$ 
```

Dohromady tak máme soustavu sedmi rovnic o šesti naznamých a_{11} , a_{12} , a_{21} , a_{22} , b_1 , b_2 .

```
(%i35) rov:[s1[1,1],s1[2,1],s2[1,1],s2[2,1],s3[1,1],s3[1,2],s3[2,2]];
```

```
(%o35) [b1 + 10 a11, b2 + 10 a21, b1 + 20 a12 + 25 a11, b2 + 20 a22 + 25 a21 - 25, a21^2 + a11^2 - 1, a21 a22 + a11 a12, a22^2 + a12^2 - 1]
```

Soustavu má dvě řešení (nejedná se o soustavu lineárních rovnic, proto může mít dvě řešení).

```
(%i36) res:solve(rov,[a11,a12,a21,a22,b1,b2]);
```

```
(%o36) [[a11 = 4/5, a12 = -3/5, a21 = 3/5, a22 = 4/5, b1 = -8, b2 = -6], [a11 = -4/5, a12 = 3/5, a21 = 3/5, a22 = 4/5, b1 = 8, b2 = -6]]
```

Dvěma řešeními odpovídají dvě různé shodnosti. Zjistili jsme tedy, že existují dvě shodnosti, které převádějí body K, L na body K', L' (což se, vzhledem ke větě o určenosti shodného (afinního) zobrazení dalo čekat). Pokračujeme v řešení úlohy pro každou z těchto shodností zvlášť. Nejprve si připravíme matici `RovTr` pro zápis rovnic uvažovaných shodností

(není nutnou součástí postupu řešení, jedná se jenom o usnadnění vizuální prezentace rovnic v programu).

```
(%i37) RovTr:matrix([x1=a11*x+a12*y+b1],[y1=a21*x+a22*y+b2]);
```

```
(%o37) 
$$\begin{pmatrix} x1 = a12 y + a11 x + b1 \\ y1 = a22 y + a21 x + b2 \end{pmatrix}$$

```

I. Shodnost daná rovnicemi

$$\begin{aligned} x1 &= \frac{4x}{5} - \frac{3y}{5} - 8 \\ y1 &= \frac{3x}{5} + \frac{4y}{5} - 6 \end{aligned}$$

Definujeme matice A1, B1 tohoto zobrazení a zapíšeme jeho rovnice.

```
(%i38) A1:ev(A,res[1]); B1:ev(b,res[1]);
```

```
(%o38) 
$$\begin{pmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix}$$

```

```
(%o39) 
$$\begin{pmatrix} -8 \\ -6 \end{pmatrix}$$

```

```
(%i40) R1:ev(RovTr,res[1]);
```

```
(%o40) 
$$\begin{pmatrix} x1 = -\frac{3y}{5} + \frac{4x}{5} - 8 \\ y1 = \frac{4y}{5} + \frac{3x}{5} - 6 \end{pmatrix}$$

```

Samodružné body najdeme řešením rovnice $X = A \cdot X + B$, pro snazší zpracování programem přepsané do tvaru $A \cdot X + B - X = 0$.

```
(%i41) RovSB1:A1.[x,y]+B1-[x,y]; solve([RovSB1[1,1],RovSB1[2,1]],[x,y]
```

```
(%o41) 
$$\begin{pmatrix} -\frac{3y}{5} - \frac{x}{5} - 8 \\ -\frac{y}{5} + \frac{3x}{5} - 6 \end{pmatrix}$$

```

```
(%o42) 
$$[[x = 5, y = -15]]$$

```

Uvažované shodné zobrazení má tedy jediný samodružný bod $S = [5, -15]$.

Pro určení samodružných směrů řešíme charakteristickou rovnici (9.8) homomorfismu asociovaného s daným shodným zobrazením.

```
(%i43) CharA1:A1-%lambda*ident(2);
      CharR1:expand(determinant(CharA1))=0;
      solve(CharR1,%lambda);
```

$$(\%o43) \begin{pmatrix} \frac{4}{5} - \lambda & -\frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{4}{5} - \lambda \end{pmatrix}$$

$$(\%o44) \lambda^2 - \frac{8\lambda}{5} + 1 = 0$$

$$(\%o45) \left[\lambda = -\frac{3i-4}{5}, \lambda = \frac{3i+4}{5} \right]$$

Charakteristická rovnice nemá reálné kořeny. To znamená, že uvažované shodné zobrazení nemá samodružné směry.

Protože uvažované zobrazení má právě jeden samodružný bod a nemá žádný samodružný směr, jedná se o OTOČENÍ.

II. Shodnost daná rovnicemi

$$x_1 = -\frac{4x}{5} + \frac{3y}{5} + 8$$

$$y_1 = \frac{3x}{5} + \frac{4y}{5} - 6$$

Definujeme matice A2, B2 tohoto zobrazení a zapíšeme jeho rovnice.

```
(%i46) A2:ev(A,res[2]); B2:ev(b,res[2]);
```

$$(\%o46) \begin{pmatrix} -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix}$$

$$(\%o47) \begin{pmatrix} 8 \\ -6 \end{pmatrix}$$

```
(%i48) R2:ev(RovTr,res[2]);
```

$$(\%o48) \begin{pmatrix} x_1 = \frac{3y}{5} - \frac{4x}{5} + 8 \\ y_1 = \frac{4y}{5} + \frac{3x}{5} - 6 \end{pmatrix}$$

Samodružné body najdeme řešením rovnice $X = A \cdot X + B$, pro snazší zpracování programem přepsané do tvaru $A \cdot X + B - X = 0$.

```
(%i49) RovSB2:A2.[x,y]+B2-[x,y]; solve([RovSB2[1,1],RovSB2[2,1]],[x,y]);
```

$$(\%o49) \begin{pmatrix} \frac{3y}{5} - \frac{9x}{5} + 8 \\ -\frac{y}{5} + \frac{3x}{5} - 6 \end{pmatrix}$$

(%o50) []

Uvažované shodné zobrazení tedy nemá žádný samodružný bod.

Pro určení samodružných směrů řešíme charakteristickou rovnici (9.8) homomorfismu asociovaného s daným shodným zobrazením.

```
(%i51) CharA2:A2-%lambda*ident(2);
      CharR2:expand(determinant(CharA2))=0;
      solve(CharR2,%lambda);
```

$$(\%o51) \begin{pmatrix} -\lambda - \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{4}{5} - \lambda \end{pmatrix}$$

$$(\%o52) \lambda^2 - 1 = 0$$

$$(\%o53) [\lambda = -1, \lambda = 1]$$

Charakteristická rovnice má dva reálné kořeny (vlastní čísla). Každému z nich odpovídá jeden vlastní (charakteristický) vektor určující samodružný směr. Postupně dosadíme získaná vlastní čísla λ do soustavy (její matice) (9.7) a řešíme.

```
(%i54) RovSS2:A2.[u,v]-[%lambda*u,%lambda*v];
```

$$(\%o54) \begin{pmatrix} \frac{3v}{5} - \lambda u - \frac{4u}{5} \\ -\lambda v + \frac{4v}{5} + \frac{3u}{5} \end{pmatrix}$$

```
(%i55) RovSS21:ev(RovSS2,%lambda=-1);
      solve([RovSS21[1,1],RovSS21[2,1]],[u,v]);
```

$$(\%o55) \begin{pmatrix} \frac{3v}{5} + \frac{u}{5} \\ \frac{9v}{5} + \frac{3u}{5} \end{pmatrix} \text{ solve : dependent equations eliminated : (2)}$$

$$(\%o56) [[u = -3 \%r3, v = \%r3]]$$

První samodružný směr je určen vektorem $\vec{u}_1 = (-3, 1)$.

```
(%i57) RovSS22:ev(RovSS2,%lambda=1);
      solve([RovSS22[1,1],RovSS22[2,1]],[u,v]);
```

$$(\%o57) \begin{pmatrix} \frac{3v}{5} - \frac{9u}{5} \\ \frac{3u}{5} - \frac{v}{5} \end{pmatrix} \text{ solve : dependent equations eliminated : (2)}$$

$$(\%o58) [[u = \frac{\%r4}{3}, v = \%r4]]$$

Druhý samodružný směr je určen vektorem $\vec{u}_2 = (1, 3)$.

Protože uvažované zobrazení nemá žádný samodružný bod a má dva (na

sebe kolmé) samodružné směry, jedná se o POSUNUTÉ ZRCADLENÍ.

11.4 Klasifikace shodností roviny

Z podmínky $A^T \cdot A = E$ plyne, že afinní zobrazení určené rovnicemi

$$\begin{aligned}x' &= a_{11}x + a_{12}y + b_1 \\ y' &= a_{21}x + a_{22}y + b_2,\end{aligned}$$

je shodností právě tehdy, když platí následující rovnosti:

$$\begin{aligned}a_{11}^2 + a_{21}^2 &= a_{12}^2 + a_{22}^2 = 1 \\ a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22} &= a_{12}a_{11} + a_{22}a_{21} = 0\end{aligned}$$

Potom je zřejmé, že existuje úhel $\alpha \in \langle 0^\circ; 360^\circ \rangle$ takový, že lze napsat

$$\begin{aligned}a_{11} &= \cos \alpha, \\ a_{21} &= \sin \alpha, \\ a_{12} \cos \alpha + a_{22} \sin \alpha &= 0, \\ a_{22} &= \varepsilon \cos \alpha, \\ a_{12} &= -\varepsilon \sin \alpha, \text{ kde } \varepsilon = \pm 1.\end{aligned}$$

Hodnota ε určuje, zda se jedná o shodnost přímkou ($\varepsilon = 1$) nebo nepřímou ($\varepsilon = -1$).

I. Přímé shodnosti

Každou přímkou shodnost v rovině můžeme vyjádřit rovnicemi ve tvaru

$$\begin{aligned}x'_1 &= x_1 \cos \alpha - x_2 \sin \alpha + b_1 \\ x'_2 &= x_1 \sin \alpha + x_2 \cos \alpha + b_2.\end{aligned}$$

Samodružné body

Samodružné body přímé shodnosti jsou řešením soustavy rovnic

$$\begin{aligned}x_1(1 - \cos \alpha) + x_2 \sin \alpha &= b_1 \\ -x_1 \sin \alpha + x_2(1 - \cos \alpha) &= b_2.\end{aligned} \tag{11.2}$$

Nejprve nás bude zajímat přímá shodnost v rovině, která má právě jeden samodružný bod. Soustava (11.2) má právě jedno řešení, pokud je regulární, tj. pokud pro její determinant platí

$$\begin{vmatrix} (1 - \cos \alpha), & \sin \alpha \\ -\sin \alpha, & (1 - \cos \alpha) \end{vmatrix} \neq 0.$$

Po úpravě dostaneme

$$2(1 - \cos \alpha) \neq 0,$$

což vede k podmínce

$$\cos \alpha \neq 1.$$

Tak dostáváme

1) OTOČENÍ (ROTACI).

Stačí volit počátek soustavy souřadné v onom jediném samodružném bodě a dostaneme známé vyjádření rotace kolem počátku o úhel α :

$$\begin{aligned} x'_1 &= x_1 \cos \alpha - x_2 \sin \alpha \\ x'_2 &= x_1 \sin \alpha + x_2 \cos \alpha \end{aligned}$$

Samodružné směry

Samodružné směry (tj. vektory těchto směrů) přímé shodnosti jsou **netriviálním** řešením soustavy homogenních rovnic

$$\begin{aligned} u_1(\lambda - \cos \alpha) + u_2 \sin \alpha &= 0 \\ -u_1 \sin \alpha + u_2(\lambda - \cos \alpha) &= 0. \end{aligned} \tag{11.3}$$

Ta má netriviální (tj. nekonečně mnoho) řešení právě tehdy, když je splněna charakteristická rovnice přímé shodnosti v rovině

$$\begin{vmatrix} (\lambda - \cos \alpha), & \sin \alpha \\ -\sin \alpha, & (\lambda - \cos \alpha) \end{vmatrix} = 0. \tag{11.4}$$

Úpravou (11.4) dostaneme rovnici

$$(\lambda - \cos \alpha)^2 + \sin^2 \alpha = 0,$$

která je splněna za předpokladu, že $\sin \alpha = 0$ a zároveň $\cos \alpha = 1 = \lambda$ nebo $\cos \alpha = -1 = \lambda$. Pro $\cos \alpha = -1$ tak dostáváme

2) STŘEDOVOU SOUMĚRNOST

s analytickým vyjádřením

$$\begin{aligned}x'_1 &= -x_1 + b_1 \\x'_2 &= -x_2 + b_2.\end{aligned}$$

Za podmínky, že $\cos \alpha = 1$ dostaneme, pro $b_1 = b_2 = 0$,

3) IDENTITU

$$\begin{aligned}x'_1 &= x_1 \\x'_2 &= x_2\end{aligned}$$

a pro $b_1 \neq 0 \vee b_2 \neq 0$ dostáváme

4) POSUNUTÍ

$$\begin{aligned}x'_1 &= x_1 + b_1 \\x'_2 &= x_2 + b_2.\end{aligned}$$

II. Nepřímé shodnosti

Každou nepřímou shodnost v rovině můžeme vyjádřit rovnicemi ve tvaru

$$\begin{aligned}x'_1 &= x_1 \cos \alpha + x_2 \sin \alpha + b_1 \\x'_2 &= x_1 \sin \alpha - x_2 \cos \alpha + b_2.\end{aligned}$$

Samodružné směry

K vyšetření nepřímých shodností použijeme samodružné směry. Řešením charakteristické rovnice

$$\begin{vmatrix} (\lambda - \cos \alpha) & -\sin \alpha \\ -\sin \alpha & (\lambda + \cos \alpha) \end{vmatrix} = 0, \quad (11.5)$$

dostaneme podmínku

$$\lambda = \pm 1,$$

která odpovídá tomu, že uvažované zobrazení má dva navzájem kolmé samodružné směry. Jeden, pro $\lambda = 1$, se zachovává, druhý, pro $\lambda = -1$, se mění v opačný. Volme soustavu souřadnou tak, aby osa x měla směr odpovídající $\lambda = 1$. Směr osy y pak zřejmě odpovídá $\lambda = -1$. Potom je nepřímá shodnost popsána rovnicemi

$$\begin{aligned}x'_1 &= x_1 + b_1 \\x'_2 &= -x_2 + b_2.\end{aligned}$$

Pokud je $b_1 = 0$, má uvažované zobrazení **přímku samodružných bodů** a jedná se tedy o

5) OSOVOU SOUMĚRNOST

$$\begin{aligned}x'_1 &= x_1 \\x'_2 &= -x_2 + b_2.\end{aligned}$$

Pokud je ale $b_1 \neq 0$, má pouze **samodružnou přímku** a jedná se o

6) POSUNUTÉ ZRCADLENÍ.

11.5 Cvičení: Shodnosti v rovině

48. Určete parametr s tak, aby existovala shodnost roviny zobrazující body $[0, 0]$, $[3, 4]$ po řadě na body $[5, 0]$, $[9, s]$. Napište rovnice tohoto zobrazení a souřadnice obrazu bodu $[5, 0]$. [2]

49. Určete a , b , c tak, aby rovnice $x' = \frac{3}{4}x + by + 1$, $y' = ax + cy - 1$ vyjadřovaly shodnost. [3]

50. Shodné zobrazení euklidovské roviny do euklidovského prostoru je dáno vzhledem ke kartézským soustavám souřadnic rovnicemi

$$\text{a) } x' = x + \frac{1}{2}y + 1, y' = ax + \frac{1}{2}y - 1, z' = bx + cy + 3,$$

$$\text{b) } x' = x + by - 2, y' = \frac{1}{2}y + 1, z' = ax + cy - 3.$$

Určete koeficienty a, b, c .

51. Najděte souřadnice obrazu bodu $B = [1, 2]$ v otočení v E_2 kolem středu $S = [3, -4]$ o úhel $\alpha = 420^\circ$. Napište rovnice této shodnosti.

52. Určete p , q tak, aby existovala shodnost zobrazující body $[3, 0]$, $[1, 2]$, $[-1, -1]$ po řadě na body $[1, 4]$, $[p, 2]$, $[2, q]$. Najděte samodružné body a směry tohoto zobrazení.

53. Napište rovnice středové souměrnosti v E_2 podle středu $S = [-4, 5]$.

54. Napište rovnice shodnosti roviny E_2 , která vznikne složením tří osových souměrností s osami o rovnicích: $x = 0$, $y = 0$, $x - 2y = 0$.

55. Rotace kolem bodu $S = [2; 1]$ v E_2 zobrazuje bod $A = [1; 1]$ na bod A' . Najděte souřadnice bodu A' , jestliže pro úhel rotace α platí $\alpha = \frac{2}{3}\pi$.

56. Najděte souřadnice středu a úhel rotace, která je dána rovnicemi: $x' = \frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y + 1$, $y' = \frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y - 2$.

57. Najděte rovnice obrazu přímky p v rotaci v E_2 kolem středu $S = [-2; 1]$ o úhel $\alpha = \frac{\pi}{6}$, jestliže $p : x - y + 1 = 0$.

11.6 Klasifikace shodností prostoru E_3

Věta 11.2. Každé shodné zobrazení v prostoru E_3 lze složit z nejvýše čtyř rovinových souměrností.

Některá shodná zobrazení v prostoru:

- Otočení kolem osy
- Posunutí
- Osová souměrnost
- Středová souměrnost
- Šroubový pohyb (torze)

Postup klasifikace shodností v trojrozměrném prostoru lze nečekaně zjednodušit. Vhodné umístění soustavy souřadnic nám dovolí využívat poznatky z klasifikace shodností v rovině.

Každé shodné zobrazení f v prostoru můžeme zapsat soustavou rovnic

$$\begin{aligned} f : x'_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + b_1 \\ x'_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + b_2 \\ x'_3 &= a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + b_3, \end{aligned}$$

kterou lze užitím matic přepsat do tvaru

$$f : \begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

a pak stručně vyjádřit rovnicí

$$f : X' = A \cdot X + B. \quad (11.6)$$

Stejně jako v rovině i v prostoru platí, že (11.6) je shodností právě tehdy, když je

$$A^T \cdot A = E, \quad (11.7)$$

Důležitou skutečností je, že charakteristická rovnice tohoto zobrazení, která se dá stručně zapsat ve tvaru

$$\det(A - \lambda E) = 0, \quad (11.8)$$

kde E je jednotková matice, je algebraickou rovnicí **třetího stupně** vzhledem k neznámé λ . Vzhledem k tomu, že imaginární kořeny se vyskytují vždy ve dvojicích (navzájem komplexně sdružených čísel), má algebraická rovnice třetího stupně vždy alespoň jeden kořen reálný. V případě rovnice (11.8) ho označme λ_0 . Shodnost v E_3 má tak vždy alespoň jeden samodružný směr $\vec{u}$; $\vec{u}' = \lambda_0 \vec{u}$. V případě shodností se zachovává velikost vektoru, tj. platí $||\vec{u}'|| = ||\lambda_0 \vec{u}|| = ||\vec{u}||$. Potom je zřejmé, že hodnota λ_0 bude 1 nebo -1 . Předpokládejme, že vektor $\vec{u}$ je jednotkový a volme soustavu souřadnou tak, aby měla osa z směr tohoto vektoru. Při takto zvolené soustavě souřadné se rovnice shodnosti zjednoduší na tvar

$$\begin{aligned} x'_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 & + b_1 \\ x'_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 & + b_2 \\ x'_3 &= & \pm x_3 + b_3. \end{aligned}$$

Potom je požadavek, aby byla matice tohoto zobrazení

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \pm 1 \end{bmatrix}$$

ortonormální, splněn právě tehdy, když je ortonormální matice

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}.$$

To je ale úloha, kterou jsme řešili při klasifikaci shodností v rovině. Víme tedy, že při vhodné volbě os x, y připadají v úvahu následující možnosti, jak může tato matice vypadat:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}; \text{ pro } \sin \alpha \neq 0.$$

Ke každé z těchto matic existují dvě soustavy rovnic (protože uvažujeme $\pm z$). Posouzením množin samodružných bodů příslušných zobrazení a vhodnými volbami soustavy souřadné se dobereme k výsledné klasifikaci:

1) IDENTITA ($b_1 = b_2 = b_3 = 0$) nebo **POSUNUTÍ**

$$\begin{aligned} x'_1 &= x_1 + b_1 \\ x'_2 &= x_2 + b_2 \\ x'_3 &= x_3 + b_3. \end{aligned}$$

2) SOUMĚRNOST PODLE ROVINY² ($b_1 = b_2 = 0$) nebo

SOUMĚRNOST PODLE ROVINY složená s POSUNUTÍM podél této roviny

$$\begin{aligned}x'_1 &= x_1 + b_1 \\x'_2 &= x_2 + b_2 \\x'_3 &= -x_3 + b_3.\end{aligned}$$

3) SOUMĚRNOST PODLE OSY³ rovnoběžné se z ($b_3 = 0$) nebo SOUMĚRNOST PODLE OSY rovnoběžné se z složená s POSUNUTÍM podél této osy

$$\begin{aligned}x'_1 &= -x_1 + b_1 \\x'_2 &= -x_2 + b_2 \\x'_3 &= x_3 + b_3.\end{aligned}$$

4) STŘEDOVÁ SOUMĚRNOST

$$\begin{aligned}x'_1 &= -x_1 + b_1 \\x'_2 &= -x_2 + b_2 \\x'_3 &= -x_3 + b_3.\end{aligned}$$

5) OTOČENÍ kolem osy rovnoběžné se z ($b_3 = 0$) nebo OTOČENÍ kolem osy rovnoběžné se z složené s POSUNUTÍM podél této osy

$$\begin{aligned}x'_1 &= x_1 \cos \alpha - x_2 \sin \alpha + b_1 \\x'_2 &= x_1 \sin \alpha + x_2 \cos \alpha + b_2 \\x'_3 &= x_3 + b_3.\end{aligned}$$

6) OTOČENÍ kolem osy rovnoběžné se z složené se SOUMĚRNOSTÍ podle roviny kolmé k této ose

$$\begin{aligned}x'_1 &= x_1 \cos \alpha - x_2 \sin \alpha + b_1 \\x'_2 &= x_1 \sin \alpha + x_2 \cos \alpha + b_2 \\x'_3 &= -x_3 + b_3.\end{aligned}$$

²<https://www.geogebra.org/m/zxn66pws>

³<https://www.geogebra.org/m/tny2ud2e>

Poznámky.

1. Každá přímá shodnost v prostoru se dá složit z otočení kolem přímky a posunutí podél této přímky. Potom můžeme říci, že každá dvě shodná tělesa v prostoru můžeme ztotožnit posunutím, otočením nebo šroubovým pohybem.

2. Nepřímá shodnost se dostane z přímé přidáním souměrnosti podle roviny.

11.7 Cvičení: Shodnosti prostoru E_3

58. Ověřte, že rovnicemi

$$\begin{aligned}x' &= \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}y + \frac{2}{3}z + \frac{2}{3} \\y' &= \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}y - \frac{2}{3}z - \frac{2}{3} \\z' &= -\frac{2}{3}x - \frac{2}{3}y - \frac{1}{3}z + \frac{2}{3}\end{aligned}$$

je dáno shodné zobrazení E_3 na sebe, najděte jeho samodružné body a směry.

59. Napište rovnice posunutí v E_3 , v němž se bod $M = [-2, 3, 1]$ zobrazí na bod $M' = [5, 0, -4]$. Najděte souřadnice obrazu bodu $A = [1, 1, 1]$ v tomto posunutí.

11.7.1 Shodná zobrazení v prostoru E_n

Věta 11.3. Ke každé shodnosti f v E_n existuje k souměrností podle nadrovin tak, že f je jejich složením, $k < n + 2$.

Kapitola 12

Podobná zobrazení v rovině

12.1 Grupa podobností eukleidovského prostoru

12.1.1 Podobné zobrazení

Definice 12.1. Zobrazení f eukleidovského prostoru E do eukleidovského prostoru E' se nazývá **podobné zobrazení**, jestliže existuje kladné reálné číslo k tak, že pro každé dva body X, Y prostoru E a jejich obrazy $f(X), f(Y)$ z E' platí:

$$|f(X)f(Y)| = k|XY|. \quad (12.1)$$

Číslo k se nazývá koeficient podobného zobrazení f .

Poznámka. Podobnosti s koeficientem $k \neq 1$ nazýváme **vlastní podobnosti**.

Příklad 12.1. Napište rovnice pro zobrazení v rovině, které každý útvar otočí kolem počátku o úhel α a dvakrát zvětší, viz Obr. 12.1.

Figure 12.1: Podobné zobrazení v rovině

Věta 12.1. Každé podobné zobrazení eukleidovského prostoru E do eukleidovského prostoru E' lze složit ze **stejnolehlosti prostoru E** a **shodného zobrazení E do E'** .

Věta 12.2. Každé podobné zobrazení je afinní.

Protože podobná zobrazení jsou afinními zobrazeními, platí pro ně také věta o určenosti. Samozřejmě v podobě, která koresponduje s definicí podobného zobrazení.

Věta 12.3 (O určenosti podobného zobrazení). Nechť jsou $P_0, P_1, \dots, P_n$ lineárně nezávislé body n -rozměrného eukleidovského prostoru E_n a $P'_0, P'_1, \dots, P'_n$

body euklidovského prostoru E' . Afinní zobrazení prostoru E_n do prostoru E' , které zobrazuje bod P_i na bod P'_i pro $i = 0, 1, \dots, n$ je právě tehdy podobné, existuje-li číslo $k > 0$ tak, že pro všechny dvojice $i, j = 0, 1, \dots, n$ platí $|P'_i P'_j| = k|P_i P_j|$.

Poznámka. Body prohlásíme ze *lineárně nezávislé* tehdy, když jimi určené vektory jsou lineárně nezávislé.

Příklad 12.2. Formulujte větu o určenosti podobného zobrazení pro rovinu, tj. eukleidovský prostor E_2 .¹

Příklad 12.3. V euklidovské rovině je dán čtverec $ABCD$ se středem S . Existuje právě jedno podobné zobrazení roviny čtverce do sebe, při kterém se body A, B, S zobrazí po řadě na body D, B, C . Rozložte toto podobné zobrazení na stejnoolehlost a shodné zobrazení.

Příklad 12.4. Ukažte, že každé dvě paraboly jsou podobné, tzn. že existuje podobné zobrazení roviny jedné paraboly na rovinu druhé paraboly, při kterém se jedna parabola zobrazí na druhou.

Věta 12.4. Každá vlastní podobnost má právě jeden samodružný bod.

Proof. Nejprve dokážeme, že vlastní podobnost (tj. podobnost s koeficientem $k \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$) nemůže mít více než jeden samodružný bod, potom dokážeme, že musí mít aspoň jeden. Tak nám vyjde, že musí mít právě jeden.

(i) Skutečnost, že vlastní podobnost nemůže mít více než jeden samodružný bod dokážeme sporem. Nechť má vlastní podobnost f nejméně dva samodružné body K a L ; $K \xrightarrow{f} K' = K, L \xrightarrow{f} L' = L$. Potom $|K'L'| = |KL|$, což je ve sporu s definicí vlastní podobnosti (12.1), kde $k \neq 1$. Vlastní podobnost tedy nemůže mít více než jeden samodružný bod.

(ii) Nyní dokážeme, že vlastní podobnost musí mít aspoň jeden samodružný bod. Uvažujme podobnost f s rovnicí $X' = A \cdot X + B$, kde $A^T \cdot A = k^2 I$. Její samodružné body jsou potom řešením soustavy lineárních rovnic odpovídající maticové rovnici $(I - A) \cdot X = -B$. Klíčová pro náš důkaz je skutečnost, že determinant matice této soustavy je pro vlastní podobnost různý od nuly, $|I - A| \neq 0$. Pokud by byl roven nule, tj. pokud by platila rovnost $|I - A| = 0$, znamenalo by to, že řešením charakteristické rovnice

¹Své řešení porovnejte s větou 12.6 na str. 139.

$|\lambda I - A| = 0$ (viz str. 94) homomorfismu φ asociovaného s f je vlastní číslo $\lambda = 1$. Kdyby tomu tak bylo, existoval by (vlastní) vektor $\vec{u} = Q - P$, pro jehož obraz $\varphi(\vec{u}) = f(Q) - f(P)$ platí $\varphi(\vec{u}) = \vec{u}$. Protože se zobrazí sám na sebe, nemění se jeho velikost, tj. $|f(P)f(Q)| = |PQ|$, což je ve sporu s definicí vlastní podobnosti (12.1), kde $k \neq 1$. Determinant $|I - A|$ tedy nemůže být roven nule, soustava $(I - A) \cdot X = -B$ je proto regulární a má právě jedno řešení. $\square$

Grupa podobností

Množina všech podobností eukleidovského prostoru E_n spolu s operací skládání tvoří grupu - tzv. *grupu podobností prostoru E_n* .

12.2 Podobnosti eukleidovské roviny

Zopakujme si definici *podobného zobrazení v rovině* (stručně *podobnosti*): Zobrazení f roviny (eukleidovského prostoru E_2) na sebe se nazývá *podobnou transformací roviny* (též *podobností v rovině*), jestliže existuje kladné reálné číslo k tak, že pro každé dva body X, Y roviny a jejich obrazy X', Y' platí:

$$|X'Y'| = k|XY|.$$

Číslo k se nazývá *koefficient podobnosti f* .

Poznámky.

1. Každé podobné zobrazení je afinní.
2. Podobnosti s koefficientem $k \neq 1$ nazýváme *vlastní podobností*.

Figure 12.2: Každou podobnost lze rozložit na stejnoolehlost a shodnost

Věta 12.5. Každou podobnost v rovině s poměrem podobnosti k lze rozložit na stejnoolehlost $H(S, k)$ a shodnost Z . Přitom střed stejnoolehlosti můžeme volit libovolně a shodnost Z je tím určena jednoznačně.

Věta 12.6 (O určenosti podobnosti v rovině). Každá podobnost v rovině je jednoznačně určena trojúhelníkem ABC a jeho obrazem $A'B'C'$ takovým, že $|A'B'| = k|AB|$, $|B'C'| = k|BC|$, $|A'C'| = k|AC|$, kde $k, k > 0$, je koefficient této podobnosti.

Víme, že každé podobné zobrazení eukleidovské roviny do sebe lze složit ze *stejnoolehlosti* a *shodnosti*.

1. Stejnolehlost H volíme se středem v počátku soustavy souřadnic a s koeficientem $k > 0$:

$$H : X \mapsto \bar{X}; \quad \begin{aligned} \bar{x} &= kx \\ \bar{y} &= ky. \end{aligned}$$

2. Shodnost S je buď přímá nebo nepřímá:

$$S : \bar{X} \mapsto X'; \quad \begin{aligned} x' &= \bar{x} \cos \alpha \mp \bar{y} \sin \alpha + p \\ y' &= \bar{x} \sin \alpha \pm \bar{y} \cos \alpha + q. \end{aligned}$$

Výsledkem složení $S \circ H$ je potom přímá nebo nepřímá podobnost.

Přímá podobnost	Nepřímá podobnost:
$\begin{aligned} x' &= kx \cos \alpha - ky \sin \alpha + p \\ y' &= kx \sin \alpha + ky \cos \alpha + q. \end{aligned}$	$\begin{aligned} x' &= kx \cos \alpha + ky \sin \alpha + p \\ y' &= kx \sin \alpha - ky \cos \alpha + q. \end{aligned}$
$\begin{aligned} x' &= ax - by + p \\ y' &= bx + ay + q. \end{aligned}$	$\begin{aligned} x' &= ax + by + p \\ y' &= bx - ay + q. \end{aligned}$
$A^T \cdot A = (a^2 + b^2) \cdot I; \quad k = \sqrt{a^2 + b^2}$	

Věta 12.7. Každá vlastní podobnost eukleidovské roviny je buď *stejnolehlost*, nebo *stejnolehlost složená s otočením kolem středu stejnohlosti*, nebo *stejnolehlost složená s osovou souměrností*, jejíž osa prochází středem stejnohlosti.

12.3 Cvičení: Podobnosti

1. Najděte všechny podobnosti euklidovské roviny, při kterých se bod $[1, 0]$ zobrazí na bod $[4, -2]$ a bod $[2, 3]$ na bod $[2, -8]$. [2]

2. **Eulerovými body** se nazývají středy úseček spojujících vrcholy trojúhelníku s průsečíkem jeho výšek.

Dokažte následující tvrzení:

Středy stran, paty výšek a Eulerovy body libovolného trojúhelníku leží na jedné kružnici. (*Tato kružnice se nazývá kružnice devíti bodů, Eulerova kružnice nebo Feuerbachova kružnice.*)

3. Najděte podobnost euklidovské roviny, při které se zobrazí počátek na bod $[0, 2]$, bod $[1, 1]$ na počátek a bod $[2, 0]$ na bod $[2, p]$. Určete p a najděte samodružné body a směry nalezené podobnosti.

4. Najděte rovnice podobnosti, při které je počátek samodružný a obrazem bodu $[5, -3]$ je bod $[1, 1]$.

5. Určete všechny podobnosti, pro které jsou bod $[1, 1]$ a směr vektoru $(1, 1)$ samodružné.

6. Napište rovnice všech podobností zobrazujících body $[1, 2]$ a $[0, 1]$ po řadě na body $[3, -1]$, $[4, 2]$. Rozložte je na stejnolehlost a shodnost.

7. V rovině je dán čtverec $ABCD$ se středem S . Určete obraz bodu C v podobnosti, která zobrazuje body A, B, S po řadě na body B, D, C . Určete samodružný bod této podobnosti.

8. Sestrojte alespoň jeden trojúhelník ABC , pro který platí $|AB| : |AC| = 3 : 5$, $\alpha = 60^\circ$, $\rho = 1,8\text{cm}$ (poloměr kružnice vepsané).

9. Sestrojte kosodélník $ABCD$, je-li dáno $|\angle DAB| = \alpha$, $|\angle ABD| = \varepsilon$, $|AC| = e$.

10. Je dána kružnice k a bod A , který je bodem vnější oblasti kružnice k . Sestrojte všechny sečny kružnice k , které procházejí bodem A a pro jejichž průsečíky X, Y s kružnicí platí $|AX| = 2|AY|$.

11. Je dána kružnice $k(S; 4\text{cm})$, její tečna t a bod $M \in k$ tak, že $|Mt| = 2\text{cm}$. Sestrojte úsečku XY procházející bodem M tak, aby $X \in k, Y \in t$ a $|MX| : |MY| = 3 : 2$.

12. Jsou dány dvě různoběžky a, b a kružnice k tak, že $P \in a \cap b$ je bodem vnitřní oblasti kružnice k . Sestrojte všechny kružnice, které se dotýkají přímk a, b i kružnice k .

13. Dokažte následující věty:

Věta 12.8 (Menelaova věta). Je dán trojúhelník ABC a přímka p , která neprochází žádným z bodů A, B, C , ale protíná přímky AB, BC, CA v bodech C', A', B' . Potom platí:

$$(ABC') \cdot (BCA') \cdot (CAB') = 1.$$

Naopak, platí-li uvedený vztah, body A', B', C' leží na přímce.

Věta 12.9 (Pappova věta). Nechť jsou A', B', C', D' rovnoběžné nebo středové průměty čtyř navzájem různých bodů A, B, C, D přímky p na přímku p' ; $p' \neq p$. Potom:

$$(A'B'C'D') = (ABCD)$$

Věta 12.10 (Cevova věta). Nechť je dán trojúhelník ABC a bod M , který neleží na žádné z přímk AB, BC, CA . Průsečíky přímk AM, BM, CM s přímkami BC, CA, AB (různé od bodů A, B, C) označme postupně A', B', C' . Potom platí:

$$(ABC') \cdot (BCA') \cdot (CAB') = -1.$$

Naopak, platí-li uvedený vztah, jsou přímky AA', BB', CC' buď navzájem rovnoběžné nebo se protínají v jediném bodě.

14. Zobrazení f euklidovské roviny do euklidovského trojrozměrného prostoru je vzhledem k zvoleným kartézským soustavám souřadnic dáno rovnicemi: $x' = 2x + ay - 1$, $y' = x + by + 2$, $z' = y + 1$. Určete koeficienty a, b tak, aby bylo zobrazení f podobné. Jaký je koeficient tohoto podobného zobrazení f ?

15. Určete p, q, r tak, aby byla rovnicemi $x' = x - 2y + 2z + 4$, $y' = px + 2y + z - 2$, $z' = qx + ry + 2z - 2$ dána vzhledem ke kartézské soustavě souřadnic podobnost. Určete její samodružný bod a samodružné směry.

Kapitola 13

Stejnolehlost

Patří mezi tzv. homotetie, tj. afinní zobrazení, která mají všechny směry samodružné.

Definice 13.1. Budiž dán bod S a reálné číslo κ (různé od 0 a 1). **Stejnolehlost** $H(S; \kappa)$ se středem S a koeficientem κ je zobrazení, které každému bodu X roviny přiřadí bod X' tak, že

$$\overrightarrow{SX'} = \kappa \overrightarrow{SX}.$$

Figure 13.1: Stejnolehlost $H(S, \kappa = -1.5)$

Poznámka. Stejnolehlost můžeme definovat i více popisně: *Budiž dán bod S a reálné číslo κ (různé od 0 a 1). **Stejnolehlost** $H(S; \kappa)$ se středem S a koeficientem κ je zobrazení, které každému bodu X roviny přiřadí bod X' tímto způsobem:*

1. Pro $X \equiv S$ je $X' \equiv X$,
2. Pro $X \neq S$ je $|X'S| = |\kappa| \cdot |XS|$,
pro $\kappa > 0$ leží X' leží na polopřímce $\overrightarrow{SX}$ a
pro $\kappa < 0$ leží X' leží na polopřímce opačné k $\overrightarrow{SX}$.

Poznámka. Zobrazení inverzní k stejnoolehlosti $H(S; \kappa)$ je stejnoolehlost $H^{-1}\left(S; \frac{1}{\kappa}\right)$.

Základní vlastnosti stejnoolehlosti $H(S, \kappa)$:

1. Obrazem přímky je přímka s ní rovnoběžná.
2. Obrazem úsečky AB je úsečka $A'B'$; $|A'B'| = |\kappa| \cdot |AB|$.
3. Obrazem polopřímky je polopřímka s ní souhlasně ($\kappa > 0$) nebo nesouhlasně ($\kappa < 0$) rovnoběžná .

4. Obrazem úhlu $\angle AVB$ je úhel $\angle A'V'B'$; $|\angle A'V'B'| = |\angle AVB|$.

Příklad 13.1. Jsou dány dva různé body A, B a reálné číslo $\lambda \neq 0, 1$. Najděte na přímce AB bod C tak, aby platilo $(ABC) = \lambda$.

13.1 Analytické vyjádření stejnohlosti

Rovnice stejnohlosti $H(S; \kappa)$: $H : X' = \kappa X + (1 - \kappa)S$.

Příklad 13.2. Napište rovnice stejnohlosti afinní roviny $\mathbf{A}_2$, která zobrazuje bod $B = [2, 0, -1]$ na bod $C = [0, 1, 3]$ a má koeficient $\kappa = -2$. Najděte souřadnice jejího středu.

Řešení v programu wxMaxima:

```
(%i1) B:[2,0,-1]$ C:[0,1,3]$ S:[s1,s2,s3]$
```

```
(%i4) H:C-S=-2*(B-S);
```

```
(%o4) [-s1, 1 - s2, 3 - s3] = [-2 (2 - s1), 2 s2, -2 (-s3 - 1)]
```

```
(%i5) res:solve(lhs(H)-rhs(H), [s1,s2,s3])[1];
```

```
(%o5) [s1 = 4/3, s2 = 1/3, s3 = 1/3]
```

```
(%i6) S:ev(S,res);
```

```
(%o6) [4/3, 1/3, 1/3]
```

13.2 Skládání stejnohlostí

Věta 13.1 (O skládání stejnohlosti a translace). Zobrazení složené ze stejnohlosti $H(S; \kappa)$ a translace $X' = X + \vec{t}$ je stejnohlost $H'(Q; \kappa)$, kde $Q = S + \frac{1}{1 - \kappa}\vec{t}$.

Věta 13.2 (O skládání stejnohlostí). Složením dvou stejnohlostí $H_1(S_1, \kappa_1)$, $H_2(S_2, \kappa_2)$ vznikne

1. IDENTITA, jestliže $\kappa_1 \kappa_2 = 1$ a $S_1 = S_2$,
2. POSUNUTÍ, jestliže $\kappa_1 \kappa_2 = 1$ a $S_1 \neq S_2$,
3. STEJNOLEHLOST $H(S, \kappa)$ s koeficientem $\kappa = \kappa_1 \kappa_2$, jestliže $\kappa_1 \kappa_2 \neq 1$.
Přitom, pro $S_1 = S_2$ je také $S = S_1 = S_2$, pro $S_1 \neq S_2$ leží bod S na přímce $S_1 S_2$.

13.3 Stejnolehlost kružnic

Pro dvě kružnice $k_1(S_1; r_1)$, $k_2(S_2; r_2)$ s různými poloměry existují právě dvě stejnolehlosti, které převádějí kružnici k_1 do kružnice k_2 : $H_1(E, r_2/r_1)$ a $H_2(I, -r_2/r_1)$ (Bod E se někdy označuje jako vnější střed stejnolehlosti, bod I potom jako vnitřní střed stejnolehlosti.). Jestliže se kružnice dotýkají v bodě T , je $T = I$ v případě vnějšího dotyku a $T = E$ v případě vnitřního dotyku kružnic.

Figure 13.2: Stejnolehlost kružnic

Příklad 13.3. Je dána kružnice k , přímka p , která je vnější přímkou kružnice k , a bod $A \in p$. Sestrojte všechny kružnice, které se dotýkají přímky p v bodě A a kružnice k .

Příklad 13.4. Jsou dány dvě různoběžky a, b a bod M , který leží uvnitř jednoho jejich úhlu. Sestrojte všechny kružnice, které procházejí bodem M a dotýkají se přímek a, b .

Příklad 13.5. Jsou dány dvě různoběžky m, n a kružnice k ležící uvnitř jednoho jejich úhlu. Sestrojte všechny kružnice, které se dotýkají přímek m, n i kružnice k .

Příklad 13.6. (Eulerova přímka) V trojúhelníku ABC označme T těžiště, V průsečík výšek a S střed kružnice trojúhelníku opsané. Máme dokázat, že buď všechny tři body splynou v jediný, nebo jsou navzájem různé a leží na jedné přímce (Eulerova přímka) tak, že platí $(S, V; T) = -\frac{1}{2}$.

Eulerova přímka

V trojúhelníku ABC označme T těžiště, O průsečík výšek a S_o střed kružnice trojúhelníku opsané. Potom buď všechny tyto tři body splývají v jediný, nebo jsou navzájem různé a leží na společné přímce tak, že platí $(S_o, O; T) = -\frac{1}{2}$. Tuto přímku nazýváme *Eulerova přímka*, viz Obr. 13.3.

Figure 13.3: Eulerova přímka

K důkazu výše uvedeného tvrzení využijeme stejnolehlost $H(T, -\frac{1}{2})$. Z Obr. 13.4 je patrné, že v této stejnolehlosti se $\triangle ABC$ zobrazí na $\triangle A_1\bar{B}_1C_1$.

Figure 13.4: $H(T, -\frac{1}{2}) : \triangle ABC \rightarrow \triangle A_1B_1C_1$

Protože výškami (výšky teď chápeme jako přímky) $\triangle A_1B_1C_1$ jsou osy stran původního $\triangle ABC$, můžeme říci, že výšky trojúhelníku ABC se ve stejnolehlosti $H(T, -\frac{1}{2})$ zobrazí na osy jeho stran. Potom se ale průsečík výšek O zobrazí na průsečík os stran (tj. střed kružnice opsané $\triangle ABC$) S_o . Z vlastností stejnolehlosti plyne, že příslušné tři body O, S_o, T leží v přímce a platí pro ně $(S_oOT) = -\frac{1}{2}$.

Konstrukce Eulerovy přímky a její souvislost s kružnicí devíti bodů (viz str. 149) je znázorněna v apletu *Eulerova přímka. Kružnice devíti bodů*.

Příklad 13.7. (Kružnice devíti bodů, též Feuerbachova či Eulerova kružnice) V trojúhelníku ABC označme V průsečík výšek, S střed kružnice opsané, C_1, A_1, B_1 středy stran AB, BC, CA . Nechť k_0 je kružnice procházející body A_1, B_1, C_1 . Dokažte:

- 1) Na kružnici k_0 leží též paty A_0, B_0, C_0 výšek v_a, v_b, v_c a středy úseček AV, BV, CV .
- 2) Střed kružnice k_0 je středem úsečky SV , pokud $S \neq V$; pokud je $S \equiv V$ splyne střed k_0 s bodem S .
- 3) Poloměr kružnice k_0 je roven polovině poloměru kružnice trojúhelníku opsané.

Kružnice devíti bodů

V trojúhelníku ABC označme O průsečík výšek, S_o střed kružnice opsané, C_1, A_1, B_1 středy stran AB, BC a CA . Jestliže k_d je kružnice procházející body A_1, B_1 a C_1 , potom na ni leží také paty A_0, B_0, C_0 výšek v_a, v_b, v_c a středy úseček AO, BO, CO . Tato kružnice se nazývá *kružnice devíti bodů* (též *Feuerbachova* či *Eulerova kružnice*), viz Obr. 13.5

Střed kružnice k_d je středem úsečky S_oO , její poloměr je roven polovině poloměru kružnice trojúhelníku ABC opsané.

Figure 13.5: Kružnice devíti bodů

Konstrukce kružnice devíti bodů a její souvislost s Eulerovou přímkou (viz str. 148) je znázorněna v apletu *Eulerova přímka. Kružnice devíti bodů*.

Příklad 13.8. Platí tato věta: *Jsou-li dány dvě rovnoběžné úsečky různých délek, existují právě dvě stejnolehlosti, které zobrazí první úsečku na druhou. Dokážete je vždy najít?*

13.3.1 Mongeova věta

Jsou-li dány tři různé kružnice v rovině, vnitřní a vnější středy příslušející každým dvěma z nich jsou dohromady spjaty zajímavými geometrickými vztahy, viz Obr. 13.6. Ty jsou předmětem *Mongeovy věty*.

Figure 13.6: Mongeova věta o třech kružnicích v rovině

Věta 13.3 (Mongeova věta). Jsou-li k_1, k_2, k_3 tři kružnice, které mají různé poloměry a jejichž středy neleží v přímce, platí pro vnější a vnitřní středy stejnolehlostí každých dvou z nich následující vztahy:

- i) Všechny tři vnější středy stejnolehlosti E_{12}, E_{13}, E_{23} leží v přímce.
- ii) Každé dva vnitřní středy stejnolehlosti a jeden vnější leží v přímce.
- iii) Tři vnitřní středy stejnolehlosti I_{12}, I_{13}, I_{23} neleží v přímce.

Proof. V důkazu využijeme tvrzení věty ??, že složením stejnolehlostí s různými středy vznikne pro $\kappa_1\kappa_2 \neq 1$ stejnolehlost, jejíž střed leží na přímce určené středy těchto stejnolehlostí. Pak už stačí mezi danými třemi kružnicemi najít tři stejnolehlosti takové, že jedna z nich je složením zbývajících dvou. Dynamický GeoGebra aplet k důkazu je na adrese <https://www.geogebra.org/m/osR9mHs8>. □

13.4 Cvičení: Stejnolehlost

60. Do půlkruhu s průměrem AB vepište čtverec $KLMN$ tak, aby strana KL ležela na úsečce AB a další dva vrcholy M, N na dané půlkružnici.

61. Je dána přímka p , kružnice k a bod A . Sestrojte všechny úsečky XY tak, aby platilo: $X \in p$, $Y \in k$, $A \in XY$, $|AY| = 3|AX|$.

62. Jsou dány dvě různoběžky a, b a kružnice k tak, že a je sečnou a b je vnější přímkou kružnice k . Sestrojte všechny kružnice, které se dotýkají přímek a, b i kružnice k .

63. Sestrojte trojúhelník ABC , je-li dáno:

- a) $v_a = 5cm$, $a : b : c = 2 : 3 : 4$,
- b) α, β, v_c ,
- c) α, β, t_c ,
- d) $a : b = 3 : 5$, $\gamma = 60^\circ$, $t_c = 6cm$.

Stejnolehlost – Úlohy na domácí přípravu

64. Určete p tak, aby existovala stejnolehlost se středem $[3, 2]$, zobrazující bod $[1, 4]$ na bod $[2, p]$. Napište rovnice této stejnolehlosti. [2]

65. Je dána kružnice k a bod M uvnitř této kružnice. Sestrojte všechny tětiny kružnice, které jsou bodem M rozděleny na části v poměru $2 : 3$.

[1]

66. Narýsujte libovolný trojúhelník ABC . Uvnitř strany AC sestrojte bod X a uvnitř strany BC bod Y tak, aby platilo $|AX| = |XY|$ a $XY \parallel AB$.

[2]

Kapitola 14

Mocnost bodu ke kružnici

14.1 Definice mocnosti bodu ke kružnici

Definice 14.1. Mocností bodu M ke kružnici $k(S; r)$ rozumíme reálné číslo m , pro které platí:

- (1) $|MX| \cdot |MY| = |m|$, kde X, Y jsou průsečíky kružnice k s její libovolnou sečnou procházející bodem M .
- (2) Je-li M vnějším bodem kružnice k , je $m > 0$.
- (3) Je-li M vnitřním bodem kružnice k , je $m < 0$.
- (4) Je-li $M \in k$, je $m = 0$.

Figure 14.1: Mocnost bodu M ke kružnici k

Věta 14.1. Je dána kružnice $k(S; r)$ a bod M , který na ní neleží. Potom pro libovolné dvě sečny kružnice k , které procházejí bodem M , jejichž průsečíky s kružnicí k označíme X_1, Y_1 a X_2, Y_2 , platí

$$|MX_1| \cdot |MY_1| = |MX_2| \cdot |MY_2|.$$

Věta 14.2. Nechť je dána kružnice $k(S; r)$ a bod M . Potom pro mocnost m bodu M ke kružnici k platí

$$m = d^2 - r^2,$$

kde $d = |MS|$ je vzdálenost bodu M od středu kružnice k .

Věta 14.3. Nechť M je vnější bod kružnice $k(S; r)$, m jeho mocnost ke kružnici k . Jestliže T je dotykový bod tečny vedené z bodu M ke kružnici k , tak platí $|MT|^2 = m$.

14.2 Chordála a potenční střed

Věta 14.4 (Chordála dvojice kružnic). Nechť jsou $k_1(S_1; r_1), k_2(S_2; r_2)$ dvě nesoustředné kružnice. Množina bodů X , které mají k oběma kružnicím stejnou mocnost, je přímka $h \perp S_1S_2$. Jestliže kružnice k_1, k_2 mají společný bod M , potom přímka h prochází tímto bodem.

Poznámka. Přímka h , která je množinou bodů X , majících stejnou mocnost k nesoustředným kružnicím k_1, k_2 se nazývá **chordála** (též potenční přímka) kružnic k_1, k_2 .

Poznámka. Bod, který má ke třem vzájemně různým kružnicím stejnou mocnost se nazývá **potenční bod** (též potenční střed).

Figure 14.2: Chordála h kružnic k_1, k_2 , potenční bod P kružnic k_1, k_2, l

Analytické vyjádření chordály

Chordálu kružnic $k_1(S_1[m_1, n_1], r_1), k_2(S_2[m_2, n_2], r_2)$ s rovnicemi $k_1 : (x - m_1)^2 + (y - n_1)^2 = r_1^2$ a $k_2 : (x - m_2)^2 + (y - n_2)^2 = r_2^2$ můžeme analyticky vyjádřit rovnicí:

$$(x - m_1)^2 + (y - n_1)^2 - r_1^2 = (x - m_2)^2 + (y - n_2)^2 - r_2^2 \quad (14.1)$$

Příklad 14.1. Sestrojte chordálu dvou nesoustředných kružnic k_1, k_2 , které nemají společný bod.

Příklad 14.2. Určete analyticky množinu všech bodů roviny, které mají ke dvěma daným kružnicím stejnou mocnost.

Příklad 14.3. Sestrojte kružnici k , která prochází danými body $A \neq B$ a dotýká se dané přímky t .

14.3 Cvičení: Mocnost bodu ke kružnici

67. Je dán úhel $\angle AVB$ a uvnitř něho bod M . Sestrojte kružnici, která prochází bodem M a dotýká se přímk AV, BV .
68. Obdélník má velikosti stran a, b . Máme sestrojit
- a) libovolný obdélník stejného obsahu,
 - b) obdélník stejného obsahu, jehož jedna strana má danou velikost c .
69. Jsou dány dvě nesoustředné kružnice k_1, k_2 a přímka p . Na této přímce určete bod P tak, aby tečny z něho vedené ke kružnicím k_1, k_2 měly stejnou délku.
70. Sestrojte kružnici, která se dotýká dané kružnice $k(S; r)$ a prochází dvěma různými body A, B , které leží vně dané kružnice k .
71. Je dán lichoběžník $ABCD$ se základnami AB, CD , $|AB| > |CD|$. Uvnitř úsečky AD sestrojte bod P a uvnitř úsečky BC bod Q tak, aby platilo zároveň $PQ \parallel AB$ a $PC \parallel AQ$.
72. Sestrojte lichoběžník $ABCD$, jsou-li dány délky jeho ramen $|BC| = 4.5\text{cm}$, $|DA| = 3\text{cm}$ a velikost 75° úhlu, který svírají přímky BC a AD , platí-li navíc $|AB||CD| = |AC|^2$.

Kapitola 15

Inverze

V této kapitole se nejprve seznámíme s inverzí jako takovou, potom se zaměříme na její konkrétní příklady, *sférickou inverzi* v trojrozměrném prostoru a *kruhovou inverzi* v rovině. Kruhové inverzi se budeme podrobně věnovat i v příští kapitole. Otázka inverzí je pojednána v [16] na str. 83–92.

Definice 15.1 (Inverze). Inverze se středem S a koeficientem κ ($\kappa \neq 0$) v eukleidovském prostoru E_n je zobrazení množiny $E_n - \{S\}$ na sebe, které každý bod X zobrazí na bod X' tak, že

a) pro $\kappa > 0$ jsou polopřímky SX, SX' totožné, pro $\kappa < 0$ jsou potom opačné,

b) $|SX| = \frac{|\kappa|}{|SX'|}$.

Je zřejmé, že body S , X (vzor) a X' (obraz) jsou kolineární. K určení inverze stačí zadat *střed* S a dvojici bodů, např. A , A' , ve vztahu *vzor* a *obraz*.

Poznámka. Definice inverze je na první pohled analogická s definicí stejnolehlosti. Definice těchto dvou zobrazení v eukleidovském prostoru se liší akorát ve vztahu mezi vzdálenostmi $|SX'|$ a $|SX|$. Zatímco u stejnolehlosti je $|SX'|$ přímo úměrná $|SX|$ (tj. $|SX'| = \kappa|SX|$, kde κ je koeficient stejnolehlosti), u inverze je $|SX'|$ nepřímo úměrná $|SX|$ (tj. $|SX'| = \frac{\kappa}{|SX|}$, kde κ je koeficient inverze).

Příklad 15.1. Dokažte, že zobrazení v rovině, jehož princip je naznačen na Obr. 15.1 (kružnice k má střed S a poloměr r ; body X , X' a S leží v přímce p), splňuje definici inverze.

Figure 15.1: Inverze v rovině

Řešení: Z podobnosti trojúhelníků $\triangle SXP \sim \triangle SQX'$ vyplývá vztah $|SX'| = \frac{r^2}{|SX|}$. Zobrazení tak splňuje definici inverze dané středem S a koeficientem $\kappa = r^2$, kde r je poloměr dané kružnice k . Jedná se o tzv. *kruhovou inverzi* určenou kružnicí k . Tomuto zobrazení se budeme podrobně věnovat v kapitole 16. Tam si také uvedeme ještě jeden mechanismus přiřazení obrazu danému bodu v kruhové inverzi.

15.1 Sférická inverze

Nyní uvažujme trojrozměrnou variantu Obr. 15.1, kde místo kružnice k figuruje sféra (kulová plocha) ω se středem S a poloměrem r a místo přímky p je dána rovina ρ procházející bodem S , kolmo na spojnici dvou diametrálně protilehlých bodů (pólů) P, Q , viz Obr. 15.2.

Figure 15.2: Inverze v prostoru – Sférická inverze

Jedná se o tzv. *sférickou inverzi* určenou sférou (kulovou plochou) ω se středem S a poloměrem r . Opět, tak jako v případě rovinné varianty z příkladu 15.1, není obtížné dokázat, že toto zobrazení přiřazující bodu $X \in \rho$ obraz $X' \in \rho$ splňuje definici 15.1. Postup tohoto přiřazení lze přitom popsat pomocí složení dvou zobrazení, z nichž jedno je tzv. *stereografická projekce* a druhé je zobrazení k této projekci inverzní.

15.2 Stereografická projekce

Pojednání o tomto zobrazení a jeho vlastnostech lze najít např. v [8]. Zde je také uvedena informace, že se stereografickým průmětem pracoval již Hipparchos kolem roku 150 př. n. l.

Figure 15.3: Stereografická projekce

Definice 15.2 (Stereografická projekce). Stereografický průmět kulové plochy je středovým průmětem kulové plochy pro střed promítání S ležící na kulové ploše ω a pro průmětnu π rovnoběžnou s tečnou rovinou kulové plochy ve středu promítání S , viz Obr. 15.3. [8]

Poznámka. Průmětna π se většinou volí tak, jak je znázorněno na Obr. 15.3, tj. prochází středem O kulové plochy kolmo na přímkou OS .

Stereografická projekce má dvě důležité vlastnosti:

(1) Kružnice kulové plochy ω se promítají opět do kružnic, viz Obr. 15.4.

Figure 15.4: Obrazem kružnice je opět kružnice

(2) Úhel dvou křivek kulové plochy ω se u jejich obrazů zachovává (zobrazení, která zachovávají velikost úhlu nazýváme *konformní*), viz Obr. 15.5.

Figure 15.5: Velikost úhlu se zachovává

15.3 Vybrané vlastnosti sférické inverze

Podíváme-li se zpět na Obr. 15.2 vidíme, že sférickou inverzi lze složit ze dvou zobrazení. Bod X se nejprve zobrazí na bod X_1 prostřednictvím inverzního zobrazení ke stereografické projekci z bodu P na rovinu π , potom se bod X_1 zobrazí na X' ve stereografické projekci z bodu Q na rovinu π .

Inverze je *involutorní zobrazení*, to znamená, že je-li obrazem bodu X bod X' , je obrazem bodu X' bod X .

Přitom body uvnitř sféry (v případě kruhové inverze pak kružnice) se zobrazují vně, a naopak body vně sféry (kružnice) se zobrazují dovnitř. Body sféry (kružnice) jsou potom samodružné.

Snadno ověříme skutečnost, že přibližuje-le se bod X ke středu S inverze, jeho obraz X' se neomezeně vzdaluje. Přirozeně se tak nabízí myšlenka, že obrazem bodu S , který je v definici 15.1 z eukleidovského prostoru vyňat, je bod v nekonečnu. Tuto myšlenku precizuje zavedení tzv. *Möbiova prostoru*, viz např. [16], str. 85 (August Ferdinand Möbius, 1790–1868).

Möbiovým prostorem rozumíme eukleidovský prostor E_n rozšířený o tzv. *nevlastní bod* (tj. bod v nekonečnu). Značíme ho $M_n = E_n \cup \{\infty\}$. Tento nevlastní bod je potom v Möbiově prostoru obrazem středu inverze S .

Kapitola 16

Kruhová inverze

Definice 16.1. Kruhová inverze určená kružnicí $\omega(S, r)$ (viz Obr. 16.1) je zobrazení, které každému bodu $X \neq S$ přiřadí bod X' tímto způsobem:

- (1) $X' \in \mapsto SX$,
- (2) $|SX| \cdot |SX'| = r^2$.

Figure 16.1: Kruhová inverze

Z definice vyplývá, že kruhová inverze je *involutorní* zobrazení, tj. obrazem bodu X' je bod X .

Otázkou je, jak toto zobrazení konstrukčně provést¹. Na Obr. 15.1 je jeden možný způsob, založený, jak už víme, na projekcích z bodů P a Q . Obvykle se však používá jiný způsob, založený na Eukleidově větě o odvěsně. Nyní se s ním pomocí Obr. 16.2 seznámíme. Jestliže T je bod dotyku tečny

Figure 16.2: Kruhová inverze – konstrukce obrazu bodu X

kružnice ω vedené z bodu X , je $\triangle XST$ pravoúhlý trojúhelník s přeponou XS . Potom pro patu Y výšky sestrojené z vrcholu T na přeponu XS dle *Eukleidovy věty o odvěsně pravoúhlého trojúhelníku* platí

$$|SY| \cdot |SX| = r^2.$$

Je tedy zřejmé, že bod Y je obrazem bodu X v souladu s definicí 16.1. Příslušnou konstrukci proto můžeme použít k sestrojení obrazu bodu X

¹Při rýsování v GeoGebře tuto otázku řešit nemusíme. Program má implementován nástroj *Kruhová inverze*. Při jeho použití stačí zadat bod, který chceme zobrazit a určující kružnici.

kruhové inverzi. Přitom je třeba mít na paměti, že kruhová inverze je involutorním zobrazením. Obrazem bodu Y (vnitřní bod kružnice ω) je tedy naopak zase bod X (vnější bod kružnice ω). Pro úplnost připomeňme, že body kružnice ω jsou samodružné, zobrazí se samy na sebe, opět v souladu s definicí 16.1.

16.1 Vybrané vlastnosti kruhové inverze

Kruhová inverze je příkladem *nelineárního zobrazení*, nejedná se o afinní zobrazení, přímka se až na speciální případy nezobrazuje na přímku (přímky, které neprocházejí středem inverze, se zobrazují na kružnice).

Z definice inverze je patrné, že vnitřní body určující kružnice (sféry) se zobrazují na vnější body a naopak.

Inverze je tzv. *konformní zobrazení*, tj. zachovává velikost úhlu.

Jak je na tom kruhová inverze se *samodružnými útvary*? Samodružnými body jsou body určující kružnice. Samodružnými přímkami jsou přímky procházející středem inverze. Samodružné jsou ty kružnice, které ortogonálně protínají určující kružnici.

Nyní si tyto vlastnosti uvedeme formou vět (jejichž důkaz je však většinou přenechán čtenáři).

Věta 16.1. Vnitřní body určující kružnice se zobrazí na vnější body této kružnice a naopak, vnější body se zobrazí na vnitřní.

Věta 16.2. Jestliže jsou A', B' obrazy bodů A, B v kruhové inverzi, jejíž střed S neleží na přímce AB (viz Obr. 16.3), potom $|\angle SAB| = |\angle SB'A'|$.

Figure 16.3: $|\angle SAB| = |\angle SB'A'|$

Proof. Z definice kruhové inverze vyplývá $|SA'| \cdot |SA| = |SB'| \cdot |SB| = r^2$, tj. $\frac{|SA'|}{|SB'|} = \frac{|SB|}{|SA|}$. Protože trojúhelníky ABS a $B'A'S$ mají společný úhel při vrcholu S , jsou podle věty *sus* podobné. $\square$

Věta 16.3. Body přímky procházející středem inverze S se zobrazují opět na tuto přímku. S výjimkou středu S .

Věta 16.4. Obrazem přímky p , která neprochází středem inverze S , je kružnice p' procházející středem S . Kromě bodu S .

Věta 16.5. Obrazem kružnice procházející středem inverze S (kromě bodu S) je přímka, která neprochází středem inverze S .

Figure 16.4: Obrazem přímky p je kružnice p' a naopak.

Proof. Při znalosti Thaletovy kružnice lze tuto větu dokázat jako důsledek věty 16.2, viz Obr. 16.4. $\square$

Věta 16.6. Obrazem kružnice, která neprochází středem inverze S je kružnice.

Figure 16.5: Obrazem kružnice k , která neprochází středem S , je kružnice k' a naopak.

Proof. K důkazu lze využít mocnost bodu ke kružnici, konkrétně mocnosti bodu S ke kružnicím k a k' , viz Obr. 16.5. $\square$

Poznámka. Na Obr. 16.5 je patrná jedna typická vesměs však opomíjená vlastnost kruhové inverze, že obrazem středu kružnice k není střed kružnice k' , viz body O a O' na obrázku.

Věta 16.7. Nutnou a postačující podmínkou, aby kružnice k se středem O , různá od určující kružnice ω , byla v kruhové inverzi samodružná je, aby **ortogonálně** protínala určující kružnici inverze ω .

Figure 16.6: Samodružná kružnice k ortogonálně protíná určující kružnici ω .

Proof. K důkazu opět využijeme mocnost bodu ke kružnici, konkrétně mocnost bodu S ke kružnici k , viz Obr. 16.6. $\square$

Poznámka. Na Obr. 16.6 opět stojí za pozornost fakt, že ačkoliv se kružnice k zobrazuje sama na sebe, její střed O se zobrazuje na jiný bod O' .

Věta 16.8. Nechť jsou a, b dvě kružnice nebo přímka a kružnice, které se dotýkají. Potom:

- a) Jestliže se dotýkají v bodě $T \neq S$, kde S je střed inverze, potom se dotýkají i jejich obrazy v bodě T' , který je obrazem bodu T .
- a) Jestliže se dotýkají ve středu inverze S , potom jsou jejich obrazem přímky $a' \parallel b'$.

Figure 16.7: Zachování incidence v kruhové inverzi

16.2 Analytické vyjádření kruhové inverze

Při odvození analytického vyjádření kruhové inverze se středem S a koeficientem κ vyjdeme z Obr. 16.8, kde je uvažovaná inverze zadána určující kružnicí ω se středem S a poloměrem r (víme, že platí $r^2 = \kappa$). Vztah mezi body S, X a X' můžeme v každém okamžiku popsat rovností

$$|SX'| = k \cdot |SX|, \quad (16.1)$$

která sice připomíná stejnoolehlost, liší se však od ní tím, že hodnota k není konstantní, ale závisí na X (místo k by asi bylo vhodnější psát $k(X)$). Víme přece, že kruhová inverze je definována vztahem

$$|SX'| = \frac{\kappa}{|SX|}. \quad (16.2)$$

Dáme-li vztahy (16.1) a (16.2) dohromady, dostaneme pro k vztah

$$k = \frac{\kappa}{|SX|^2}. \quad (16.3)$$

Nyní stačí rovnost (16.1) přepsat do tvaru $X' - S = k \cdot (X - S)$, odkud po dosazení z (16.3) odvodíme konečné analytické vyjádření kruhové inverze. Pro obraz X' bodu X v kruhové inverzi se středem S a koeficientem κ tak platí

$$X' = S + \frac{\kappa}{|SX|^2} \cdot (X - S), \quad (16.4)$$

případně

$$X' = S + \frac{r^2}{|SX|^2} \cdot (X - S), \quad (16.5)$$

pro určující kružnici ω se středem S a poloměrem r .

Figure 16.8: Analytické vyjádření kruhové inverze.

16.3 Cvičení: Kruhová inverze

1. V jaký útvar převede kruhová inverze kružnici a její dvě tečny, které jsou

a) různoběžné, b) rovnoběžné?

2. Prozkoumejte obrazy těchto dvou útvarů v kruhové inverzi:

a) dvě na sebe kolmé přímky, b) kružnice a přímka, která prochází jejím středem.

3. Je dána přímka p , která protíná danou kružnici k v bodech K , L a je dán bod B , ležící mimo přímku p i kružnici k . Bodem B veďte kružnici, která se dotýká p i k .

4. Sestrojte kružnici procházející danými body A , B a dotýkající se dané kružnice k ; body A , B jsou vnější body kružnice k .

5. Jsou dány tři kružnice k_1 , k_2 , k_3 , které se navzájem protínají a všechny procházejí bodem O . Sestrojte kružnici k , která se dotýká kružnic k_1 , k_2 , k_3 .

6. Jsou dány tři kružnice k_1 , k_2 , k_3 , z nichž se každé dvě zvenku dotýkají. Sestrojte kružnici k , dotýkající se daných kružnic.

7. Jsou dány dvě dotýkající se kružnice k_1 , k_2 a přímka p . Sestrojte kružnici, která se dotýká kružnic k_1 , k_2 a přímky p .

8. Jsou dány dvě přímky p_1 , p_2 a kružnice k , která se dotýká přímky p_1 . Sestrojte kružnici, která se dotýká přímek p_1 , p_2 a kružnice k .

9. Jsou dány dvě dotýkající se kružnice k_1 , k_2 a přímka p . Sestrojte kružnici se středem na přímce p , která se dotýká kružnic k_1 , k_2 .

10. Jsou dány tři kružnice k_1 , k_2 , k_3 , z nichž k_1 a k_2 se protínají v bodech A , B ; k_3 leží vně k_1 i k_2 . Sestrojte kružnici k , která se dotýká kružnic k_1 , k_2 , k_3 .

11. V rovině je dán trojúhelník ABC . Najděte střed kruhové inverze zobrazující bod A na bod B , je-li bod C samodružný.

- 12.** Určete střed kruhové inverze s koeficientem 2, při které se bod $[1, 0]$ zobrazí na bod $[2, 0]$.
- 13.** Existuje kruhová inverze, při níž jsou body $[-1, 0], [1, 0]$ samodružné a bod $[0, 0]$ se zobrazí na bod $[0, 1]$? Při kladné odpovědi určete střed této inverze, koeficient a analytické vyjádření.
- 14.** Při kterých kruhových inverzích se zobrazí bod $[0, 1]$ na bod $[0, 9]$ a bod $[2, 0]$ do vlastního bodu na ose x ? Určete vždy střed a koeficient inverze.
- 15.** V omezené nákresně je dána přímka t a na ní přístupný bod T . Dále je dán nepřístupný bod $M = p \cap q$; p, q jsou přímky. Sestrojte kružnici k , která prochází bodem M a přímky t se dotýká v bodě T .
- 16.** V omezené nákresně sestrojte střed S kružnice k procházející nepřístupnými body $A = x \cap y, B = u \cap v$ a přístupným bodem C (x, y, u, v jsou dané přístupné přímky).

Appendix A

Středové promítání v $\bar{E}_3$

Středové promítání patří mezi zobrazení zvaná *kolineace*. Kolineace je nejobecnějším možným zobrazením, které zachovává linearitu geometrických útvarů, [1].

Existují různé druhy kolineací. Z kurzů deskriptivní geometrie je známa *středová kolineace*, viz dodatek B, str. 175.

Uvažujeme středové promítání v prostoru $\bar{E}_2$ nebo v prostoru $\bar{E}_3$. Nejprve si probereme podobu středových průmětů základních útvarů při středovém promítání prostoru $\bar{E}_3$ do roviny π se středem S ($S \notin \pi$).

A.1 Zobrazení bodu

Viz Obr. A.1. Vlastní bod se zobrazí opět na vlastní bod ($A \rightarrow A'$), nebo, pokud leží v rovině ρ procházející středem S rovnoběžně s průmětnou π , zobrazí se na nevlastní bod ($B \rightarrow B'_\infty$). Nevlastní bod (tj. směr přímky v $\bar{E}_3$) se zobrazí na vlastní bod, tzv. *úběžník* ($U_\infty \rightarrow U'$), nebo, pokud přímka leží v rovině ρ procházející středem S rovnoběžně s průmětnou π , zobrazí se sám na sebe, tj. opět na nevlastní bod.

Figure A.1: Středové průměty bodu v $\bar{E}_3$.

A.2 Zobrazení přímky

Viz Obr. A.2. Přímka se zobrazí opět na přímku ($a \rightarrow a'$, bod P je samodružný, nazýváme ho *stopník* dané přímky), nebo, pokud je přímkou

promítací, tj. prochází středem S , zobrazí se na bod ($q \rightarrow Q'$). Přímka ležící v rovině ρ procházející středem S rovnoběžně s průmětnou π se potom zobrazí na nevlastní přímku roviny π ($u \rightarrow u_\infty$) sám na sebe, tj. opět na nevlastní bod.

Figure A.2: Středové průměty přímky v $\bar{E}_3$.

Zajímavá je otázka, jak vypadají středové průměty dvou rovnoběžek. Jak dokumentuje Obr. A.3, středovými průměty dvou rovnoběžek jsou

Figure A.3: Středové průměty rovnoběžek v $\bar{E}_3$ nejsou rovnoběžné.

obecně dvě různoběžky ($a \rightarrow a', b \rightarrow b'; a \parallel b, a'b'$), jejichž společným bodem je *úběžník* (bod U' na Obr. A.3), obraz nevlastního bodu (směru) těchto rovnoběžek.

A.3 Zobrazení úsečky

Poznamenejme pouze, že obrazem úsečky ve středovém promítání nemusí být úsečka. Jak vidíme na Obr. A.4, úsečka AB v obecné poloze se zobrazí na úsečku $A'B'$, zatímco úsečka DC , která je kolmá k průmětně π a jejíž jeden krajní bod D leží v rovině ρ procházející středem S rovnoběžně s průmětnou π , se zobrazuje na polopřímku s počátečním bodem D' , jejíž směr je dle orientace uvedeného na obrázku určen nevlastním obrazem D_∞ bodu D .

Figure A.4: Středové průměty bodu v $\bar{E}_3$.

A.4 Zobrazení roviny

Viz Obr. A.5. Pokud je rovina promítací, tj. prochází bodem S , je jejím středovým průmětem přímka, její stopa ($\varphi \rightarrow p^\varphi$). V obecném případě je pak středovým průmětem roviny celá průmětna π ($\alpha \rightarrow \pi$). Průsečnici roviny s průmětnou nazýváme *stopou* roviny (přímky p^α a p^φ na obrázku).

Nevlastní přímka roviny se promítá do tzv. *úběžnice*. Úběžnicí roviny α je přímka u'^α .

Figure A.5: Středové průměty roviny v $\bar{E}_3$.

Appendix B

Středová kolineace

B.1 Původ středové kolineace

Jak naznačuje Obr. B.1, středová kolineace (se středem S), jako vzájemně jednoznačné zobrazení $\bar{E}_2$ na sebe, je výsledkem středového průmětu (se středem S') středového promítání (se středem S_1) mezi dvěma různoběžnými rovinami v prostoru E_3 .

Figure B.1: Vznik středové kolineace

Definice B.1 (Středová kolineace). Středovou kolineací (též perspektivní kolineací, osovou kolineací či homologií) rozumíme vzájemně jednoznačné zobrazení roviny $\bar{E}_2$ těchto vlastností (viz Obr. B.2):

1. Spojnice odpovídajících si bodů procházejí pevným bodem - **středem kolineace**.
2. Průsečík odpovídajících si přímek leží na pevné přímce - **ose kolineace**.
3. Incidence se zachovává.

Figure B.2: Zobrazení bodu ve středové kolineaci se středem S a s osou o

Poznámka. Tři kolineární body (tj. tři body na přímce) přejdou tímto zobrazením opět v body kolineární - proto KOLINEACE.

Poznámka. Středová kolineace je určena:

- osou o (samodružná přímka)
- středem S (samodružný bod)
- dvojicí odpovídajících si bodů A, A' ; $S \in AA'$ nebo přímek p, p' ; $S \notin p, p'$.

Příklad B.1. Ve středové kolineaci určené osou o , středem S a dvojicí bodů A, A' sestrojte:

- a) obraz bodu X ,
- b) obraz přímky p .

Příklad B.2. Ve středové kolineaci určené středem, osou a jedním párem odpovídajících si přímek sestrojte:

- a) obraz bodu B ,
- b) obraz přímky m .

Věta B.1. Střed a každý bod osy kolineace jsou jejími samodružnými body. Osa kolineace a každá přímka procházející jejím středem jsou samodružné přímky.

Věta B.2. Kolineace je určena, je-li dán její **střed**, **osa** a jeden **pár odpovídajících si bodů nebo přímek**, jež nejsou incidentní ani se středem, ani s osou kolineace.

Charakteristika kolineace

$$(SA_1AA') = (SB_1BB') = \lambda$$

Příklad B.3. Středová kolineace je určena středem, osou a dvojicí sobě odpovídajících bodů. Sestrojte obraz nevlastního bodu U_∞ přímky p .

Řešení: Viz Obr. B.3.

Figure B.3: Zobrazení nevlastního bodu přímky p ve středové kolineaci se středem S a s osou o

Úběžník a úběžnice

- Úběžník je bod, který je v dané kolineaci obrazem nevlastního bodu (viz bod U' na Obr. B.3).
- Úběžnice je přímka, která je obrazem nevlastní přímky.

Příklad B.4. Úběžnice je rovnoběžná s osou kolineace. Dokažte.

Řešení: Důkaz založíme na skutečnosti, že osa kolineace je přímkou samodružných bodů. Protože úběžnice je obrazem nevlastní přímky, nemůže mít s osou kolineace jiný společný bod než bod nevlastní.

Příklad B.5. Sestrojte úběžnici v kolineaci dané středem, osou a

- a) párem odpovídajících si bodů,
- b) párem odpovídajících si přímek.

Řešení: Řešení ad a) viz Obr. B.4

Figure B.4: Zobrazení úběžnice u' ve středové kolineaci se středem S a s osou o

Příklad B.6. Ve středové kolineaci najděte alespoň jeden bod V , jehož obrazem je **nevlastní bod**.

Věta B.3. V kolineaci existují dvě úběžnice (1. a 2. úběžnice nebo úběžnice a protiúběžnice). Vzdálenost středu kolineace od jedné z nich je rovna vzdálenosti osy kolineace od druhé z nich; přitom buď obě tyto úběžnice leží mezi středem a osou kolineace, nebo střed a osa kolineace leží mezi těmito úběžnicemi.

Věta B.4. Kolineace je určena středem, osou a jednou úběžnicí.

Příklad B.7. Ve středové kolineaci určené středem S , osou o a úběžnicí u sestrojte obraz bodu A .

Věta B.5. Dvojpoměr se kolineací zachovává.

Příklad B.8. Střed úsečky se kolineací většinou nezachovává. Ukažte.

Příklad B.9. Středová kolineace je dána středem S , osou o a dvojicí bodů B , B_∞ . Najděte obraz bodu A .

B.2 Kolineace kružnice a kuželosečky

Kuželosečce odpovídá v kolineaci zase kuželosečka. Obrazem kružnice v kolineaci tak může být elipsa, parabola nebo hyperbola. Na čem to závisí?

Příklad B.10. Sestrojte elipsu, která odpovídá kružnici k v kolineaci dané osou, středem a úběžnicí.

Při konstrukci obrazu kuželosečky v kolineaci využíváme následující vlastnosti:

1. Tečna kuželosečky k přejde kolineací v tečnu kuželosečky k' .
2. Dvojpoměr se kolineací zachovává.
3. Přímkám rovnoběžným s osou kolineace odpovídají přímky téhož směru.
4. Kuželosečky k, k' odpovídající si v kolineaci mají společné průsečíky s osou kolineace a společné tečny vedené k nim ze středu kolineace.

5. Polární vlastnosti kuželoseček:

- Je-li přímka p polárou bodu P vzhledem ke kuželosečce k , pak body dotyku T_1, T_2 tečen kuželosečky k z bodu P jsou průsečíky p s k .
- Bod P indukují na kuželosečce *involuci*.
- Dva body, z nichž každý leží na poláře toho druhého vzhledem k téže kuželosečce, se nazývají *sdrúžené póly*.

6. Průměr kuželosečky

- Každá vlastní přímka, jejíž pól je bod nevlastní.
- Spojnice bodu dotyku dvou rovnoběžných tečen kuželosečky (kromě paraboly).
- Spojnice průsečíku dvou tečen kuželosečky se středem úsečky určené body dotyku těchto tečen s kuželosečkou.
- Spojnice středu dvou rovnoběžných tětiv.
- Každá přímka procházející středem kuželosečky (středové).

7. Střed kuželosečky

- Pro středové kuželosečky (elipsa, hyperbola) je to pól nevlastní přímky. Pól nevlastní přímky vzhledem k parabole je bod dotyku nevlastní přímky s parabolou.

Příklad B.11. Sestrojte parabolu, která odpovídá kružnici k v dané kolineaci.

Příklad B.12. Sestrojte hyperbolu, která odpovídá kružnici k v dané kolineaci.

Příklad B.13. Sestrojte kuželosečku, znáte-li tři její body a dvě tečny.

Řešení: Viz Obr. B.5

Figure B.5: Konstrukce kuželosečky (elipsy) z daných 3 bodů a 2 tečen

Příklad B.14. Středová kolineace v $\overline{E}_2$ je dána osou $o: y = 0$, středem $S = \langle 1, 0, a \rangle$ a dvojicí bodů $B = \langle 1, 0, b \rangle$, $B'_\infty = \langle 0, 0, b' \rangle$. Volte

hodnoty parametrů a, b, r tak, aby obrazem kružnice $x^2 + y^2 = r^2$ byla postupně **parabola**, **hyperbola** a **elipsa**. Sestrojte.

Appendix C

Osová afinita v rovině

Určení osově afinity. Charakteristika a rovnice osově afinity. Elace. Základní afinity. Involuce.

C.0.1 Základní afinity

Základními afinitami nazýváme afinity, jejichž všechny samodružné body tvoří nadrovinu prostoru A_n . Příklady základních afinit jsou osová afinita v A_2 , osová souměrnost v E_2 nebo rovinová souměrnost v E_3 .

Základní afinita taková, že přímka spojující vzor a obraz je rovnoběžná s nadrovinou samodružných bodů, se nazývá elace.

Figure C.1: Osová afinita v rovině, jejíž směr je rovnoběžný s její osou, jako příklad elace

Osová afinita je určena osou o , směrem s a charakteristikou κ . Směr a charakteristika jsou většinou zadány dvojicí sobě odpovídajících bodů A, A' .

Příklad C.1. V osově afinitě určené osou o a dvojicí sobě odpovídajících bodů A, A' zobrazte bod X a přímku p .

Řešení: Viz Obr. C.2. Při určení obrazu bodu a přímky využijeme

Vlastnosti osově afinity

- (1) Přímka spojující sobě odpovídající body je rovnoběžná se směrem afinity.
- (2) Sobě odpovídající přímky se protínají na ose afinity.
- (3) Incidence se zachovává.
- (4) Osa afinity a přímky rovnoběžné se směrem afinity jsou samodružnými přímkami.

Figure C.2: Osová afinita v rovině, řešení příkladu C.1

Postupujeme tak, že sestrojíme přímkou $p = \overleftrightarrow{AX}$ a určíme její průsečík I s osou afinity o . Z vlastnosti (2) vyplývá, že přímkou p' , která je obrazem přímky p , také prochází bodem I . Z vlastnosti (3) pak plyne, že p' prochází rovněž bodem A' . Sestrojíme tedy přímkou $p' = \overleftrightarrow{A'I}$. Obraz bodu X , bod X' , pak určíme podle vlastnosti (1) jako průsečík p' s přímkou jdoucí bodem X rovnoběžně s $\overleftrightarrow{AA'}$.

Charakteristika osově afinity

Charakteristikou osově afinity κ rozumíme dělicí poměr

$$(A'AA_1) = \kappa,$$

kde body A, A' jsou ve vztahu vzor a obraz a bod A_1 je průsečík přímky AA' s osou afinity o , viz Obr. C.2. Charakteristika osově afinity je rovna jejímu modulu, proto se κ nazývá také modul osově afinity.

Poznámka. Osová souměrnost v rovině je zvláštním případem osově afinity, jejíž směr $\vec{s}$ je kolmý na osu o ($\vec{s} \perp o$) a jejíž charakteristika κ je rovna -1 ($\kappa = -1$).

Příklad C.2. Je dána přímka o , trojúhelník ABC a dvojice bodů X, X' . Sestrojte obraz trojúhelníka ABC v osově afinitě s osou o , v níž je obrazem bodu X bod X' .

Věta C.1. Rovnoběžné přímky $a \parallel b$ se v osově afinitě zobrazí opět na rovnoběžné přímky $a' \parallel b'$.

Proof. Důkaz provedeme sporem. Předpokládáme, že obrazy rovnoběžných přímek jsou různoběžky. Dostaneme se do sporu s definicí charakteristiky afinity. $\square$

Věta C.2. Dělicí poměr se v osově afinitě zachovává, tj. $(ABC) = (A'B'C')$.
Důsledky věty C.2:

- 1) Střed úsečky se zobrazí zase na střed úsečky.
- 2) Zachovává se uspořádání bodů na přímce.

Příklad C.3. Je dána přímka o a trojúhelník ABC . Sestrojte obraz $A'B'C'$ trojúhelníka ABC v takové osově afinitě s osou o , aby byl trojúhelník $A'B'C'$ rovnostranný.

(Postup konstrukce viz <http://tube.geogebra.org/student/mni2IYH1c>)

Věta C.3. Nechť P je obsah trojúhelníka ABC a P' obsah jeho obrazu $A'B'C'$ v osově afinitě s charakteristikou κ . Potom $P' = |\kappa| \cdot P$.

Z výše uvedených vět C.1, C.2, C.3 plyne, že osová afinita má následující invarianty.

Invarianty osově afinity

- (1) Rovnoběžnost přímek.
- (2) Dělicí poměr.
- (3) Poměr obsahu obrazců.

Charakteristika základní afinity

Charakteristiku přiřazujeme každé základní afinitě, která není elací. Platí

$$\kappa = (X'X X_1),$$

kde X_1 je průsečík $\overleftrightarrow{XX'}$ s nadrovinou samodružných bodů uvažované základní afinity.

Základní afinita jako involuce

Involutorní zobrazení, též involuce, je každé zobrazení afinního bodového prostoru na sebe, které není identitou, ale složeno samo se sebou je identitě rovno.

Základní afinita je involucí tehdy, když není elací a její charakteristika je rovna -1 .

C.0.2 Cvičení – Osová afinita

1. Pomocí výsledku Příkladu C.3 dokažte tvrzení: *Těžnice trojúhelníka se protínají v jednom bodě, který je dělí v poměru 1 : 2.*

2. Dokažte Větu C.3.

Appendix D

Vybrané věty projektivní geometrie

D.1 Pappova věta o šestiúhelníku

Následující větu poprvé dokázal *Pappos z Alexandrie* kolem roku 300 n. l. Její význam pro základy projektivní geometrie byl však rozpoznán až v 17. století, [2].

Věta D.1 (Pappova věta o šestiúhelníku). Jestliže A, C, E je trojice kolineárních bodů ležících na přímce k a B, D, F je další trojice kolineárních bodů tentokrát ležících na l , a jestliže se přímky AB, CD, EF protínají v uvedeném pořadí postupně s přímkami DE, FA, BC , potom jejich průsečíky $P = AB \cap DE, Q = CD \cap FA$ a $R = EF \cap BC$ leží v přímce (viz Obr. D.1, přímka p , tzv. *Pappova přímka*).

Proof. Větu zde uvádíme bez důkazu. Pěkný důkaz s využitím Menelaovy věty je publikován v [2]. $\square$

Figure D.1: Pappova věta o šestiúhelníku

Projektivní charakter věty D.1 spočívá v tom, že pojednává čistě jenom o incidenci, bez jakékoliv závislosti na délkách úseček a velikostech úhlů, i bez ohledu na uspořádání bodů (viz Obr. D.2).

Figure D.2: Pappova věta o šestiúhelníku, jiná uspořádání vrcholů

D.1.1 Šestiúhelník

Výše uvedená věta D.1 je deklarována ve spojení s šestiúhelníkem. Je otázkou, s jakým. Jedná se o šestiúhelník $ABCDEFGH$ (že jsou jeho

vrcholy zpřeházené a nejdou pěkně dokola, jak jsme zvyklí, to nevadí). Body P, Q, R pak můžeme interpretovat jako průsečíky protilehlých stran tohoto šestiúhelníku (více viz např. https://en.wikipedia.org/wiki/Pappus%27s_hexagon_theorem).

Proč nás zajímá právě uspořádání šesti bodů v rovině? Je známo, že kuželosečka je jednoznačně určena pěti body (viz např. nástroj *Kuželosečka daná pěti body* programu GeoGebra)¹.

Vezmeme-li libovolnou pětici bodů, vždycky je jimi určena nějaká kuželosečka. Nabízí se tak otázka, jakou podmínkou musí být spjato *šest bodů*, aby všechny ležely na jedné kuželosečce. Takovouto podmínku, kterou splňuje šest bodů ležících na jedné kuželosečce, objevil francouzský matematik a filozof *Blaise Pascal* (1623–1662) a uveřejnil ji roku 1640 (objevil ji ve svých 16 letech!), [6]. *Pascalově větě*, která o této podmínce pojdenává, se budeme věnovat v následující kapitole D.2. Zde si nejprve uvedeme některé poznatky a důležité pojmy související s organizací šesti bodů do formy šestiúhelníku.

Vzhledem k výše uvedenému je pochopitelné, že se budeme zabývat šesti body na kuželosečce (pro názornost se omezujeme na kružnici nebo elipsu). Šest bodů na kuželosečce, z nichž žádné tři sousední neleží v přímce, můžeme chápat jako vrcholy šestiúhelníku, který je kuželosečce vepsán. *Uvažujme jedno takové rozmístění šesti bodů na dané kuželosečce*. Pokud budeme body (a jejich pořadí jako vrcholů šestiúhelníku) rozlišovat očíslováním 1, 2, 3, 4, 5, 6, je dobré si uvědomit, že existuje tolik vepsaných šestiúhelníků odpovídajících dané šestici bodů, kolik je možných způsobů očíslování (též můžeme říkat *pojmenování*) těchto bodů, tj. $6! = 720$. Přitom ale vždy 12 z těchto šestiúhelníků má stejný tvar a liší se jenom pojmenováním vrcholů (který z vrcholů má číslo 1 a zda pokračujeme v záporném či v kladném smyslu, tj. 6 možností očíslování vrcholů na jednu stranu a 6 možností očíslování vrcholů na druhou stranu). Daným šesti bodům na kuželosečce tak lze přiřadit $720/12 = 60$ různých šestiúhelníků. Dva konkrétní příklady vidíme na Obr. D.3.

Figure D.3: Dva příklady šestiúhelníku vepsaného dané elipse (pro pevně zvolené umístění 6 bodů)

¹Tuto skutečnost můžeme zdůvodnit například tím, že dvě kuželosečky mohou mít nejvýše čtyři společné body. Pro jejich odlišení pak potřebujeme o jeden bod navíc. Další možností je argumentovat počtem vstupních údajů potřebných pro výpočet rovnice kuželosečky, tj. určení šesti koeficientů a, b, c, d, e, f v rovnici $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$. Vzhledem k tomu, že se jedná o homogenní rovnici, vystačíme se souřadnicemi pěti bodů.

U šestiúhelníku rozlišujeme dvojice vrcholů *sousedních* (1-2, 2-3, 3-4, 4-5, 5-6, 6-1), *střídavých* (1-3, 2-4, 3-5, 4-6, 5-1, 6-2) a *protilehlých* (1-4, 2-5, 3-6). Přímkou spojující dvojici protilehlých vrcholů šestiúhelníku budeme nazývat *diagonálou* (14, 25, 36). Mezi stranami šestiúhelníku nás budou zajímat *protilehlé strany* (12-45, 23-56, 34-61). Šestiúhelník má tedy tři dvojice protilehlých stran a tři diagonály.

Ačkoliv tři sousední vrcholy nesmí být kolineární, pro jiné trojice vrcholů to možné je. Větu D.1 tak můžeme přeformulovat tímto způsobem: *Jestliže je každá trojice střídavých vrcholů šestiúhelníku kolineární a jestliže se tři dvojice jeho protilehlých stran protínají, potom jsou průsečíky těchto stran kolineární* (viz Obr. D.4).

Figure D.4: Pappova věta pro šestiúhelník 123456

D.2 Pascalova věta

Jak už bylo uvedeno, následující větu formuloval ve svých 16 letech francouzský matematik a filozof *Blaise Pascal*, [2, 6].

Věta D.2 (Pascalova věta). Průsečíky protilehlých stran šestiúhelníku vepsaného kuželosečce jsou tři body ležící na jedné přímce (tzv. Pascalova přímka) a naopak, leží-li průsečíky protilehlých stran šestiúhelníku na jedné přímce, je tento šestiúhelník vepsán kuželosečce.

Proof. Větu zde uvádíme bez důkazu. Důkaz jejího speciálního případu pro šestiúhelník vepsaný kružnici s využitím Menelaovy věty je publikován v [2]. $\square$

Figure D.5: Pascalova věta

Figure D.6: Pascalova věta

Poznámka. B. Pascal formuloval výše uvedenou větu pro šestiúhelník vepsaný kružnici. Byl si však vědom její platnosti i pro šestiúhelník vepsaný libovolné kuželosečce, [2].

Pascalovu větu můžeme využít při řešení rozličných konstrukčních úloh. Pro ilustraci zde uvedeme dva příklady, řadu dalších konstrukcí najde zájemce v [6].

Příklad D.1. Je dáno pět bodů určujících kuželosečku. Jedním z nich prochází přímka. Určete její druhý průsečík s příslušnou kuželosečkou.

Řešení: Zadání i postup řešení ilustruje Obr. D.7. Danými pěti body jsou body 1, 2, 3, 4, 5. Danou přímkou je přímka a procházející bodem 5. Hledaným průsečíkem je potom bod 6. Konstrukce založená na Pascalově větě (věta D.2) je zřejmá. Dané body spolu s hledaným chápeme jako vrcholy šestiúhelníku vepsaného kuželosečce. Z daných prvků jsme schopni sestavit body P a Q , tj. i Pascalovu přímku p . Jejím průsečíkem R s přímkou 34 potom musí dle Pascalovy věty procházet přímka 16. Bod 6 tedy určíme jako průsečík přímek a a $1R$.

Figure D.7: Pascalova věta

Příklad D.2. Kuželosečka v rovině je dána pěti body. Určete další její body.

Řešení: Několikrát opakujeme konstrukci z řešení příkladu D.1, pro různě zvolené přímky a .

D.3 Brianchonova věta

Věta, kterou v roce 1806 publikoval francouzský matematik a chemik *C. J. Brianchon* (1783–1864), je duální větou k větě Pascalově, [6].

Věta D.3 (Brianchonova věta). Tři přímky spojující protilehlé vrcholy šestiúhelníku opsaného kuželosečce procházejí jedním bodem (tzv. Brianchonův bod) a obráceně, pokud spojnice protilehlých vrcholů šestiúhelníku procházejí jedním bodem, je tento šestiúhelník opsán kuželosečce (viz Obr. D.8).

Proof. Větu uvádíme bez důkazu. Důkaz její varianty pro kružnic viz [2].

□

Figure D.8: Brianchonova věta

Užitím Brianchonovy věty řešte následující příklady. Více podobných konstrukčních úloh na využití věty D.3 viz [6].

Příklad D.3. Kuželosečka je dána pěti tečnami. Daným bodem na jedné z nich veďte další tečnu k této kuželosečce.

Příklad D.4. Kuželosečka v rovině je dána pěti tečnami. Sestrojte několik dalších jejích tečen.

D.4 Desarguesova věta

Následující větu o perspektivě dvou trojúhelníků formuloval na základě hlubšího studia teorie perspektivy francouzský architekt *G. Desargues* (1593–1662).

Věta D.4 (Desarguesova věta o trojúhelnících). Jestliže je jeden ze dvou trojúhelníků obrazem druhého ve středovém promítání, leží průsečíky tří dvojic sobě odpovídajících stran těchto trojúhelníků v jedné přímce. Naopak, leží-li tři průsečíky sobě odpovídajících stran dvojice trojúhelníků v přímce, protínají se přímky spojující sobě odpovídající vrcholy v jednom bodě (viz Obr. D.9).

Proof. Větu uvádíme bez důkazu.

□

Figure D.9: Desarguesova věta

Poznámka. Vztah mezi dvojicí trojúhelníků popsáný Desarguesovou větou známe ze *středové kolineace*.

Appendix E

Afinní zobrazení z A_n do A_m

E.1 Rovnice afinního zobrazení z A_n do A_m

Nechť afinní bodový prostor A_n je určen počátkem P a bází $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$, tzn. $A_n = \{P; \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$. Podobně nechť $A'_m = \{Q; \vec{d}_1, \vec{d}_2, \dots, \vec{d}_m\}$. Nechť f je afinní zobrazení A_n do A'_m a φ asociované zobrazení k f tak, že

$$\varphi(\vec{e}_j) = \sum_{i=1}^m a_{ij} \vec{d}_i; \quad j = 1, \dots, n, \quad (\text{E.1})$$

tzn. koeficienty a_{ij} jsou souřadnice vektorů $\varphi(\vec{e}_j)$ v bázi zaměření prostoru A_m ,

$$f(P) = Q + \sum_{i=1}^m b_i \vec{d}_i, \quad (\text{E.2})$$

tzn. počátek $P \in A_n$ se zobrazuje do bodu $f(P) \in A'_m$, který má při počátku Q souřadnice b_i .

S ohledem na výše uvedené úmluvy nyní určíme vztah mezi souřadnicemi libovolného bodu $X \in A_n$ a jeho obrazu $f(X) \in A'_m$. Vyjádříme souřadnice X , $f(X)$:

$$X = P + \sum_{j=1}^n x_j \vec{e}_j, \quad (\text{E.3})$$

$$f(X) = Q + \sum_{i=1}^m x'_i \vec{d}_i. \quad (\text{E.4})$$

Zobrazíme-li bod X v afinitě f , můžeme dle uvedených vlastností zobrazení f a φ psát:

$$f(X) = f(P) + \sum_{j=1}^n x_j \varphi(\vec{e}_j).$$

Po dosazení z (E.1) a (E.2) dostáváme

$$f(X) = Q + \sum_{i=1}^m b_i \vec{d}_i + \sum_{j=1}^n x_j \sum_{i=1}^m a_{ij} \vec{d}_i,$$

po úpravě

$$f(X) = Q + \sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j + b_i \right) \vec{d}_i. \quad (\text{E.5})$$

Porovnáme-li koeficienty při $\vec{d}_i$ ve vyjádřeních (E.4) a (E.5), dostáváme hledané rovnice

$$x'_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j + b_i, \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (\text{E.6})$$

Jinou formou zápisu (E.6) je soustava rovnic

$$\begin{aligned} x'_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n + b_1 \\ x'_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n + b_2 \\ &\vdots \\ x'_n &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n + b_n, \end{aligned}$$

maticový zápis soustavy

$$\begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}, \quad (\text{E.7})$$

případně maticová rovnice

$$\mathbf{X}' = A \cdot \mathbf{X} + B. \quad (\text{E.8})$$

E.2 Rovnice homomorfismu asociovaného s afinním zobrazením

Nyní ještě určíme rovnice asociovaného zobrazení φ . Nechť vektor $\vec{u} \in V_n$ se zobrazí do vektoru $\varphi(\vec{u}) \in V'_m$. Pro souřadnice vzoru $\vec{u}$ a obrazu $\varphi(\vec{u})$

platí

$$\vec{u} = \sum_{j=1}^n u_j \vec{e}_j; \quad (\text{E.9})$$

$$\varphi(\vec{u}) = \sum_{i=1}^m u'_i \vec{d}_i \quad (\text{E.10})$$

Na (E.9) aplikujeme zobrazení φ a upravíme dle (E.1). Dostaneme

$$\varphi(\vec{u}) = \sum_{j=1}^n u_j \varphi(\vec{e}_j) = \sum_{j=1}^n u_j \sum_{i=1}^m a_{ij} \vec{d}_i.$$

Po úpravě

$$\varphi(\vec{u}) = \sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} u_j \right) \vec{d}_i. \quad (\text{E.11})$$

Srovnáním (E.11) s (E.10) dostaneme hledané rovnice asociovaného zobrazení:

$$u'_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} u_j, \quad i = 1, \dots, m. \quad (\text{E.12})$$

E.3 Věta o určenosti afinního zobrazení

Věta E.1 (O určenosti afinního zobrazení). Mějme dva afinní bodové prostory A_n, A'_m . Nechť $M_0, M_1, M_2, \dots, M_n$ je $n+1$ lineárně nezávislých bodů v A_n , $M'_0, M'_1, \dots, M'_n$ $n+1$ libovolně zvolených bodů v A'_m . Pak existuje právě jedno afinní zobrazení f prostoru A_n do A'_m , které přiřazuje bodům M_j body M'_j tak, že

$$M'_j = f(M_j); \quad j = 0, 1, \dots, n.$$

Proof. Ze Def. 7.2 asociovaného homomorfismu φ plyne, že jeho vztah k afinnímu zobrazení f lze vyjádřit vztahem $\varphi(X - P) = f(X) - f(P)$, který můžeme psát ve tvaru

$$f(X) = f(P) + \varphi(X - P). \quad (\text{E.13})$$

Odtud je zřejmé, že afinní zobrazení f lze určit (zadat) jednou dvojicí bodů ve vztahu vzor $\rightarrow$ obraz, v případě (E.13) je to dvojice $P \rightarrow f(P)$, a asociovaným homomorfismem φ . Z toho plyne důkaz věty E.1: Afinní zobrazení

je určeno dvojicí bodů vzor $\rightarrow$ obraz $M_0 \rightarrow M'_0$ a asociovaným homomorfismem φ jednoznačně určeným n nezávislými vektory $M_1 - M_0, M_2 - M_0, \dots, M_n - M_0$ a jejich obrazy (které mohou být závislé) $M'_1 - M'_0, M'_2 - M'_0, \dots, M'_n - M'_0$. $\square$

Příklad E.1. Zjistěte, zda existuje afinní zobrazení $f : A_2 \rightarrow A_3$, při kterém se body $B[1, 0], C[0, 1], D[2, p]$ zobrazí po řadě na body $B'[2, 1, -1], C'[3, 2, 0], D'[1, 0, 2]$.

Řešení v programu wxMaxima:

```
(%i1) r1:a11+b1=2; r2:a21+b2=1; r3:a31+b3=-1; r4:a12+b1=3; r5:a22+b2
      r6:a32+b3=0; r7:2*a11+p*a12+b1=1; r8:2*a21+p*a22+b2=0;
      r9:2*a31+p*a32+b3=2;
```

```
(%o1) b1 + a11 = 2
(%o2) b2 + a21 = 1
(%o3) b3 + a31 = -1
(%o4) b1 + a12 = 3
(%o5) b2 + a22 = 2
(%o6) b3 + a32 = 0
(%o7) a12 p + b1 + 2 a11 = 1
(%o8) a22 p + b2 + 2 a21 = 0
(%o9) a32 p + b3 + 2 a31 = 2
```

```
(%i10) res:solve([r1,r2,r3,r4,r5,r6,r7,r8,r9],
                 [a11,a12,a21,a22,a31,a32,b1,b2,b3])[1];
```

```
(%o10) [a11 = -1, a12 = 0, a21 = -1, a22 = 0, a31 = -\frac{p-3}{p+1}, a32 =
\frac{4}{p+1}, b1 = 3, b2 = 2, b3 = -\frac{4}{p+1}]
```

```
(%i11) ev([x1=a11*x+a12*y+b1,y1=a21*x+a22*y+b2,z1=a31*x+a32*y+b3],res
```

```
(%o11) [x1 = 3 - x, y1 = 2 - x, z1 = \frac{4 y}{p+1} - \frac{(p-3) x}{p+1} - \frac{4}{p+1}]
```

Příklad E.2. Určete rovnici afinního zobrazení $f : A_2 \rightarrow A_1$, při kterém se body $[2, 1], [3, 2], [0, 1]$ zobrazí po řadě na body $[2], [0], [8]$.

Příklad E.3. Určete rovnice rovnoběžného promítání prostoru A_3 do průmětny $\pi \subset A_3$, vzhledem k pevné lineární soustavě souřadnic prostoru A_3 , je-li

dána průmětna π rovnicí $2x_1 + x_2 - x_3 + 2 = 0$ a směr promítání je určen vektorem $\vec{s} = (2; 1; 3)$.

Příklad E.4. Určete rovnice afinního zobrazení $f : A_3 \rightarrow A_2$, které bodům $A = [1, 2, 3]$, $B = [0, 1, 1]$, $C = [1, -1, 2]$, $D = [3, 0, 1]$ přiřazuje v daném pořadí body $A' = [-1, 3]$, $B = [0, 2]$, $C = [0, 0]$, $D = [3, 1]$.

E.4 Rovnice afinity v rovině

Každé afinní zobrazení f v rovině E_2 , které bodu $X = [x, y]$ přiřazuje obraz $X' = [x', y']$, je možné zapsat rovnicemi

$$\begin{aligned} f : x' &= a_{11}x + a_{12}y + b_1 \\ y' &= a_{21}x + a_{22}y + b_2 \end{aligned} \quad (\text{E.14})$$

a naopak, každé zobrazení v rovině, které je dáno soustavou rovnic (E.14), je afinitou v rovině. Soustavu (E.14) můžeme zapsat také pomocí matic

$$\begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}. \quad (\text{E.15})$$

Potom řekneme, že afinitou je každé zobrazení, které lze zapsat maticovou rovnicí

$$\mathbf{X}' = A \cdot \mathbf{X} + B,$$

$$\text{kde } X' = \begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \text{ a } B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}.$$

Odvodíme si výše uvedené analytické vyjádření (E.14) afinního zobrazení f roviny na sebe (zkráceně afinity v rovině). Základní myšlenka tohoto odvození je ilustrována Obr. E.1. V rovině A_2 máme dvě afinní soustavy souřadnic (repéry), soustavu vzorů $\alpha = \{P; \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ (je určena počátkem P a bází $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ vektorového zaměření prostoru A_2) a soustavu obrazů $\omega = \{Q; \vec{d}_1, \vec{d}_2\}$ (určena počátkem Q a bází $\{\vec{d}_1, \vec{d}_2\}$ vektorového zaměření prostoru A_2). Přitom repér $\{P; \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ se působením uvažované afinity f zobrazí na repér $\{f(P); \varphi(\vec{e}_1), \varphi(\vec{e}_2)\}$, kde φ homomorfismus (lineární zobrazení) asociovaný k f . Obrazem bodu $X = [x_1, x_2]$ je bod $f(X) = X' = [x'_1, x'_2]$. Vztah mezi souřadnicemi $f(X)$ a X najdeme tak, že bod $f(X)$ vyjádříme vzhledem k oběma repérům $\{Q; \vec{d}_1, \vec{d}_2\}$ a $\{f(P); \varphi(\vec{e}_1), \varphi(\vec{e}_2)\}$ (viz Obr. E.1) a tato vyjádření porovnáme.

Figure E.1: Zobrazení bodu X v afinitě f v rovině

Nechť f je afinní zobrazení prostoru A_2 na sebe a φ je homomorfismus asociovaný k f . Potom obrazy $\varphi(\vec{e}_1), \varphi(\vec{e}_2)$ vektorů báze $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ můžeme vyjádřit rovnicemi

$$\varphi(\vec{e}_1) = a_{11}\vec{d}_1 + a_{21}\vec{d}_2, \quad (\text{E.16})$$

$$\varphi(\vec{e}_2) = a_{12}\vec{d}_1 + a_{22}\vec{d}_2, \quad (\text{E.17})$$

kde koeficienty a_{ij} jsou souřadnice vektorů $\varphi(\vec{e}_1), \varphi(\vec{e}_2)$ vzhledem k bázi $\{\vec{d}_1, \vec{d}_2\}$ a pro obraz $f(P)$ počátku P repéru α můžeme psát

$$f(P) = Q + b_1\vec{d}_1 + b_2\vec{d}_2, \quad (\text{E.18})$$

kde $[b_1, b_2]$ jsou jeho souřadnice vzhledem k repéru ω .

Nyní určíme vztah mezi souřadnicemi libovolného bodu $X \in A_2$ a jeho obrazu $X' = f(X) \in A_2$. Nejprve každý z těchto bodů zapíšeme v příslušném repéru, bod X v repéru α , bod $f(X)$ pak v repéru ω ,

$$X = P + x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2, \quad (\text{E.19})$$

$$f(X) = Q + x'_1\vec{d}_1 + x'_2\vec{d}_2. \quad (\text{E.20})$$

Potom, s využitím vlastností zobrazení f a φ , zapíšeme obraz bodu X ve tvaru

$$f(X) = f(P + x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2) = f(P) + \varphi(x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2) = f(P) + x_1\varphi(\vec{e}_1) + x_2\varphi(\vec{e}_2).$$

Po dosazení z (E.16), (E.17) a (E.18) dostáváme

$$f(X) = Q + b_1\vec{d}_1 + b_2\vec{d}_2 + x_1(a_{11}\vec{d}_1 + a_{21}\vec{d}_2) + x_2(a_{12}\vec{d}_1 + a_{22}\vec{d}_2).$$

Po úpravě a porovnání koeficientů při $\vec{d}_i$ s vyjádřením (E.20) dostáváme hledané rovnice afinity f v rovině

$$\begin{aligned} f : \quad x'_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + b_1, \\ x'_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + b_2. \end{aligned} \quad (\text{E.21})$$

Nyní ještě určíme rovnice asociovaného zobrazení φ . Nechť vektor $\vec{u} \in V_2$ se zobrazí do vektoru $\varphi(\vec{u}) \in V_2$. Pro souřadnice vzoru $\vec{u}$ a obrazu $\varphi(\vec{u})$ platí

$$\vec{u} = u_1\vec{e}_1 + u_2\vec{e}_2, \quad (\text{E.22})$$

$$\varphi(\vec{u}) = u'_1\vec{d}_1 + u'_2\vec{d}_2. \quad (\text{E.23})$$

Na (E.22) aplikujeme zobrazení φ a upravíme dle (E.16) a (E.17). Dostaneme

$$\varphi(\vec{u}) = u_1\varphi(\vec{e}_1) + u_2\varphi(\vec{e}_2) = u_1(a_{11}\vec{d}_1 + a_{21}\vec{d}_2) + u_2(a_{12}\vec{d}_1 + a_{22}\vec{d}_2).$$

Po úpravě a srovnání s (E.23) dostaneme hledané rovnice asociovaného zobrazení φ :

$$\begin{aligned}\varphi : \quad u'_1 &= a_{11}u_1 + a_{12}u_2, \\ u'_2 &= a_{21}u_1 + a_{22}u_2.\end{aligned}\tag{E.24}$$

Soustavu rovnic afinity v rovině (E.21) můžeme zapsat také pomocí matic, takto

$$\begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix},$$

stručněji pak ve tvaru

$$\mathbf{X}' = A \cdot \mathbf{X} + B.$$

E.5 Věta o určenosti afinity v rovině

Věta E.2 (O určenosti afinity v rovině). Necht K, L, M a K', L', M' jsou dvě skupiny nekolineárních bodů v rovině. Pak existuje jediná afinita f této roviny, která body K, L, M zobrazuje v daném pořadí na body K', L', M' .

Proof. Využijeme (E.14). Afinita f musí být dána takovými rovnícemi. Ukážeme, že za podmínek uvedených ve větě je tato afinita určena jednoznačně, tj. existuje jediná šestice $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, b_1, b_2$, která tuto afinitu specifikuje.

Pro jednotlivé dvojice bodů vzor $\rightarrow$ obraz dostaneme následující rovnice:

$$K[k_1, k_2] \rightarrow K'[k'_1, k'_2]:$$

$$a_{11}k_1 + a_{12}k_2 + b_1 = k'_1, \tag{E.25}$$

$$a_{21}k_1 + a_{22}k_2 + b_2 = k'_2. \tag{E.26}$$

$$L[l_1, l_2] \rightarrow L'[l'_1, l'_2]:$$

$$a_{11}l_1 + a_{12}l_2 + b_1 = l'_1, \tag{E.27}$$

$$a_{21}l_1 + a_{22}l_2 + b_2 = l'_2. \tag{E.28}$$

$$M[m_1, m_2] \rightarrow M'[m'_1, m'_2]:$$

$$a_{11}m_1 + a_{12}m_2 + b_1 = m'_1, \tag{E.29}$$

$$a_{21}m_1 + a_{22}m_2 + b_2 = m'_2. \tag{E.30}$$

Pro známé souřadnice bodů K, L, M, K', L', M' tak máme soustavu 6 rovnic o 6 neznámých $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, b_1, b_2$. Zajímá nás, za jakých podmínek má jediné řešení. Tyto podmínky by se měly shodovat s obsahem věty E.2. Po detailním prozkoumání rovnic (E.25)–(E.30) je patrné, že jejich soustava se dá rozdělit na dvě vzájemně nezávislé soustavy 3 rovnic o 3 neznámých: soustavu rovnic (E.25), (E.27) a (E.29) o neznámých a_{11}, a_{12}, b_1 a soustavu rovnic (E.26), (E.28) a (E.30) o neznámých a_{21}, a_{22}, b_2 . Přitom první z těchto soustav má rozšířenou matici

$$\left[\begin{array}{ccc|c} k_1 & k_2 & 1 & k'_1 \\ l_1 & l_2 & 1 & l'_1 \\ m_1 & m_2 & 1 & m'_1 \end{array} \right], \quad (\text{E.31})$$

druhá má potom rozšířenou matici

$$\left[\begin{array}{ccc|c} k_1 & k_2 & 1 & k'_2 \\ l_1 & l_2 & 1 & l'_2 \\ m_1 & m_2 & 1 & m'_2 \end{array} \right]. \quad (\text{E.32})$$

Soustavy se tedy shodují v matici soustavy (liší se pouze vektory pravých stran). Aby měly obě soustavy jediné řešení, musí být determinant této matice různý od nuly, tj.

$$\begin{vmatrix} k_1 & k_2 & 1 \\ l_1 & l_2 & 1 \\ m_1 & m_2 & 1 \end{vmatrix} \neq 0. \quad (\text{E.33})$$

Determinant v (E.33) snadno spočítáme eliminací jedniček na pozicích (2, 3) a (3, 3) postupným odečtením prvního řádku od druhého a třetího řádku a následným rozvojem takto upraveného determinantu podle třetího sloupce. Dostaneme tak podmínku

$$\begin{vmatrix} l_1 - k_1 & l_2 - k_2 \\ m_1 - k_1 & m_2 - k_2 \end{vmatrix} \neq 0, \quad (\text{E.34})$$

která je splněna právě tehdy, když jsou vektory $L - K$ a $M - K$ nezávislé, tj. body K, L, M neleží v přímce.

Tedž zbývá dokázat, že když body K, L, M neleží v přímce, ani body K', L', M' nemohou ležet v přímce. Tentokrát využijeme maticovou rovnici

afinity $X' = A \cdot X + B$. Pro uvedené dvojice bodů platí:

$$K' = A \cdot K + B, \quad (\text{E.35})$$

$$L' = A \cdot L + B, \quad (\text{E.36})$$

$$M' = A \cdot M + B. \quad (\text{E.37})$$

Důkaz provedeme sporem. Předpokládáme, že K, L, M neleží v přímce a zároveň body K', L', M' leží v přímce. Potom existuje $j \in R$ takové, že $L' - K' = j(M' - K')$. Po dosazení z (E.35)–(E.37) a vynásobení obou stran rovnice zleva maticí inverzní k A dostaneme $L - K = j(M - K)$, což je spor s předpokladem nekolineárnosti bodů K, L, M . Body K', L', M' tedy také nemohou ležet v přímce. □

E.5.1 Afinita prostoru A_n

Definice E.1. Vzájemně jednoznačné afinní zobrazení afinního prostoru A_n na sebe nazýváme afinitou prostoru A_n nebo afinní transformací prostoru A_n .

Věta E.3 (O určenosti). Nechť $M_0, M_1, M_2, \dots, M_n$ a $M'_0, M'_1, M'_2, \dots, M'_n$ jsou dvě skupiny $(n + 1)$ lineárně nezávislých bodů afinního prostoru A_n . Pak existuje jediná afinita f prostoru A_n , pro kterou

$$f(M_i) = M'_i, \quad i = 0, 1, \dots, n.$$

Jestliže v uvedené větě určíme pomocí dvou jmenovaných skupin lineárně nezávislých bodů dvě afinní souřadnicové soustavy prostoru A , pak tyto soustavy určují příslušnou afinitu f uvažovaného prostoru.

Věta E.4. Nechť v afinním bodovém prostoru A_n jsou dány dvě afinní souřadnicové soustavy $A_n = \{P; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$; $A_n = \{Q; \vec{d}_1, \vec{d}_2, \dots, \vec{d}_n\}$. Pak existuje jediná afinita prostoru A_n , pro kterou

$$f(P) = Q$$

a asociované zobrazení φ

$$\varphi(\vec{e}_i) = \vec{d}_i, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

E.5.2 Rovnice afinity prostoru A_n

Afinitu prostoru A_n chápeme jako speciální případ afinního zobrazení z A_n do A'_m , kde $m = n$. Potom je tato afinita určena rovnicemi

$$x'_i = \sum_j^n a_{ij}x_j + b_i, \quad i = 1, \dots, n \quad (\text{E.38})$$

zobrazujícími bod $X = (x_1, \dots, x_n)$ do bodu $X' = (x'_1, \dots, x'_n)$. Zobrazení asociované

$$u'_i = \sum_j^n a_{ij}u_j, \quad i = 1, \dots, n \quad (\text{E.39})$$

zobrazuje vektor $\vec{u}(u_1, \dots, u_n)$ do $\vec{u}'(u'_1, \dots, u'_n)$.

Příklad E.5. Určete afinitu v rovině A_2 , ve které při dané soustavě souřadné se bod $B = [0, 0]$ zobrazuje do bodu $B' = [1, 0]$, bod $C = [1, 0]$ do bodu $C' = [0, 1]$ a bod $D = [0, 1]$ do bodu $D' = [0, 0]$.

E.6 Skládání afinních zobrazení

Nechť f_1 je afinní zobrazení prostoru A do A' , f_2 afinní zobrazení prostoru A' do A'' . Jestliže každému bodu $X \in A$ je v f_1 přiřazen bod $f_1(X) \in A'$ a bodu $f_1(X)$ přiřazen bod $f_2[f_1(X)] \in A''$, říkáme, že zobrazení f přiřazující bodu X bod $f_2[f_1(X)]$ vzniklo složením zobrazení f_1 a f_2 . Zapisujeme $f = f_2 \cdot f_1$, $f = f_2 f_1$ nebo $f = f_2(f_1(X))$.

Věta E.5. Složením dvou afinních zobrazení f_1, f_2 vznikne afinní zobrazení f . Zobrazení φ asociované k f vznikne složením zobrazení φ_1, φ_2 asociovaných po řadě k f_1, f_2 .

Příklad E.6. V prostoru E_2 jsou dány dvě středové souměrnosti S a O . Určete zobrazení $Z_1 = SO$ a $Z_2 = OS$.

Příklad E.7. V prostoru E_n je dáno posunutí T a středová souměrnost S . Určete zobrazení $Z_1 = TS$ a $Z_2 = ST$.

E.6.1 Afinní grupa v A_n

Věta E.6 (Inverzní zobrazení). Uvažujme afinní zobrazení f afinního prostoru A_n na afinní prostor A'_m . Nechť je toto zobrazení navíc prosté (pros-

tory A_n, A'_m mají stejnou dimenzi, tj. $m = n$). Pak k zobrazení f existuje zobrazení inverzní f^{-1} , které je rovněž afinním zobrazením.

Proof. Jsou-li B', C', D' tři kolineární body v prostoru A'_n a platí $(B', C', D') = \lambda$, uvažujme vzory B, C bodů B', C' při zobrazení f a na jimi určené přímce BC zvolme bod D tak, že dělicí poměr $(B, C, D) = \lambda$. Pak bod $f(D)$ leží na přímce $B'C' = f(B)f(C)$ a platí $(B', C', f(D)) = \lambda$. Protože také $(B', C', D') = \lambda$, je $f(D) = D'$ a dělicí poměr $(B', C', D') = (B, C, D)$. $\square$

Jak víme, pojmem afinita se rozumí vzájemně jednoznačné zobrazení prostoru A_n na sebe, tj. speciální případ afinního zobrazení, kdy prostory A_n a A'_m splynou.

Věta E.7. Všechny afinity prostoru A_n tvoří při obvyklém skládání grupu, tzv. afinní grupu prostoru A_n .

Proof. Složením dvou afinit prostoru A_n vznikne opět afinita prostoru A_n . K afinitě f existuje inverzní afinita f^{-1} (viz Věta E.6). Neutrálním prvkem je potom identita. $\square$

E.6.2 Souvislost mezi skládáním afinních zobrazení a násobením matic

Pro zjednodušení budme uvažovat pouze *lineární zobrazení*. To jsou afinní transformace s nulovým vektorem posunutí, tj. v rovnicích (E.15) mají $b_1 = b_2 = 0$.

Příklad E.8. Jsou dána lineární zobrazení f, g :

$$f : \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \quad g : \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Určete matici M složeného zobrazení

$$g \cdot f : \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = M \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Řešení: Uvažujme situaci znázorněnou na Obr. E.2. Bod $X[x, y]$ je afini-

Figure E.2: Skládání afinit f a g v rovině

tou f zobrazen na bod $X_1[x_1, y_1]$, ten je pak afinitou g zobrazen na bod $X'[x', y']$. Tuto skutečnost můžeme zapsat rovnicemi

$$X \xrightarrow{f} X_1 : \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}; \quad X_1 \xrightarrow{g} X' : \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix},$$

odkud po dosazení za $\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$ z první rovnice do druhé dostáváme

$$X \xrightarrow{g \cdot f} X' : \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}. \quad (\text{E.40})$$

Skládání afinit znázorněné Obr. E.2 ale můžeme zapsat i pomocí rovnic. Platí

$$X \xrightarrow{f} X_1 : \begin{array}{l} x_1 = ax + by \\ y_1 = cx + dy \end{array}; \quad X_1 \xrightarrow{g} X' : \begin{array}{l} x' = Ax_1 + By_1 \\ y' = Cx_1 + Dy_1 \end{array}.$$

Potom po dosazení za x_1 a y_1 z první soustavy rovnic do druhé dostaneme

$$X \xrightarrow{g \cdot f} X' : \begin{array}{l} x' = A(ax + by) + B(cx + dy) = (Aa + Bc)x + (Ab + Bd)y \\ y' = C(ax + by) + D(cx + dy) = (Ca + Dc)x + (Cb + Dd)y \end{array},$$

po přepsání do maticového tvaru

$$X \xrightarrow{g \cdot f} X' : \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Aa + Bc & Ab + Bd \\ Ca + Dc & Cb + Dd \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}. \quad (\text{E.41})$$

Z porovnání (E.40) a (E.41) je zřejmé, že pro matici M složené afinity $g \cdot f$ platí:

$$M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Aa + Bc & Ab + Bd \\ Ca + Dc & Cb + Dd \end{bmatrix}. \quad (\text{E.42})$$

Rovnost (E.42) tak přináší známý algoritmus pro násobení dvou matic.

Příklad E.9. Řešení příkladu E.8 využijte ke zdůvodnění skutečnosti, že skládání afinit v rovině není komutativní. Zobecněte na E_n .

Bibliography

- [1] Budinský, B. *Analytická a diferenciální geometrie*. SNTL, Praha, 1983.
- [2] Coxeter, H. S. M., Greitzer, S. L. *Geometry revisited*. The Mathematical Association of America, Washington, D.C., 1967.
- [3] Devlin, K: Jazyk matematiky, ARGO, 2003.
- [4] Eukleides, *Základy. Knihy I–IV.*, koment. Petrem Vopěnkou, OPS, Nymburk, 2008.
- [5] Eukleides, *Eukleidovy základy (Elementa)*, překlad F. Servít, 1907. Dostupné na https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Eukleides_Servit.pdf
- [6] Havlíček, K. *Úvod do projektivní geometrie kuželoseček*. SNTL, Praha, 1956.
- [7] Holme, A. *Geometry Our Cultural Heritage*, Second Edition. Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2010.
- [8] Klíma, J. *Různé způsoby zobrazovací v deskriptivní geometrii*. Kapitola Gnómonický a stereografický průmět kulové plochy. Praha: JČMF, edice Cesta k vědě, 1944, str. 18-25.
Dostupné na http://dml.cz/bitstream/handle/10338.dmlcz/403087/CestaKVedeni_013-1944-1_6.pdf
- [9] Kuřina, F. *10 geometrických transformací*. Prometheus, Praha, 2002.
- [10] Kuřina, F. *10 pohledů na geometrii*. Akademie věd České republiky, Praha, 1996.
- [11] Kutuzov, B. V. *Lobačevského geometrie a elementy základů geometrie*. Nakladatelství Československé akademie věd, Praha, 1953.

- [12] Pech, P. *Klasické vs. počítačové metody při řešení úloh v geometrii*. Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích, České Budějovice, 2005. Dostupné na <http://www.pf.jcu.cz/stru/katedry/m/knihy/Metody.pdf>
- [13] Pavlíček, J. B. *Základy neeukleidovské geometrie Lobačevského*. Přírodovědecké nakladatelství, Praha, 1953. Dostupné na <http://dml.cz/dmlcz/402750>
- [14] Rektorys, K. *Přehled užití matematiky*. Prometheus, Praha, 2009.
- [15] Sedláček, J. a kol. *Slovník školské matematiky*. Praha: SPN ARGO. 1981.
- [16] Sekanina, M. a kol.: *Geometrie II*, SPN Praha, 1988.
- [17] Vopěnka, P. *Trýznivé tajemství*. Práh, Praha, 2003.
- [18] Voráčová, Š. a kol. *Atlas geometrie. Geometrie krásná a užitečná*. Praha: Academia. 2012.
- [19] Vyšín, J. a kol.: *Geometria pre pedagogické fakulty II*, Bratislava, 1970.