

GEOMETRIE 4 - KMA/3G4

(celoživotní vzdělávání)

Roman HAŠEK

20. února 2021

Obsah

1	Inverze	4
1.1	Sférická inverze	5
1.2	Stereografická projekce	5
1.3	Vybrané vlastnosti sférické inverze	7
2	Kruhová inverze	8
2.1	Vybrané vlastnosti kruhové inverze	9
2.2	Analytické vyjádření kruhové inverze	12
2.3	Cvičení – kruhová inverze	13
3	Projektivní rozšíření \bar{E}_n prostoru E_n	14
3.1	Projektivní rozšíření roviny E_2	14
3.2	Homogenní souřadnice v \bar{E}_2	15
3.3	Zobecnění	17
3.4	Cvičení – projektivní rozšíření prostoru	17
4	Dvojpoměr	19
5	Pappova věta a její důsledky	23
5.1	Středové promítání	23
5.2	Pappova věta o invarianci dvojpoměru	26
5.3	Princip duality v projektivní rovině	30
5.4	Princip duality v praxi	31
5.5	Cvičení – Pappova věta a princip duality	32
6	Středová kolineace	33
6.1	Kolineace kružnice a kuželosečky	36
7	Vybrané věty projektivní geometrie	38
7.1	Pappova věta o šestiúhelníku	38
7.2	Šestiúhelník	39
7.3	Pascalova věta	41
7.4	Brianchonova věta	43
7.5	Desarguesova věta	44

8	Křivky v E_3	45
8.1	Popis křivky	45
8.2	Tečna křivky	46
8.3	Oskulační rovina	47
8.4	Oblouk křivky	48
8.5	První křivost křivky	49
8.6	Frenetův trojhran	50
8.7	Oskulační kružnice	51
9	Vybrané rovinné křivky	52
9.1	Obalová křivka	52
9.2	Evoluta a evolventa	54

1 Inverze

V této kapitole se nejprve seznámíme s inverzí jako takovou, potom se zaměříme na její konkrétní příklady, *sférickou inverzi* v trojrozměrném prostoru a *kruhovou inverzi* v rovině. Kruhovú inverzi se budeme podrobně věnovat i v příští kapitole. Otázka inverzí je pojednána v [14] na str. 83–92.

Definice 1 (Inverze). *Inverze se středem S a koeficientem κ ($\kappa \neq 0$) v eukleidovském prostoru E_n je zobrazení množiny $E_n - \{S\}$ na sebe, které každý bod X zobrazí na bod X' tak, že*

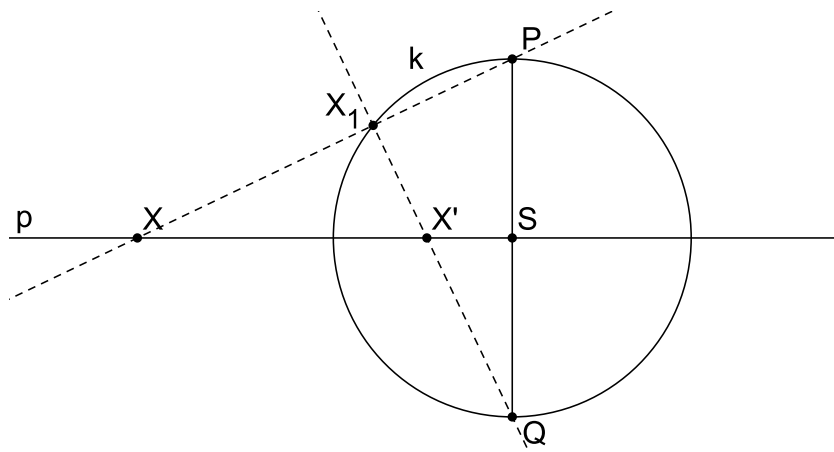
a) pro $\kappa > 0$ jsou polopřímky SX, SX' totožné, pro $\kappa < 0$ jsou potom opačné,

$$b) |SX'| = \frac{|\kappa|}{|SX|}.$$

Je zřejmé, že body S, X (vzor) a X' (obraz) jsou kolineární. K určení inverze stačí zadat střed S a dvojici bodů, např. A, A' , ve vztahu *vzor a obraz*.

Poznámka. Definice inverze je na první pohled analogická s definicí stejnoolehlosti. Definice těchto dvou zobrazení v eukleidovském prostoru se liší akorát ve vztahu mezi vzdálenostmi $|SX'|$ a $|SX|$. Zatímco u stejnoolehlosti je $|SX'|$ přímo úměrná $|SX|$ (tj. $|SX'| = \kappa|SX|$, kde κ je koeficient stejnoolehlosti), u inverze je $|SX'|$ nepřímo úměrná $|SX|$ (tj. $|SX'| = \frac{\kappa}{|SX|}$, kde κ je koeficient inverze).

PŘÍKLAD 1.1. *Dokažte, že zobrazení v rovině, jehož princip je naznačen na Obr. 1 (kružnice k má střed S a poloměr r ; body X, X' a S leží v přímce p), splňuje definici inverze.*

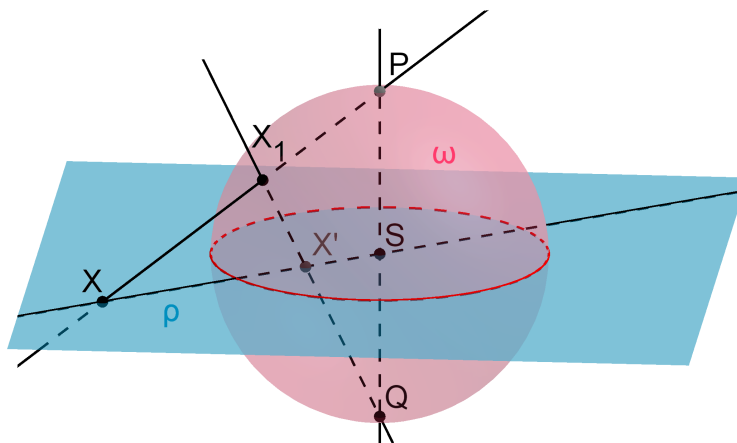


Obrázek 1: Inverze v rovině

Řešení: Z podobnosti trojúhelníků $\triangle SXP \sim \triangle SQX'$ vyplývá vztah $|SX'| = \frac{r^2}{|SX|}$. Zobrazení tak splňuje definici inverze dané středem S a koeficientem $\kappa = r^2$, kde r je poloměr dané kružnice k . Jedná se o tzv. *kruhovú inverzi* určenou kružnicí k . Tomuto zobrazení se budeme podrobně věnovat v kapitole 2. Tam si také uvedeme ještě jeden mechanismus přiřazení obrazu danému bodu v kruhové inverzi.

1.1 Sférická inverze

Nyní uvažujme trojrozměrnou variantu Obr. 1, kde místo kružnice k figuruje sféra (kulová plocha) ω se středem S a poloměrem r a místo přímky p je dána rovina ρ procházející bodem S , kolmo na spojnici dvou diametrálně protilehlých bodů (pólů) P, Q , viz Obr. 2.

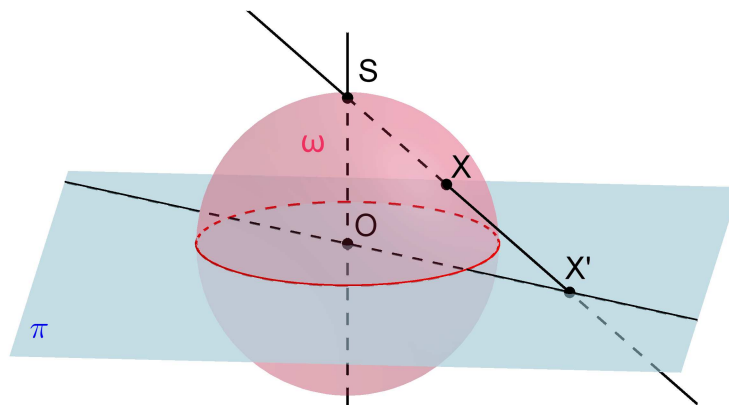


Obrázek 2: Inverze v prostoru – Sférická inverze

Jedná se o tzv. *sférickou inverzi* určenou sférou (kulovou plochou) ω se středem S a poloměrem r . Opět, tak jako v případě rovinné varianty z příkladu 1.1, není obtížné dokázat, že toto zobrazení přiřazující bodu $X \in \rho$ obraz $X' \in \rho$ splňuje definici 1. Postup tohoto přiřazení lze přitom popsat pomocí složení dvou zobrazení, z nichž jedno je tzv. *stereografická projekce* a druhé je zobrazení k této projekci inverzní.

1.2 Stereografická projekce

Pojednání o tomto zobrazení a jeho vlastnostech lze najít např. v [7]. Zde je také uvedena informace, že se stereografickým průmětem pracoval již Hipparchos kolem roku 150 př. n. l.



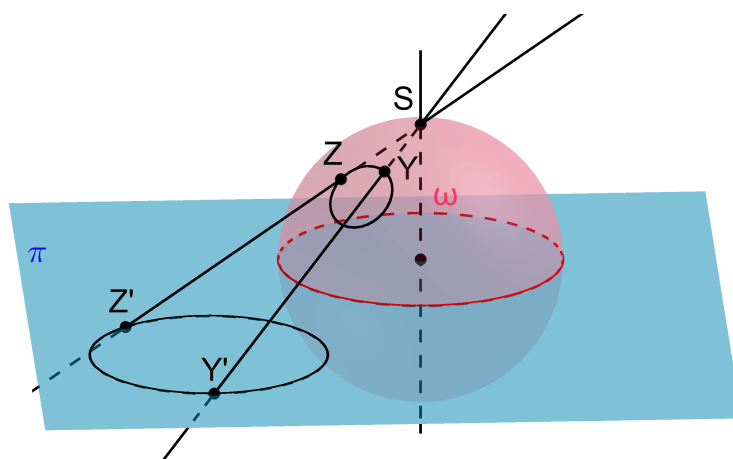
Obrázek 3: Stereografická projekce

Definice 2 (Stereografická projekce). *Stereografický průmět kulové plochy je středovým průmětem kulové plochy pro střed promítání S ležící na kulové ploše ω a pro průmětnu π rovnoběžnou s tečnou rovinou kulové plochy ve středu promítání S , viz Obr. 3. [7]*

Poznámka. Průmětna π se většinou volí tak, jak je znázorněno na Obr. 3, tj. prochází středem O kulové plochy kolmo na přímkou OS .

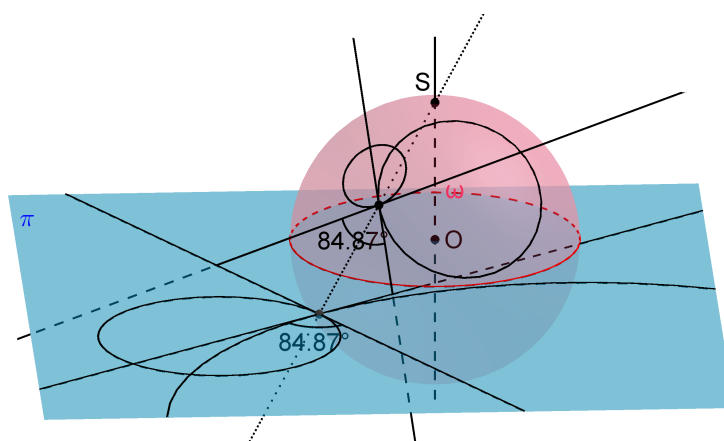
Stereografická projekce má dvě důležité vlastnosti:

- (1) Kružnice kulové plochy ω se promítají opět do kružnic, viz Obr. 4.



Obrázek 4: Obrazem kružnice je opět kružnice

- (2) Úhel dvou křivek kulové plochy ω se u jejich obrazů zachovává (zobrazení, která zachovávají velikost úhlu nazýváme *konformní*), viz Obr. 5.



Obrázek 5: Velikost úhlu se zachovává

1.3 Vybrané vlastnosti sférické inverze

Podíváme-li se zpět na Obr. 2 vidíme, že sférickou inverzi lze složit ze dvou zobrazení. Bod X se nejprve zobrazí na bod X_1 prostřednictvím inverzního zobrazení ke stereografické projekci z bodu P na rovinu π , potom se bod X_1 zobrazí na X' ve stereografické projekci z bodu Q na rovinu π .

Inverze je *involutorní zobrazení*, to znamená, že je-li obrazem bodu X bod X' , je obrazem bodu X' bod X .

Přitom body uvnitř sféry (v případě kruhové inverze pak kružnice) se zobrazují vně, a naopak body vně sféry (kružnice) se zobrazují dovnitř. Body sféry (kružnice) jsou potom samodružné.

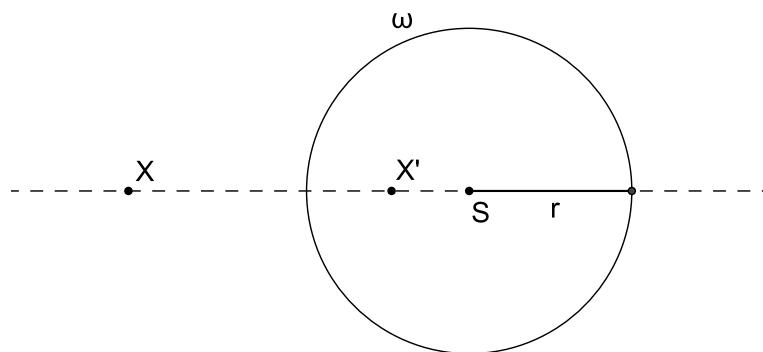
Snadno ověříme skutečnost, že přibližuje-li se bod X ke středu S inverze, jeho obraz X' se neomezeně vzdaluje. Přirozeně se tak nabízí myšlenka, že obrazem bodu S , který je v definici 1 z eukleidovského prostoru vyňat, je bod v nekonečnu. Tuto myšlenku precizuje zavedení tzv. *Möbiova prostoru*, viz např. [14], str. 85 (August Ferdinand Möbius, 1790–1868).

Möbiovým prostorem rozumíme eukleidovský prostor E_n rozšířený o tzv. *nevlastní bod*, tj. bod „v nekonečnu“. Značíme ho $M_n = E_n \cup \{\infty\}$. Tento nevlastní bod je potom v Möbiově prostoru obrazem středu inverze S .

2 Kruhá inverze

Definice 3. Kruhá inverze uróená kružnicí $\omega(S, r)$ (viz Obr. 6) je zobrazení, které každému bodu $X \neq S$ přiřadí bod X' tímto způsobem:

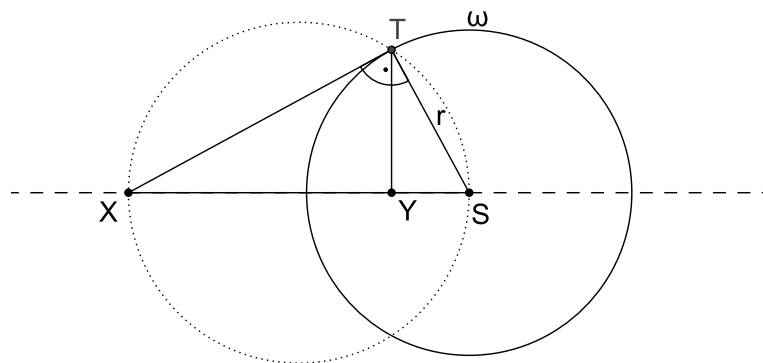
- (1) $X' \in SX$,
- (2) $|SX| \cdot |SX'| = r^2$.



Obrázek 6: Kruhá inverze

Z definice vyplývá, že kruhá inverze je *involutorní* zobrazení, tj. obrazem bodu X' je bod X .

Otázkou je, jak toto zobrazení konstrukčně provést¹. Na Obr. 1 je jeden možný způsob, založený, jak už víme, na projekcích z bodů P a Q . Obvykle se však používá jiný způsob, založený na Eukleidově větě o odvěsně. Nyní se s ním pomocí Obr. 7 seznámíme. Jestliže T je bod dotyku tečny kružnice



Obrázek 7: Kruhá inverze – konstrukce obrazu bodu X

ω vedené z bodu X , je $\triangle XST$ pravoúhlý trojúhelník s přeponou XS . Potom pro patu Y výšky sestrojené z vrcholu T na přeponu XS dle *Eukleidovy věty o odvěsně pravoúhlého trojúhelníku* platí

$$|SY| \cdot |SX| = r^2.$$

¹Při rýsování v GeoGebre tuto otázku řešit nemusíme. Program má implementován nástroj *Kruhá inverze*. Při jeho použití stačí zadat bod, který chceme zobrazit a určující kružnici.

Je tedy zřejmé, že bod Y je obrazem bodu X v souladu s definicí 3. Příslušnou konstrukci proto můžeme použít k sestrojení obrazu bodu v kruhové inverzi. Přitom je třeba mít na paměti, že kruhová inverze je involutorním zobrazením. Obrazem bodu Y (vnitřní bod kružnice ω) je tedy naopak zase bod X (vnější bod kružnice ω). Pro úplnost připomeňme, že body kružnice ω jsou samodružné, zobrazí se samy na sebe, opět v souladu s definicí 3.

2.1 Vybrané vlastnosti kruhové inverze

Kruhová inverze je příkladem *nelineárního zobrazení*, nejedná se o afinní zobrazení, přímka se až na speciální případy nezobrazuje na přímku (přímky, které neprocházejí středem inverze, se zobrazují na kružnice).

Z definice inverze je patrné, že vnitřní body určující kružnice (sféry) se zobrazují na vnější body a naopak.

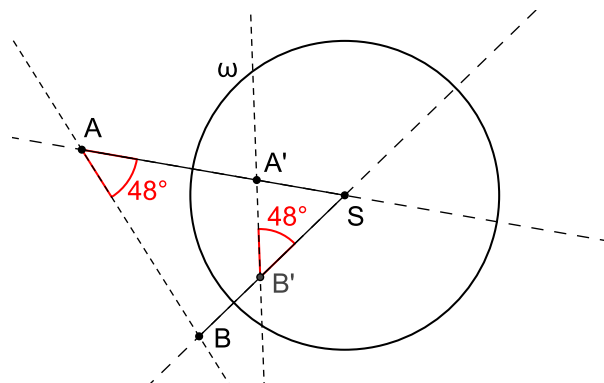
Inverze je tzv. *konformní zobrazení*, tj. zachovává velikost úhlu.

Jak je na tom kruhová inverze se *samodružnými útvary*? Samodružnými body jsou body určující kružnice. Samodružnými přímkami jsou přímky procházející středem inverze. Samodružné jsou ty kružnice, které ortogonálně protínají určující kružnici.

Nyní si tyto vlastnosti uvedeme formou vět (jejichž důkaz je však většinou přenechán čtenáři).

Věta 1. *Vnitřní body určující kružnice se zobrazí na vnější body této kružnice a naopak, vnější body se zobrazí na vnitřní.*

Věta 2. *Jestliže jsou A', B' obrazy bodů A, B v kruhové inverzi, jejíž střed S neleží na přímce AB (viz Obr. 8), potom $|\angle SAB| = |\angle SB'A'|$.*



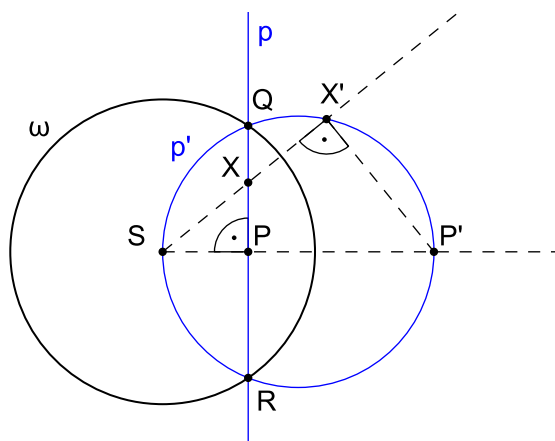
Obrázek 8: $|\angle SAB| = |\angle SB'A'|$

Důkaz. Z definice kruhové inverze vyplývá $|SA'| \cdot |SA| = |SB'| \cdot |SB| = r^2$, tj. $\frac{|SA'|}{|SB'|} = \frac{|SB|}{|SA|}$. Protože trojúhelníky ABS a $B'A'S$ mají společný úhel při vrcholu S , jsou podle věty *sus* podobné. \square

Věta 3. *Body přímky procházející středem inverze S se zobrazují opět na tuto přímku. S výjimkou středu S .*

Věta 4. *Obrazem přímky p , která neprochází středem inverze S , je kružnice p' procházející středem S . Kromě bodu S .*

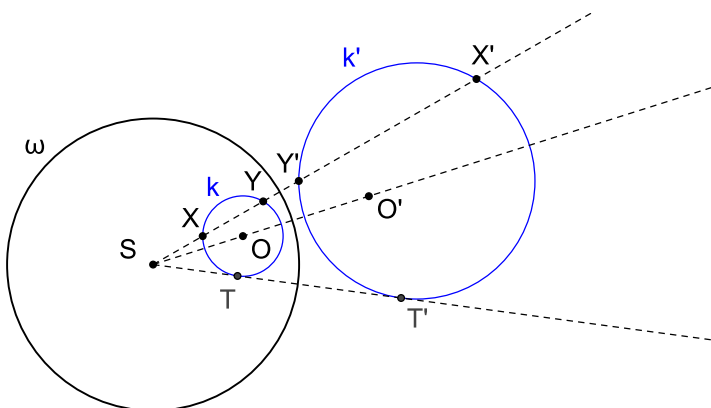
Věta 5. *Obrazem kružnice procházející středem inverze S (kromě bodu S) je přímka, která neprochází středem inverze S .*



Obrázek 9: Obrazem přímky p je kružnice p' a naopak.

Důkaz. Při znalosti Thaletovy kružnice lze tuto větu dokázat jako důsledek věty 2, viz Obr. 9. \square

Věta 6. *Obrazem kružnice, která neprochází středem inverze S je kružnice.*

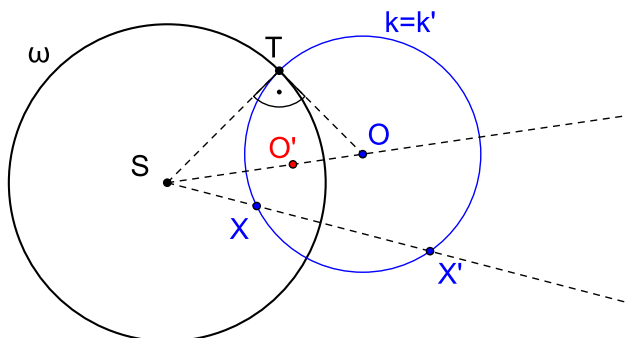


Obrázek 10: Obrazem kružnice k , která neprochází středem S , je kružnice k' a naopak.

Důkaz. K důkazu lze využít mocnost bodu ke kružnici, konkrétně mocnosti bodu S ke kružnicím k a k' , viz Obr. 10. \square

Poznámka. Na Obr. 10 je patrná jedna typická vesměs však opomíjená vlastnost kruhové inverze, že obrazem středu kružnice k není střed kružnice k' , viz body O a O' na obrázku.

Věta 7. Nutnou a postačující podmínkou, aby kružnice k se středem O , různá od určující kružnice ω , byla v kruhové inverzi samodružná je, aby **ortogonálně** protínala určující kružnici inverze ω .



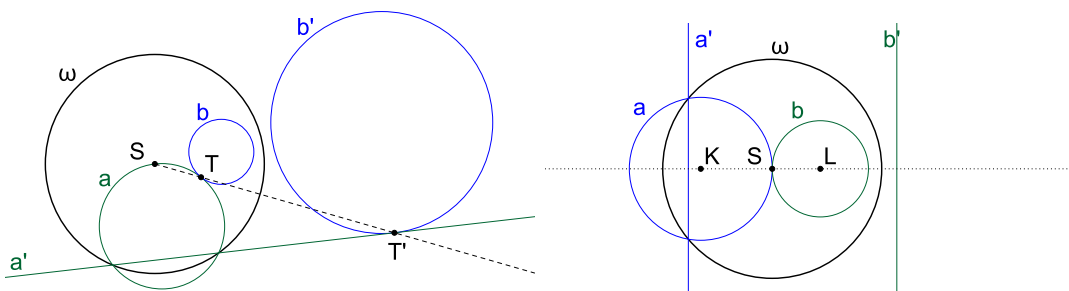
Obrázek 11: Samodružná kružnice k ortogonálně protíná určující kružnici ω .

Důkaz. K důkazu opět využijeme mocnost bodu ke kružnici, konkrétně mocnost bodu S ke kružnici k , viz Obr. 11. □

Poznámka. Na Obr. 11 opět stojí za pozornost fakt, že ačkoliv se kružnice k zobrazuje sama na sebe, její střed O se zobrazuje na jiný bod O' .

Věta 8. Necht' jsou a, b dvě kružnice nebo přímka a kružnice, které se dotýkají. Potom:

- a) Jestliže se dotýkají v bodě $T \neq S$, kde S je střed inverze, potom se dotýkají i jejich obrazy v bodě T' , který je obrazem bodu T .
- a) Jestliže se dotýkají ve středu inverze S , potom jsou jejich obrazy přímky $a' \parallel b'$.



Obrázek 12: Zachování incidence v kruhové inverzi

2.2 Analytické vyjádření kruhové inverze

Při odvození analytického vyjádření kruhové inverze se středem S a koeficientem κ vyjdeme z Obr. 13, kde je uvažovaná inverze zadána určující kružnicí ω se středem S a poloměrem r (víme, že platí $r^2 = \kappa$). Vztah mezi body S, X a X' můžeme v každém okamžiku popsat rovností

$$|SX'| = k \cdot |SX|, \quad (1)$$

kteřá sice připomíná stejnoolehlost, liší se však od ní tím, že hodnota k není konstantní, ale závisí na X (místo k by asi bylo vhodnější psát $k(X)$). Víme přece, že kruhová inverze je definována vztahem

$$|SX'| = \frac{\kappa}{|SX|}. \quad (2)$$

Dáme-li vztahy (1) a (2) dohromady, dostaneme pro k vztah

$$k = \frac{\kappa}{|SX|^2}. \quad (3)$$

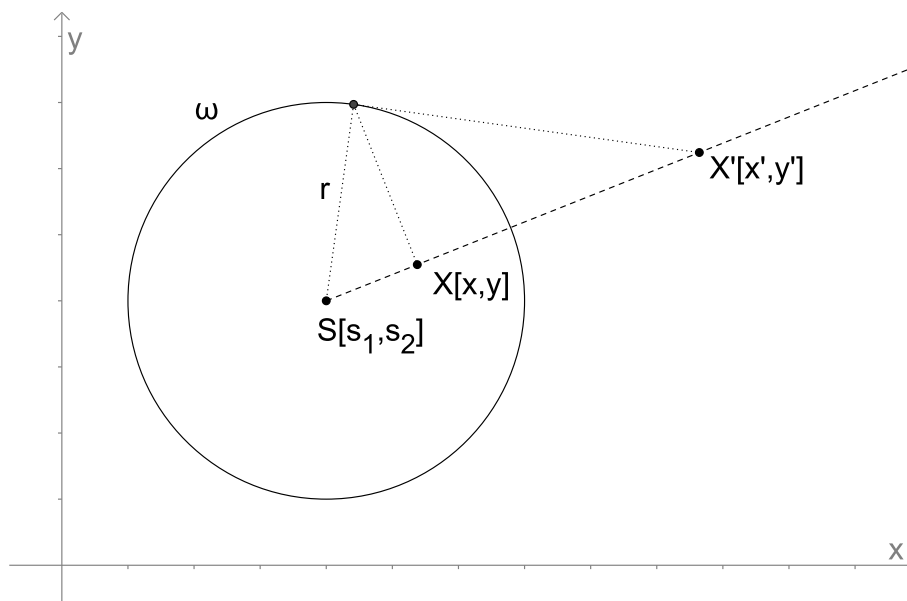
Nyní stačí rovnost (1) přepsat do tvaru $X' - S = k \cdot (X - S)$, odkud po dosazení z (3) odvodíme konečné analytické vyjádření kruhové inverze. Pro obraz X' bodu X v kruhové inverzi se středem S a koeficientem κ tak platí

$$X' = S + \frac{\kappa}{|SX|^2} \cdot (X - S), \quad (4)$$

případně

$$X' = S + \frac{r^2}{|SX|^2} \cdot (X - S), \quad (5)$$

pro určující kružnici ω se středem S a poloměrem r .



Obrázek 13: Analytické vyjádření kruhové inverze.

2.3 Cvičení – kruhová inverze

1. V jaký útvar převede kruhová inverze kružnici a její dvě tečny, které jsou

a) různoběžné, b) rovnoběžné?

2. Prozkoumejte obrazy těchto dvou útvarů v kruhové inverzi:

a) dvě na sebe kolmé přímky, b) kružnice a přímka, která prochází jejím středem.

3. Je dána přímka p , která protíná danou kružnici k v bodech K, L a je dán bod B , ležící mimo přímku p i kružnici k . Bodem B veďte kružnici, která se dotýká p i k .

4. Sestrojte kružnici procházející danými body A, B a dotýkající se dané kružnice k ; body A, B jsou vnější body kružnice k .

5. Jsou dány tři kružnice k_1, k_2, k_3 , které se navzájem protínají a všechny procházejí bodem O . Sestrojte kružnici k , která se dotýká kružnic k_1, k_2, k_3 .

6. Jsou dány tři kružnice k_1, k_2, k_3 , z nichž se každé dvě zvenku dotýkají. Sestrojte kružnici k , dotýkající se daných kružnic.

7. Jsou dány dvě dotýkající se kružnice k_1, k_2 a přímka p . Sestrojte kružnici, která se dotýká kružnic k_1, k_2 a přímky p .

8. Jsou dány dvě přímky p_1, p_2 a kružnice k , která se dotýká přímky p_1 . Sestrojte kružnici, která se dotýká přímek p_1, p_2 a kružnice k .

9. Jsou dány dvě dotýkající se kružnice k_1, k_2 a přímka p . Sestrojte kružnici se středem na přímce p , která se dotýká kružnic k_1, k_2 .

10. Jsou dány tři kružnice k_1, k_2, k_3 , z nichž k_1 a k_2 se protínají v bodech A, B ; k_3 leží vně k_1 i k_2 . Sestrojte kružnici k , která se dotýká kružnic k_1, k_2, k_3 .

11. V rovině je dán trojúhelník ABC . Najděte střed kruhové inverze zobrazující bod A na bod B , je-li bod C samodružný.

12. Určete střed kruhové inverze s koeficientem 2, při které se bod $[1, 0]$ zobrazí na bod $[2, 0]$.

13. Existuje kruhová inverze, při níž jsou body $[-1, 0], [1, 0]$ samodružné a bod $[0, 0]$ se zobrazí na bod $[0, 1]$? Při kladné odpovědi určete střed této inverze, koeficient a analytické vyjádření.

14. Při kterých kruhových inverzích se zobrazí bod $[0, 1]$ na bod $[0, 9]$ a bod $[2, 0]$ do vlastního bodu na ose x ? Určete vždy střed a koeficient inverze.

15. V omezené nákresně je dána přímka t a na ní přístupný bod T . Dále je dán nepřístupný bod $M = p \cap q$; p, q jsou přímky. Sestrojte kružnici k , která prochází bodem M a přímky t se dotýká v bodě T .

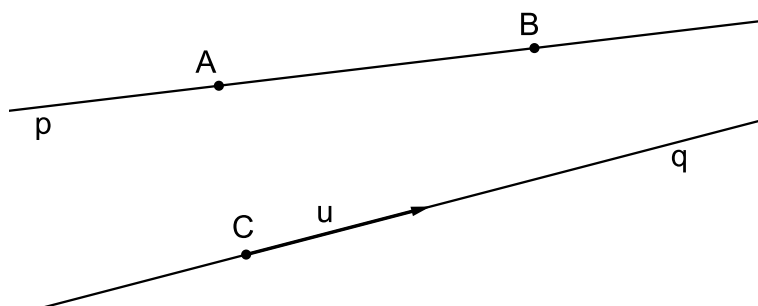
16. V omezené nákresně sestrojte střed S kružnice k procházející nepřístupnými body $A = x \cap y, B = u \cap v$ a přístupným bodem C (x, y, u, v jsou dané přístupné přímky).

3 Projektivní rozšíření \bar{E}_n prostoru E_n

Projektivním rozšířením eukleidovského prostoru E_n rozumíme jeho doplnění o *nevlastní body*. Výsledný prostor značíme \bar{E}_n . Takovéto rozšíření eukleidovského prostoru nám podstatně zjednodušuje popis a zkoumání některých geometrických vztahů. Využívá se třeba při výkladu perspektivy, zavádění kolineace nebo při zkoumání kuželoseček a kvadrik.

3.1 Projektivní rozšíření roviny E_2

Přímka je určena buď *dvěma body*, nebo *bodem a směrem* (směrovým vektorem), viz Obr. 14. Dvě přímky v rovině, které nejsou totožné, mají buď *jeden společný bod*, nebo nemají žádný společný bod, ale mají *společný směr*.



Obrázek 14: Přímka je určena buď *dvěma body*, nebo *bodem a směrem* (směrovým vektorem).

Kdybychom směry ztotožnili s body, mohli bychom výše uvedená tvrzení nahradit těmito jednoduššími: *Přímka je určena dvěma body. Dvě přímky v rovině mají vždy alespoň jeden společný bod.*

Řešením je doplnění roviny o tzv. *nevlastní body* N_∞ , tj. body *v nekonečnu*, které si můžeme představovat jako směry všech přímek roviny. Důsledkem zavedení těchto nevlastních bodů do eukleidovské roviny je její doplnění také o tzv. *nevlastní přímku* n_∞ , která je z nevlastních bodů složena.

Prvotní představa o nevlastním bodu přímky je taková, že je to bod této přímky, který leží v nekonečnu. Proto je logické, že *nevlastní bod přímky ztotožňujeme s jejím směrem*.

Definice 4 (Směr). *Je-li \vec{u} libovolný nenulový vektor, potom množinu všech vektorů $k\vec{u}$, $k \in \mathbb{R}$ nazýváme směrem, značíme $\langle \vec{u} \rangle$. Libovolný vektor daného směru pak nazýváme reprezentantem tohoto směru.*

Potom můžeme projektivně rozšířený prostor \bar{E}_2 chápat jako sjednocení eukleidovského prostoru E_2 s množinou všech směrů $\langle V_2 \rangle$ (kde V_2 je zaměřením E_2), tj. s množinou všech nevlastních bodů N_∞ ;

$$\bar{E}_2 = E_2 \cup N_\infty = E_2 \cup \langle V_2 \rangle.$$

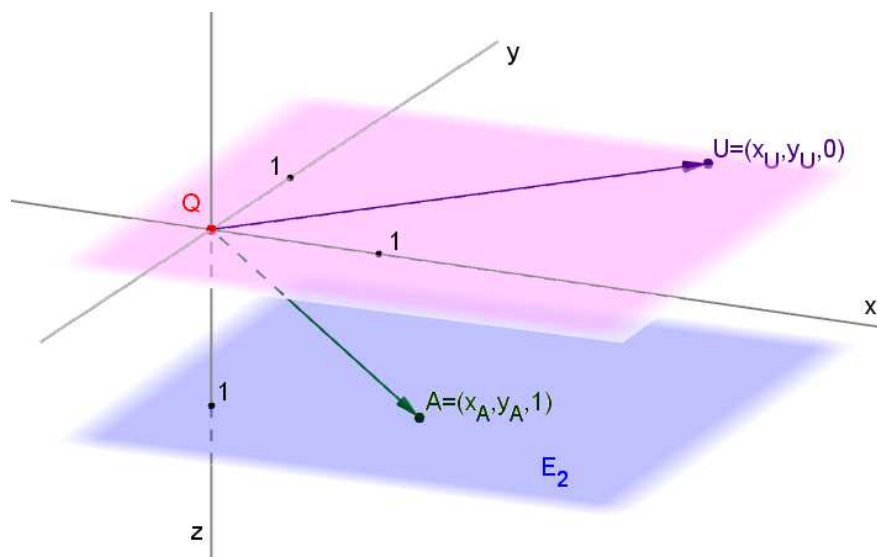
Bodem prostoru \bar{E}_2 tak je jak bod, tak jak jej známe (tj. vlastní bod), tak i směr (tj. nevlastní bod).

Poznámka. Každá vlastní přímka má právě jeden nevlastní bod (směr).

3.2 Homogenní souřadnice v \bar{E}_2

Je otázka, jak reprezentovat body projektivně rozšířeného prostoru \bar{E}_2 . Tato reprezentace by měla být na jedné straně jednotná, na druhé straně by však měla dovolovat rozlišovat mezi body vlastními (tj. body původního eukleidovského prostoru E_2) a nevlastními (tj. směry zaměření V_2 původního eukleidovského prostoru E_2).

Tento na první pohled obtížný úkol elegantně řeší zavedení tzv. *homogenních souřadnic*. Homogenní souřadnice v \bar{E}_2 jsou výsledkem projektivního rozšíření, to jest ztotožnění vlastních i nevlastních bodů prostoru \bar{E}_2 se směry $\langle V_3 \rangle$ prostoru E_3 . Souřadnice vektoru z V_3 , který ukazuje na konkrétní bod prostoru \bar{E}_2 potom nazýváme *aritmetickým zástupcem* tohoto bodu.



Obrázek 15: Myšlenka zavedení homogenních souřadnic.

Myšlenka zavedení homogenních souřadnic je založena na tom, že celou projektivně rozšířenou eukleidovskou rovinu \bar{E}_2 „umístíme“ do eukleidovského trojrozměrného prostoru E_3 , vhodně v něm zvolíme pevný bod Q a všechny body prostoru \bar{E}_2 ztotožníme se směry „pohledů“ z tohoto bodu, tj. s vektory z vektorového prostoru V_3 . Možné řešení je zachyceno na Obr. 15. Eukleidovský prostor E_2 je znázorněn modrou (spodní) rovinou, ta tedy představuje množinu *vlastních bodů*. *Nevlastním bodům*, tj. směrům přímk z E_2 , potom odpovídají vektory rovnoběžné s touto rovinou. Pro zjednodušení našich představ volíme umístění všech těchto vektorů v bodě Q . *Nevlastní body* potom vyplňují červenou (horní) rovinu. Zvolíme-li kartézskou soustavu souřadnic „hostitelského“ prostoru E_3 tak, aby její počátek splýval s bodem Q , osy x, y ležely v rovině rovnoběžné s E_2 a osa z byla orientována tak, že její průsečík s rovinou E_2 má souřadnici 1, jak vidíme na Obr. 15, je zřejmé, že každý vlastní bod X má v této soustavě souřadnice $X = \langle x, y, 1 \rangle$, kde x, y jsou kartézské souřadnice bodu X v rovině E_2 , zatímco nevlastní bod U má souřadnice $U = \langle u_1, u_2, 0 \rangle$. Tak se nám podařilo dosáhnout vytčeného cíle. Uvedený postup není samozřejmě jediný. Není např. nutné, aby třetí souřadnice vlastního bodu byla 1. Protože nám jde o směr „pohledu“ z bodu Q do daného bodu, není nezbytné, aby vektor tohoto směru v příslušném bodě končil. Podstatné je, aby tímto bodem procházela přímka tohoto směru. Obecně tak může být třetí souřadnicí vlastního bodu jakékoliv nenulové číslo.

Pokud však všechny souřadnice tímto nenulovým číslem vydělíme, dostaneme výše uvedený speciální případ homogenních souřadnic, který také odpovídá situaci na Obr. 15. Hovoříme o tzv. *afinních homogenních souřadnicích*. Ty nám způsobem svého zavedení umožňují v případě vlastních bodů přejít

k afinním (nebo přímo kartézským) souřadnicím v \bar{E}_n . V případě nevlastních bodů pak k souřadnicím příslušných směrových vektorů ve \bar{V}_n . Pro zjednodušení však budeme nadále používat pro tento typ souřadnic vesměs označení *homogenní souřadnice*.

(Afinní) homogenní souřadnice vlastního bodu $X \in \bar{E}_2$:

$$X = \langle h_1, h_2, h_3 \rangle = \left\langle \frac{h_1}{h_3}, \frac{h_2}{h_3}, 1 \right\rangle = \langle x_1, x_2, 1 \rangle.$$

(Afinní) homogenní souřadnice nevlastního bodu (směru) $Z \in \bar{E}_2$:

$$Z = \langle z_1, z_2, 0 \rangle.$$

Potom $\langle x_1, x_2 \rangle$ jsou afinní (nebo rovnou kartézské) souřadnice bodu X v E_2 , zatímco $\langle z_1, z_2 \rangle$ jsou afinní (nebo rovnou kartézské) souřadnice směrového vektoru \vec{z} ve V_2 .

Rovnice přímky v \bar{E}_2

V \bar{E}_2 existují různé způsoby vyjádření přímky, která je v E_2 dána obecnou rovnicí $ax + by + c = 0$. Uvažujeme-li homogenní souřadnice jejího libovolného bodu X ve tvaru $X = \langle x, y, z \rangle = \left\langle \frac{x}{z}, \frac{y}{z}, 1 \right\rangle$, její obecná rovnice je ve tvaru

$$ax + by + cz = 0.$$

Je-li přímka dána dvěma body A, B s homogenními souřadnicemi $A = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle, B = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle$, můžeme ji zadat pomocí rovnice

$$X = \alpha \cdot A + \beta \cdot B,$$

která vyjadřuje její obecný bod X jako lineární kombinaci bodů (směrů) A, B . K vyjádření téhož lze využít i determinant. Rovnice přímky dané body A, B má potom tvar

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0.$$

PŘÍKLAD 3.1. V rovině E_2 je dána přímka $2x + 5y + 7 = 0$. Vypočtěte (afinní) homogenní souřadnice jejího nevlastního bodu.

PŘÍKLAD 3.2. V rovině \bar{E}_2 jsou dány body $A = \langle 0, 3, 2 \rangle, B = \langle 2, 8, 2 \rangle$. Napište rovnici přímky AB .

PŘÍKLAD 3.3. V rovině \bar{E}_2 je $A = \langle 1, 2, 0 \rangle, B = \langle 1, 1, -1 \rangle, C = \langle 0, 1, 0 \rangle, D = \langle 1, 0, -3 \rangle$. Určete souřadnice průsečičku přímek AB a CD .

Rovnice kuželosečky v \bar{E}_2

Kuželosečka s algebraickou rovnicí ve tvaru $ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0$ má v \bar{E}_2 homogenní rovnici

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dxz + 2eyz + fz^2 = 0.$$

PŘÍKLAD 3.4. V rovině E_2 je dána kuželosečka $x^2 + y^2 + 2xy - 6x - 4y + 2 = 0$. Vypočtěte její nevlastní body v \bar{E}_2 .

3.3 Zobecnění

Myšlenku projektivního rozšíření roviny můžeme zobecnit na prostor dimenze n . Výsledný prostor nazýváme projektivní prostor P_n a lze ho ztotožnit s množinou směrů $\langle V_{n+1} \rangle$:

$$P_n = \bar{E}_n = \langle V_{n+1} \rangle$$

(Afinní) homogenní souřadnice: $X = \langle x_1, \dots, x_n, x_{n+1} \rangle$.

PŘÍKLAD 3.5. Napište rovnici roviny, která prochází body $A = \langle 2, -1, 1, 2 \rangle$, $B = \langle -1, 0, 0, 1 \rangle$, $C = \langle -3, 2, 2, 3 \rangle$.

PŘÍKLAD 3.6. V prostoru \bar{A}_3 určete průsečík P přímky AB s rovinou CDE ; $A = \langle 0, 1, 0, 1 \rangle$, $B = \langle -1, 1, 2, 0 \rangle$, $C = \langle 0, 0, 0, 1 \rangle$, $D = \langle 1, 2, 0, 1 \rangle$, $E = \langle 0, 2, -5, 1 \rangle$.

3.4 Cvičení – projektivní rozšíření prostoru

1. V rovině je dána přímka $2x - 3y + 7 = 0$. Napište její rovnici v příslušných afinních homogenních souřadnicích a vypočtěte její nevlastní bod U .

2. V prostoru \bar{E}_3 je přímka popsána v afinních homogenních souřadnicích rovnicemi

$$2x_1 + 3x_2 - 4x_3 + 5x_4 = 0,$$

$$7x_1 - 4x_2 + 4x_3 - 4x_4 = 0.$$

Vypočtěte její nevlastní bod U .

3. Napište rovnici roviny, která v prostoru P_3 prochází body $A = \langle 2, -1, 1, 2 \rangle$, $B = \langle -1, 0, 0, 1 \rangle$, $C = \langle -3, 2, 2, 3 \rangle$.

4. Každá shodnost může být v homogenních souřadnicích vyjádřena jednou maticí. Pokuste se najít příslušné matice.

5. Určete obrazy bodů $A = [2, 5]$, $B = [-1, 0]$ v rotaci $R(S, \alpha)$; $S = [1, 2]$, $\alpha = \pi/3$. Použijte matici v homogenních souřadnicích.

6. V prostoru \bar{E}_3 určete průsečík P přímky AB s rovinou CDE .

$$A = (0, 1, 0, 1), B = (-1, 1, 2, 0), C = (0, 0, 0, 1), D = (2, 0, 1, 1), E = (0, 2, -5, 1).$$

7. Rovnice kuželoseček přepište do homogenních souřadnic a určete jejich nevlastní body.

a) $-x^2 + 2xy + 3y^2 - 2x + 4y + 1 = 0,$

b) $x^2 + 4xy + 4y^2 - 4x - 8y + 3 = 0,$

c) $x^2 - 5xy + 6y^2 - 2x + 1 = 0.$

8. V projektivním prostoru \overline{P}_4 najděte společný bod M rovin

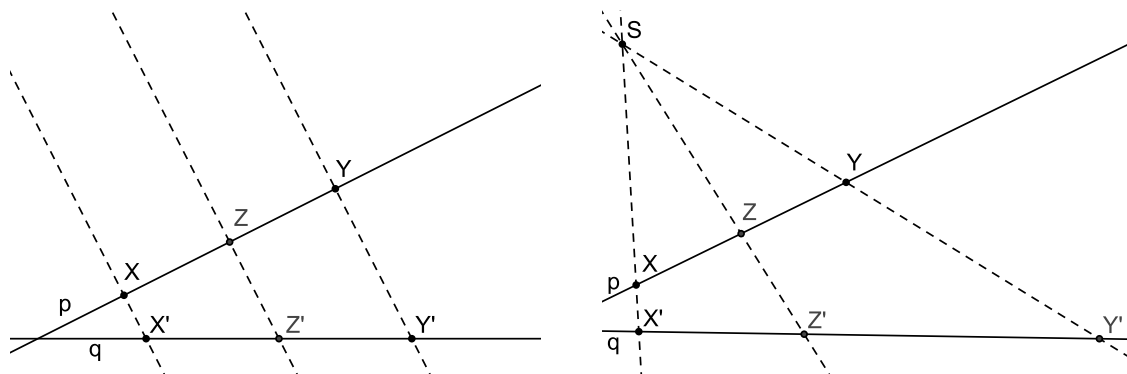
$$\begin{array}{rcccccc} x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & + & x_4 & - & 3x_5 & = & 0, \\ 2x_1 & + & x_2 & + & 4x_3 & + & 3x_4 & - & 10x_5 & = & 0, \\ & & - & 6x_2 & + & 2x_3 & + & 3x_4 & + & x_5 & = & 0, \\ 2x_1 & + & 10x_2 & - & 2x_3 & - & 4x_4 & - & 6x_5 & = & 0. \end{array}$$

4 Dvojpoměr

Pro každé geometrické zobrazení jsou typické určité vlastnosti, které se při něm zachovávají. Hovoříme o tzv. *invariantech* daného geometrického zobrazení. Pro shodné zobrazení je to např. vzdálenost bodů, pro podobné zobrazení poměr vzdáleností bodů, pro afinní zobrazení je to potom dělicí poměr. Nyní nás bude zajímat projektivní invariant (tj. vlastnost, která se zachovává např. při středovém promítání mezi dvěma různoběžnými rovinami v trojrozměrném prostoru, nebo mezi dvěma různoběžnými přímkami v rovině). Jak je patrné z Obr. 16, dělicí poměr to být nemůže. Ukáže se, že tímto invariantem je tzv. *dvojpoměr* (viz věta 12; *Pappova věta o projektivní invariantnosti dvojpoměru*). Dvojpoměrem $(ABCD)$ čtyř různých kolineárních bodů rozumíme poměr dělicích poměrů $(ABC)/(ABD)$ (viz následující definice 5). Pro podrobnější studium otázek invariantů geometrických zobrazení, zvláště pak dvojpoměru, lze doporučit [8].

Výše uvedené úvahy o invariantech můžeme shrnout takto:

- vzdálenost – metrický (eukleidovský) invariant,
- dělicí poměr – afinní invariant,
- dvojpoměr – projektivní invariant.



Obrázek 16: Středové promítání mezi dvěma různoběžnými přímkami (rovinami) na rozdíl od rovnoběžného nezachovává dělicí poměr (sledujte, jak se zobrazuje bod Z , střed úsečky XY).

Definice 5 (Dvojpoměr). *Nechť A, B, C, D jsou čtyři navzájem různé body přímky. Číslo $\delta = \frac{(ABC)}{(ABD)}$ nazýváme dvojpoměrem bodů A, B, C, D (v tomto pořadí) a značíme $\delta = (ABCD)$.*

Poznámka. Zápisem (ABC) , resp. (ABD) , rozumíme dělicí poměr bodu C , resp. D , vzhledem k bodům A, B .

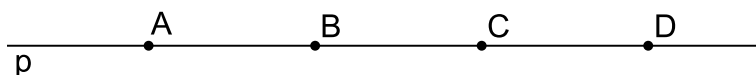
PŘÍKLAD 4.1. *Na přímce p jsou dány body A, B . Sestrojte na přímce p bod C tak, aby dělicí poměr $(ABC) = \lambda$ byl roven danému číslu.*

- $\lambda = 3$,
- $\lambda = \frac{1}{2}$,
- $\lambda = -2$.

PŘÍKLAD 4.2. Určete hodnoty dělicích poměrů (ABC_∞) , $(AB_\infty C)$, $(A_\infty BC)$, kde $A_\infty, B_\infty, C_\infty$ jsou nevlastní body.

Řešení: $(ABC_\infty) = 1$, $(AB_\infty C) = 0$, $(A_\infty BC) = \infty$.

PŘÍKLAD 4.3. Jak vidíme na Obr. 17, na přímce p jsou ve stejných vzdálenostech postupně umístěny body A, B, C, D . Určete hodnotu dvojpoměru $(ABCD)$.



Obrázek 17: Určete hodnotu dvojpoměru $(ABCD)$.

Věta 9. Dvojpoměr čtyř bodů se nezmění, vyměníme-li vzájemně dva z nich a zároveň ještě oba zbývající, t.j. platí $(ABCD) = (BADC) = (CDAB) = (DCBA)$.

Důkaz. Dokážeme přímo, rozepsáním dle definice 5. □

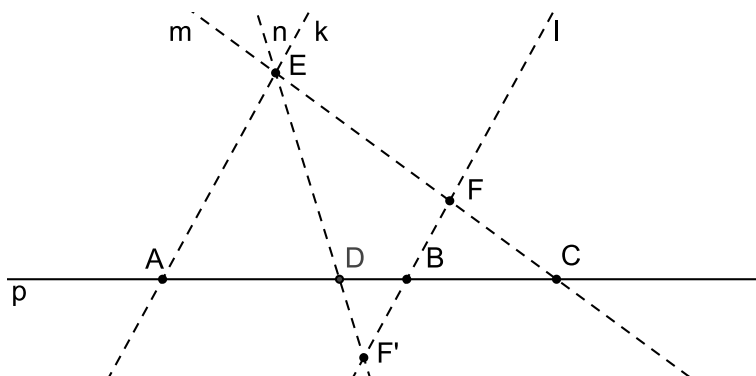
Věta 10. Vyměníme-li poslední dva body mezi sebou, změní se hodnota dvojpoměru v hodnotu převrácenou, t.j. platí $(ABCD) = \frac{1}{(ABDC)}$.

Důkaz. Dokážeme přímo, rozepsáním dle definice 5. □

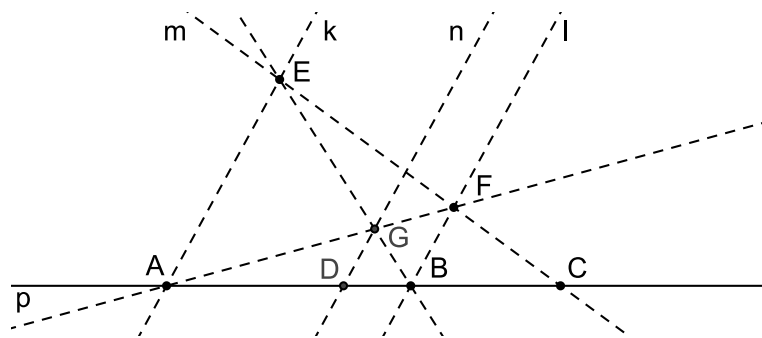
Definice 6 (Harmonická čtveřice). Je-li $(ABCD) = -1$, říkáme, že body A, B, C, D tvoří harmonickou čtveřici bodů, nebo že body C, D jsou harmonicky sdruženy vzhledem k bodům A, B , nebo že body C, D oddělují harmonicky body A, B .

PŘÍKLAD 4.4. Jsou-li na přímce dány body A, B, C , sestrojte bod D tak, aby A, B, C, D tvořily harmonickou čtveřici.

Řešení: Jedna z možných konstrukcí harmonické čtveřice, založená na podobnosti trojúhelníků, je zobrazena na Obr. 18. Vyjdeme z ní při hledání postupu konstrukce, který by byl projektivně invari-



Obrázek 18: Jedna z možných konstrukcí harmonické čtveřice

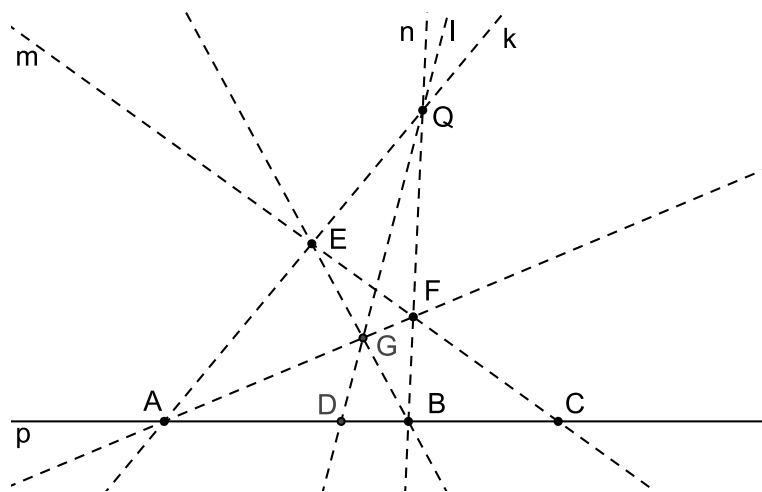


Obrázek 19: Další z možných konstrukcí harmonické čtveřice

antní (neměl by být založen na rovnoběžnosti).

Konstrukci nejprve modifikujeme (viz Obr. 19) tak, že dvojicemi bodů A, F a B, E vedeme přímky, jejichž průsečíkem G následně vedeme rovnoběžku n s přímkami k, l . Průsečíkem přímek n a p je potom hledaný bod D .

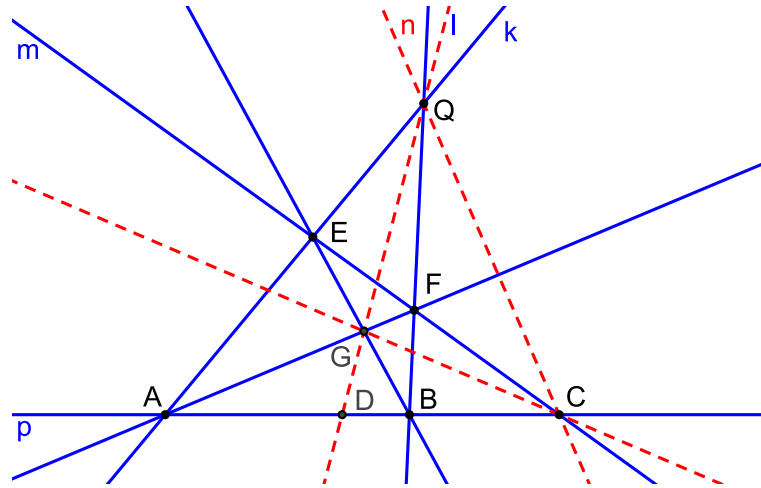
Nyní zbývá nahradit nevlastní průsečík přímek k, l, n vlastním bodem Q . Výsledkem je konstrukce na Obr. 20, která je ekvivalentní s původní a přitom při ní nemusíme využívat rovnoběžnost. Postup této konstrukce je takový, že bodem C vedeme libovolnou přímku m , na ní zvolíme dva různé body E, F a vedeme jimi přímky $k = AE$ a $n = BF$, jejichž průsečík nazveme Q . Bod D je potom určen jako průsečík přímek p a $l = QG$, kde G je průsečíkem přímek AF a BE .



Obrázek 20: Jednoduchá konstrukce harmonické čtveřice

Body A, B, F, E na Obr. 20 (viz též Obr. 21) tvoří tzv. *úplný čtyřroh*. Takto nazýváme skupinu čtyř bodů v rovině, z nichž žádné tři neleží v jedné přímce. Body A, B, F, E potom nazýváme *vrcholy úplného čtyřrohu*. Šest přímek, které tyto vrcholy spojují, nazýváme *stranami úplného čtyřrohu*. Tyto strany se protínají ještě v dalších třech bodech G, C, Q , jimž říkáme *diagonální vrcholy úplného čtyřrohu*; trojúhelník jimi určený se nazývá *diagonální trojúhelník* a jeho strany *diagonálními stranami úplného čtyřrohu*. Nalezená jednoduchá konstrukce harmonické čtveřice potom odráží *harmonickou vlastnost* úplného čtyřrohu, která je formulována v následující větě, více viz [6].

Věta 11. Na každé straně úplného čtyřrohu tvoří oba jeho vrcholy a dvojice bodů, z nichž jeden je diagonální vrchol a druhý je incidentní s jeho protější diagonální stranou, dvě dvojice bodů, které se harmonicky oddělují.



Obrázek 21: Úplný čtyřroh A, B, F, E a diagonální trojúhelník $\triangle GCQ$.

Poznámka. Tvrzení, že body A, B, C, D (viz Obr. 20 a 21) se harmonicky oddělují znamená, že pro dvojpoměr těchto bodů v uvedeném pořadí platí $(ABCD) = -1$.

PŘÍKLAD 4.5. V P_2 jsou dány body $A = (1, 2, 3), B = (3, 2, 1), C = (1, 1, 1)$. Dokažte, že leží na přímce a vypočtěte bod D tak aby $(ABCD) = -1$.

PŘÍKLAD 4.6. Střed úsečky AB je harmonicky sdružen s nevlastním bodem přímky, určené body A, B , vzhledem k bodům A, B . Dokažte.

5 Pappova věta a její důsledky

Pappos z Alexandrie (?290–?350), řecký matematik a astronom. Pod označením „Pappova věta“ je uváděno více vět. Proto je třeba uvést, o jaké z těchto vět hovoříme. Zde se budeme věnovat *Pappově větě o invarianci dvojpoměru při promítání*. Přestože je dvojpoměr invariantní vůči rovnoběžnému i středovému promítání, omezíme se zde pouze na středové promítání. Vůči rovnoběžnému promítání je invariantní i dělicí poměr. Později uvedeme ještě *Pappovu větu o šestiúhelníku*.

5.1 Středové promítání

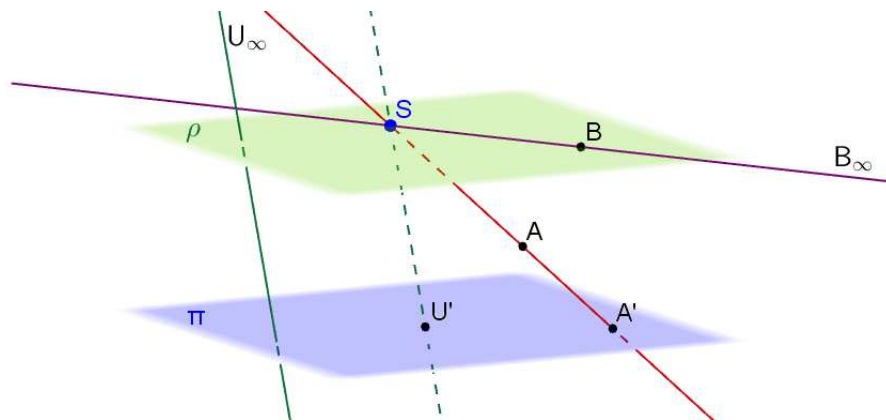
Středové promítání patří mezi zobrazení zvaná *kolíneace*. Kolíneace je nejobecnějším možným zobrazením, které zachovává linearitu geometrických útvarů, [1].

Existují různé druhy kolíneací. Zanedlouho se budeme zabývat *středovou kolíneací*, známou např. z kurzů deskriptivní geometrie.

Uvažujeme středové promítání v prostoru \bar{E}_2 nebo v prostoru \bar{E}_3 . Nejprve si probereme podobu středových průmětů základních útvarů při středovém promítání prostoru \bar{E}_3 do roviny π se středem S ($S \notin \pi$).

Zobrazení bodu

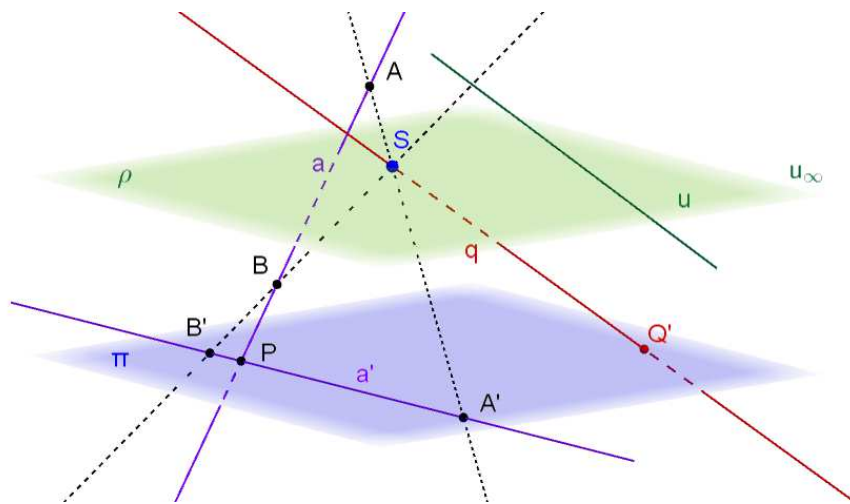
Viz Obr. 22. Vlastní bod se zobrazí opět na vlastní bod ($A \rightarrow A'$), nebo, pokud leží v rovině ρ procházející středem S rovnoběžně s průmětnou π , zobrazí se na nevlastní bod ($B \rightarrow B'_\infty$). Nevlastní bod (tj. směr přímky v \bar{E}_3) se zobrazí na vlastní bod, tzv. *úběžník* ($U_\infty \rightarrow U'$), nebo, pokud přímka leží v rovině ρ procházející středem S rovnoběžně s průmětnou π , zobrazí se sám na sebe, tj. opět na nevlastní bod.



Obrázek 22: Středové průměty bodu v \bar{E}_3 .

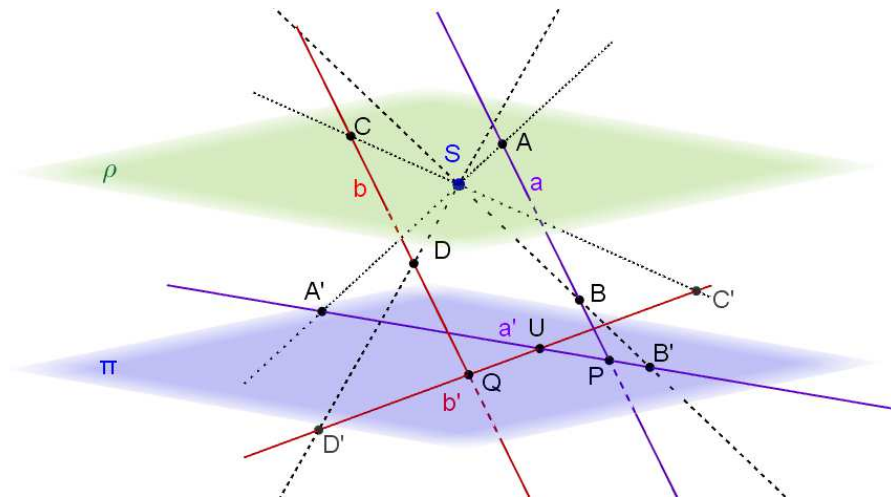
Zobrazení přímky

Viz Obr. 23. Přímka se zobrazí opět na přímku ($a \rightarrow a'$, bod P je samodružný, nazýváme ho *stopník* dané přímky), nebo, pokud je přímkou promítací, tj. prochází středem S , zobrazí se na bod ($q \rightarrow Q'$). Přímka ležící v rovině ρ procházející středem S rovnoběžně s průmětnou π se potom zobrazí na nevlastní přímku roviny π ($u \rightarrow u_\infty$) sám na sebe, tj. opět na nevlastní bod.



Obrázek 23: Středové průměty přímky v \bar{E}_3 .

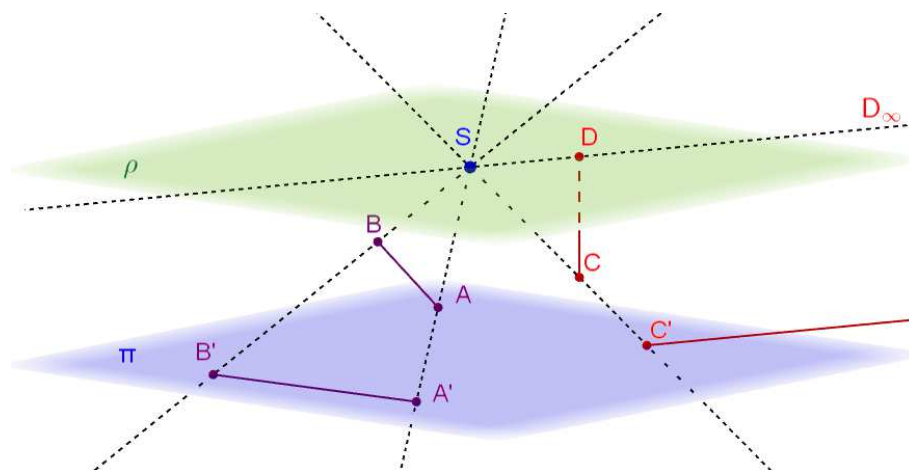
Zajímavá je otázka, jak vypadají středové průměty dvou rovnoběžek. Jak dokumentuje Obr. 24, středovými průměty dvou rovnoběžek jsou obecně dvě různoběžky ($a \rightarrow a', b \rightarrow b'; a \parallel b, a' \nparallel b'$), jejichž společným bodem je *úběžník* (bod U' na Obr. 24), obraz nevlastního bodu (směru) těchto rovnoběžek.



Obrázek 24: Středové průměty rovnoběžek v \bar{E}_3 nejsou rovnoběžné.

Zobrazení úsečky

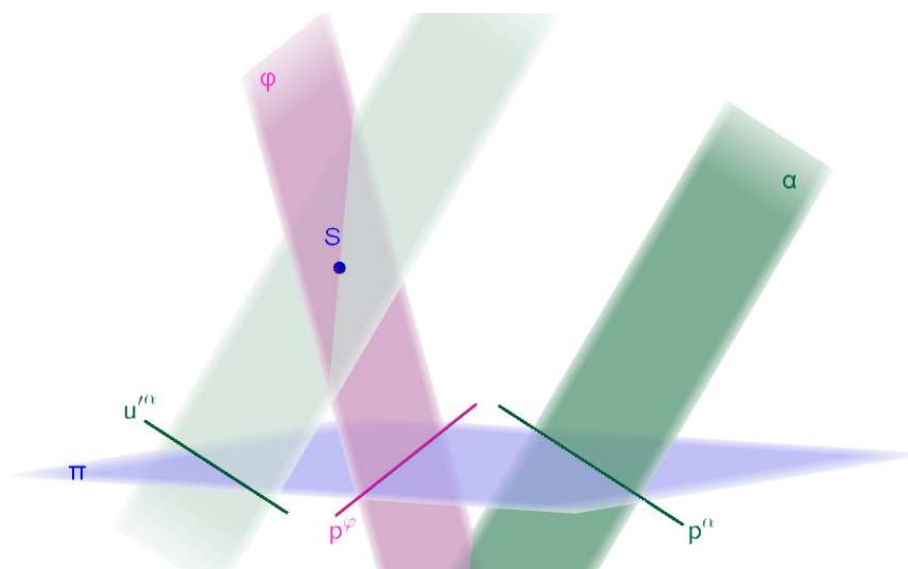
Poznamenejme pouze, že obrazem úsečky ve středovém promítání nemusí být úsečka. Jak vidíme na Obr. 25, úsečka AB v obecné poloze se zobrazí na úsečku $A'B'$, zatímco úsečka DC , která je kolmá k průmětně π a jejíž jeden krajní bod D leží v rovině ρ procházející středem S rovnoběžně s průmětnou π , se zobrazuje na polopřímku s počátečním bodem D' , jejíž směr je dle orientace uvedené na obrázku určen nevlastním obrazem D_∞ bodu D .



Obrázek 25: Středové průměty bodu v \bar{E}_3 .

Zobrazení roviny

Viz Obr. 26. Pokud je rovina promítací, tj. prochází bodem S , je jejím středovým průmětem přímka, její stopa ($\varphi \rightarrow p^\varphi$). V obecném případě je pak středovým průmětem roviny celá průmětna π ($\alpha \rightarrow \pi$). Průsečnici roviny s průmětnou nazýváme *stopou roviny* (přímky p^α a p^φ na obrázku). Nevlastní přímka roviny se promítá do tzv. *úběžnice*. Úběžnicí roviny α je přímka u'^α .

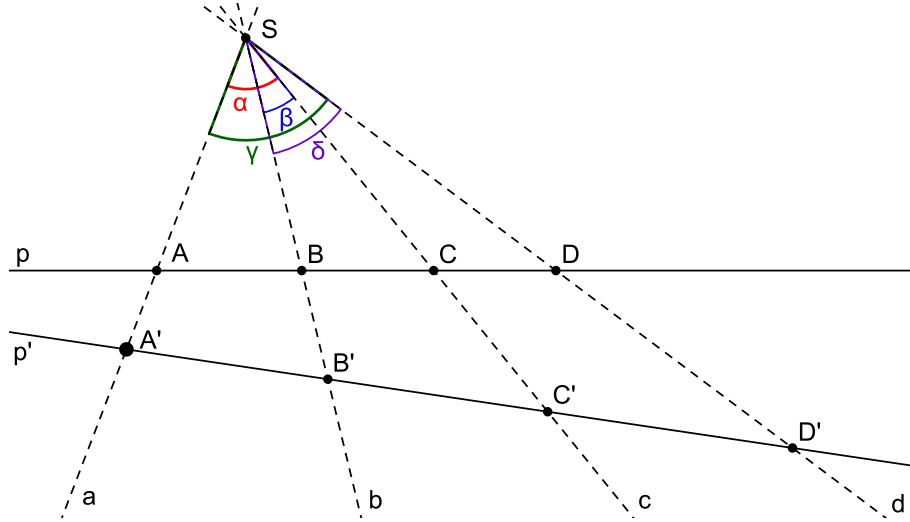


Obrázek 26: Středové průměty roviny v \bar{E}_3 .

5.2 Pappova věta o invarianci dvojpoměru

Věta 12 (Pappova věta o invarianci dvojpoměru). *Jestliže jsou A', B', C', D' rovnoběžné nebo středové průměty čtyř navzájem různých bodů A, B, C, D přímkou p na přímkou $p' \neq p$, potom $(A'B'C'D') = (ABCD)$.*

Důkaz. Jak bylo již řečeno, omezíme se pouze na středové promítání. Důkaz invariance dvojpoměru vůči rovnoběžnému promítání přenecháváme laskavému čtenáři.



Obrázek 27: Pappova věta.

Důkaz naznačíme pro konfiguraci bodů A, B, C, D dle Obr. 27. Diskusi obecné platnosti přenecháme čtenáři pro samostatnou práci.

Nebudeme dokazovat přímo rovnost $(ABCD) = (A'B'C'D')$. Dokážeme, že hodnota dvojpoměru čtyř bodů na přímce p , resp. p' , závisí pouze na úhlech, které svírají přímky spojující tyto body se středem S (úhly $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ na Obr. 27). Protože tak nezávisí na umístění přímky p , je při zachování velikostí uvedených úhlů pro všechny její polohy tento dvojpoměr stejný.

Pro dvojpoměr $(ABCD)$ platí

$$(ABCD) = \frac{(ABC)}{(ABD)}, \quad (6)$$

kde uvedené dělicí poměry můžeme vzhledem k Obr. 27 zapsat takto

$$(ABC) = \frac{|AC|}{|BC|}, \quad (ABD) = \frac{|AD|}{|BD|}. \quad (7)$$

Nyní provedeme ekvivalentní úpravy těchto rovností (7) tak, aby se v nich „objevily“ vztahy pro výpočet obsahů vybraných trojúhelníků, které tvoří body A, B, C, D, S na Obr. 27 (konkrétně se jedná o $\triangle ACS, \triangle BCS, \triangle BDS$ a $\triangle CDS$):

$$(ABC) = \frac{|AC|}{|BC|} = \frac{\frac{1}{2}|AC|v}{\frac{1}{2}|BC|v} = \frac{S_{\triangle ACS}}{S_{\triangle BCS}}, \quad (ABD) = \frac{|AD|}{|BD|} = \frac{\frac{1}{2}|AD|v}{\frac{1}{2}|BD|v} = \frac{S_{\triangle ADS}}{S_{\triangle BDS}}, \quad (8)$$

kde v je společná výška těchto trojúhelníků, tj. kolmá vzdálenost bodu S od přímky p .

Nyní vyjádříme každý z uvedených obsahů trojúhelníků za použití jiných základů a výšek

$$S_{\triangle ACS} = \frac{1}{2}|AS||SC| \sin \alpha, \quad S_{\triangle BCS} = \frac{1}{2}|BS||SC| \sin \beta, \quad (9)$$

$$S_{\triangle ADS} = \frac{1}{2}|AS||SD| \sin \gamma, \quad S_{\triangle BDS} = \frac{1}{2}|BS||SD| \sin \delta. \quad (10)$$

a dosadíme do vztahů (8)

$$(ABC) = \frac{S_{\triangle ACS}}{S_{\triangle BCS}} = \frac{\frac{1}{2}|AS||SC| \sin \alpha}{\frac{1}{2}|BS||SC| \sin \beta} = \frac{|AS| \sin \alpha}{|BS| \sin \beta}, \quad (11)$$

$$(ABD) = \frac{S_{\triangle ADS}}{S_{\triangle BDS}} = \frac{\frac{1}{2}|AS||SD| \sin \gamma}{\frac{1}{2}|BS||SD| \sin \delta} = \frac{|AS| \sin \gamma}{|BS| \sin \delta}, \quad (12)$$

zjednodušené tvary pak do (13)

$$(ABCD) = \frac{\frac{|AS| \sin \alpha}{|BS| \sin \beta}}{\frac{|AS| \sin \gamma}{|BS| \sin \delta}}, \quad (13)$$

abychom po zjednodušení dostali vztah

$$(ABCD) = \frac{\sin \alpha \sin \delta}{\sin \beta \sin \gamma}, \quad (14)$$

ze kterého vyplývá nezávislost hodnoty dvojpoměru $(ABCD)$ na volbě přímky p . Je tedy

$$(ABCD) = (A'B'C'D'). \quad (15)$$

□

Pappovu větu můžeme formulovat i jednodušším způsobem.

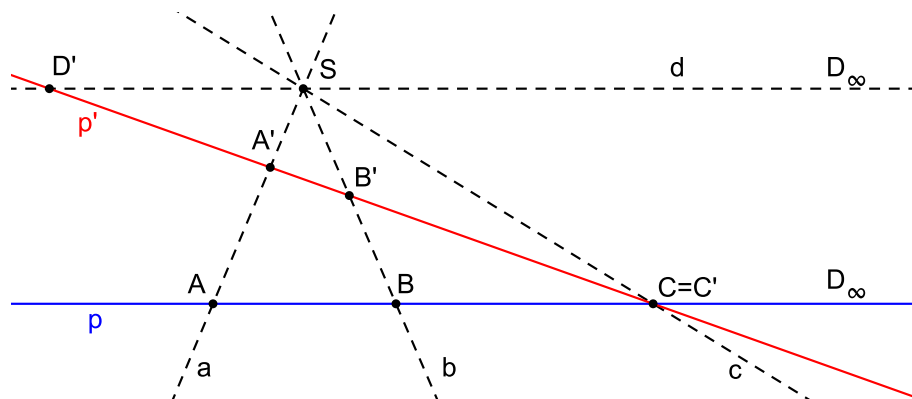
Věta 13 (Pappova věta o invarianci dvojpoměru II). *Dvojpoměr se promítáním nemění.*

Poznámka. Pappova věta o invarianci dvojpoměru platí i v případě, že je jeden z uvažovaných bodů nevlastní. Například pro D_∞ (viz Obr. 28) platí

$$(ABCD_\infty) = (ABC). \quad (16)$$

Postup důkazu tohoto vztahu je analogický s důkazem věty 12. Jak ukazuje Obr. 28, body A, B, C, D_∞ , kde D_∞ je nevlastní, leží na přímce p . Je však třeba mít na paměti, že pro jinou přímku, např. p' dle Obr. 28, mohou být všechny čtyři body A', B', C', D' vlastní.

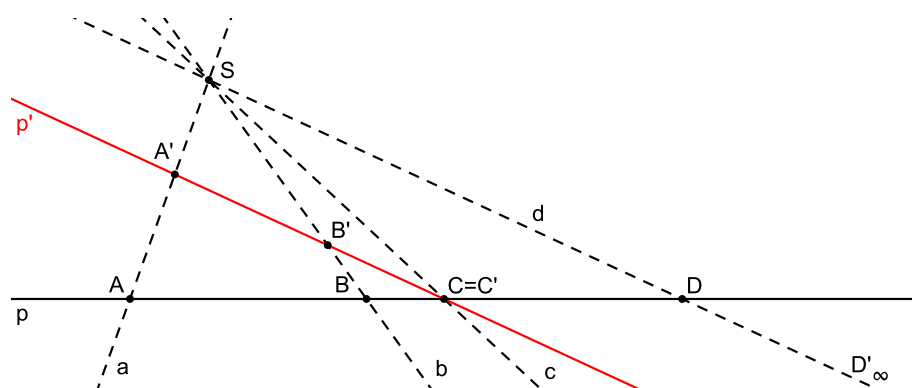
Skutečnost uvedenou v poslední poznámce můžeme výhodně využít při řešení následujícího příkladu.



Obrázek 28: Pappova věta pro nevlastní bod.

PŘÍKLAD 5.1. Na přímce p jsou dány tři různé body A, B, C . Sestrojte bod D tak, aby $(ABCD) = \mu$, kde μ je dané číslo.

Řešení: Viz Obr. 29. Vyjdeme z toho, že platí $(ABCD) = (A'B'C'D'_\infty) = (A'B'C')$. Nejprve sestrojíme (libovolnou) přímku p' procházející bodem $C = C'$, na ní potom zvolíme body A', B' tak, aby platilo $(A'B'C') = \mu$. Jako průsečík přímek AA', BB' dostaneme střed S , kterým vedeme rovnoběžku s p' . Jejím průsečíkem s p je hledaný bod D .



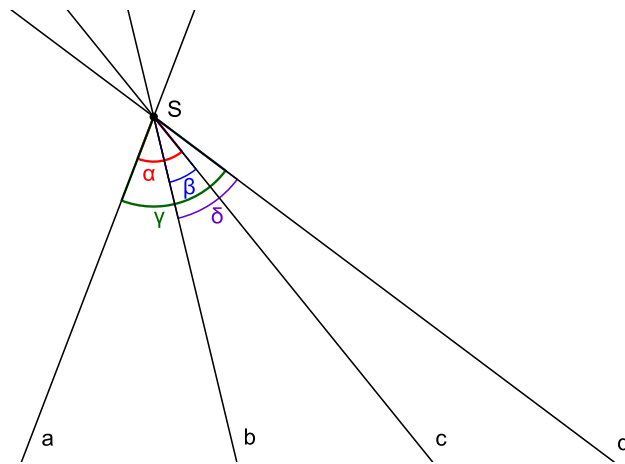
Obrázek 29: Konstrukce daného dvojpoměru.

Dvojpoměr čtyř přímek

Z výše uvedeného důkazu Pappovy věty (Věty 12) vyplývá, že pravdivost jejího tvrzení závisí pouze na zachování velikostí úhlů mezi promítacími přímkami a, b, c, d , viz Obr. 27. Místo dvojpoměru čtveřice bodů A, B, C, D ležících na jedné přímce p tak můžeme klidně uvažovat dvojpoměr čtveřice přímek a, b, c, d procházejících jedním bodem S , viz Obr. 30. Zaměnili jsme tedy body za přímky a přímky za body, a dostali jsme opět smysluplný vztah. To je projevem tzv. *principu duality v projektivní rovině*, kterému se věnujeme v následující kapitole 5.3.

Pro dvojpoměr čtyř přímek a, b, c, d z Obr. 27 a 30 zřejmě platí

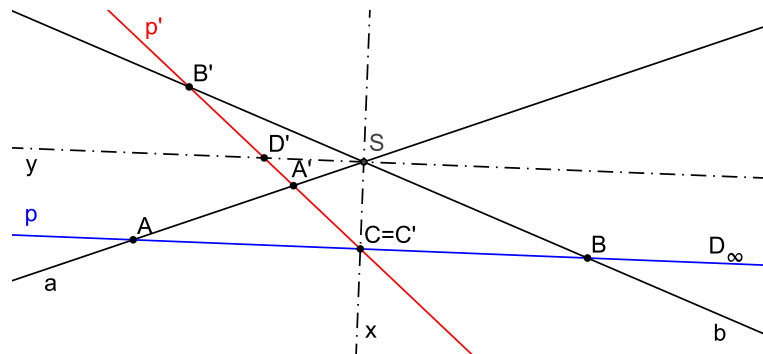
$$(abcd) = (ABCD) = \frac{\sin \alpha \sin \delta}{\sin \beta \sin \gamma}. \quad (17)$$



Obrázek 30: Dvojpoměr čtyř přímek.

PŘÍKLAD 5.2. Určete hodnotu $(abxy)$, jsou-li a, b dvě různoběžné přímky a x, y osy souměrnosti úhlů, které přímky a, b svírají.

Řešení: Viz Obr. 31. Je zřejmé, že platí $(abxy) = -1$.



Obrázek 31: Dvojpoměr dvou různoběžek a os jejich úhlů.

Analogicky s dvojpoměrem čtyř přímek zavedeme dvojpoměr čtyř nevlastních bodů a dvojpoměr čtyř rovin.

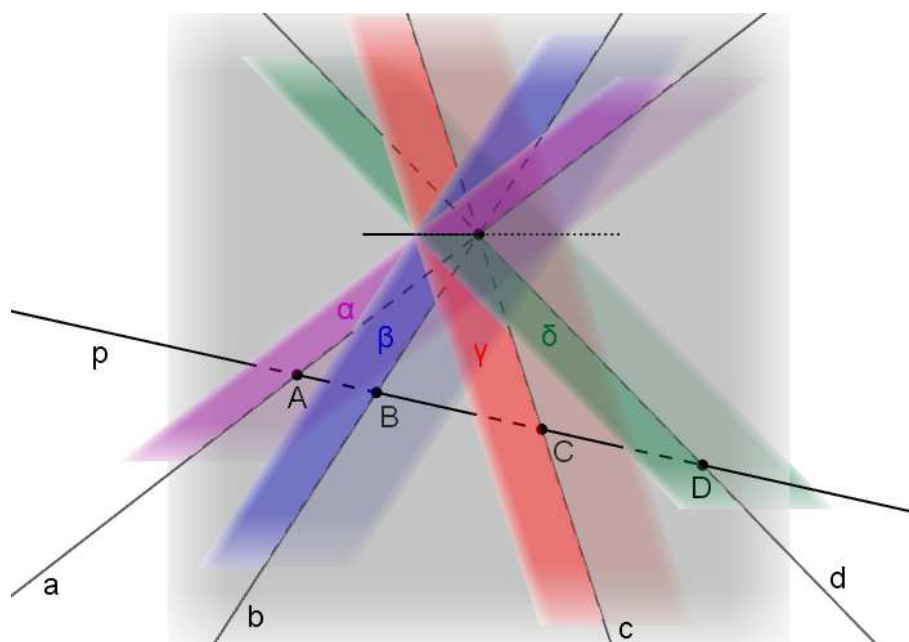
Dvojpoměr čtyř nevlastních bodů

$$(A_{\infty}B_{\infty}C_{\infty}D_{\infty}) = (abcd).$$

Dvojpoměr čtyř rovin

$$(\alpha\beta\gamma\delta) = (abcd).$$

Viz Obr. 32.



Obrázek 32: Dvojpoměr čtyř rovin.

5.3 Princip duality v projektivní rovině

Z každé věty v rovinné projektivní geometrii dostaneme novou správnou větu, když v ní příslušné pojmy nahradíme pojmy s nimi duálními, například slovo „bod“ nahradíme slovem „přímka“ a slovo „přímka“ nahradíme slovem „bod“, přičemž incidenci zachováme. Kompletní přehled vzájemně duálních pojmů a tvrzení nabízí následující tabulka 1. Vzájemnými záměnami uvedených pojmů vznikají dvojice „navzájem duálních vět“.

bod	přímka
leží na	prochází
přímka spojující dva body	průsečík dvou přímek
přímky procházející jedním bodem	body ležící na jedné přímce
čtyřroh	čtyřstran
pól	polára
množina bodů dané vlastnosti	obálka
tečna	bod dotyku

Tabulka 1: Vzájemně duální pojmy, [2]

Ukázka dvojice navzájem duálních vět:

Věta 1: Dvěma různými body prochází jediná přímka.

Věta 2: Dvě různé přímky se protínají v jediném bodě.

Poznámka. Dualizovat nelze vzdálenost a úhel.

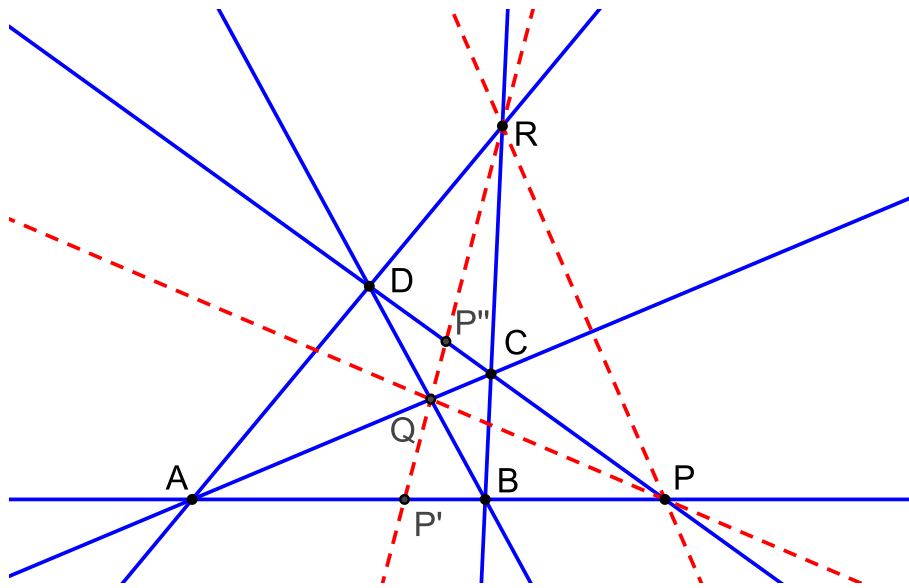
5.4 Princip duality v praxi

Uplatnění principu duality ilustrují také dvě následující vzájemně duální definice – definice úplného čtyřrohu (viz Obr. 33) a definice úplného čtyřstranu.

Definice 7 (Úplný čtyřroh). Skupina čtyř bodů A, B, C, D v rovině, z nichž žádné tři neleží v jedné přímce, se nazývá **úplný čtyřroh** A, B, C, D . Body A, B, C, D se nazývají jeho **vrcholy**. Šest přímek, z nichž každá je incidentní se dvěma z těchto vrcholů, nazýváme **stranami** úplného čtyřrohu A, B, C, D . Tyto strany se protínají ještě v dalších třech bodech P, Q, R , jimž říkáme **diagonální vrcholy** úplného čtyřrohu; trojúhelník jimi určený se nazývá **diagonální trojúhelník** a jeho strany **diagonálními stranami** úplného čtyřrohu A, B, C, D .

Definice 8 (Úplný čtyřstran). Skupina čtyř přímek a, b, c, d v rovině, z nichž žádné tři neprocházejí týmž bodem, se nazývá **úplný čtyřstran** a, b, c, d . Přímky a, b, c, d se nazývají jeho **strany**. Šest bodů, z nichž každý je incidentní se dvěma z těchto stran, nazýváme **vrcholy** úplného čtyřstranu a, b, c, d . Tyto vrcholy lze spojit ještě dalšími třemi přímkami p, q, r , jimž říkáme **diagonální strany**; trojúhelník jimi určený se nazývá **diagonální trojúhelník** a jeho vrcholy pak **diagonálními vrcholy** úplného čtyřstranu a, b, c, d .

Věta 14. Na každé straně úplného čtyřrohu tvoří oba jeho vrcholy (viz Obr. 33, body A, B) a pár bodů, z nichž jeden je diagonální vrchol a druhý je incidentní s jeho protější diagonální stranou (viz Obr. 33, body P', P''), dvě dvojice bodů, jež se navzájem oddělují harmonicky.



Obrázek 33: Úplný čtyřroh.

Důkaz. Uvažujme nejprve středové promítání se středem R , potom se středem Q . Dostaneme

$$(DCPP'') = (ABPP'), \quad (DCPP'') = (BAPP'), \quad (18)$$

odkud plyne

$$(ABPP') = (BAPP') = \frac{1}{(ABPP')}, \quad (19)$$

tj.

$$(ABPP')^2 = 1. \quad (20)$$

Protože body P a P' jsou odděleny bodem B , musí být dvojpoměr $(ABPP')$ záporný. Výsledkem odmocnění (20) je tedy rovnost

$$(ABPP') = -1. \quad (21)$$

Tím je věta dokázána. \square

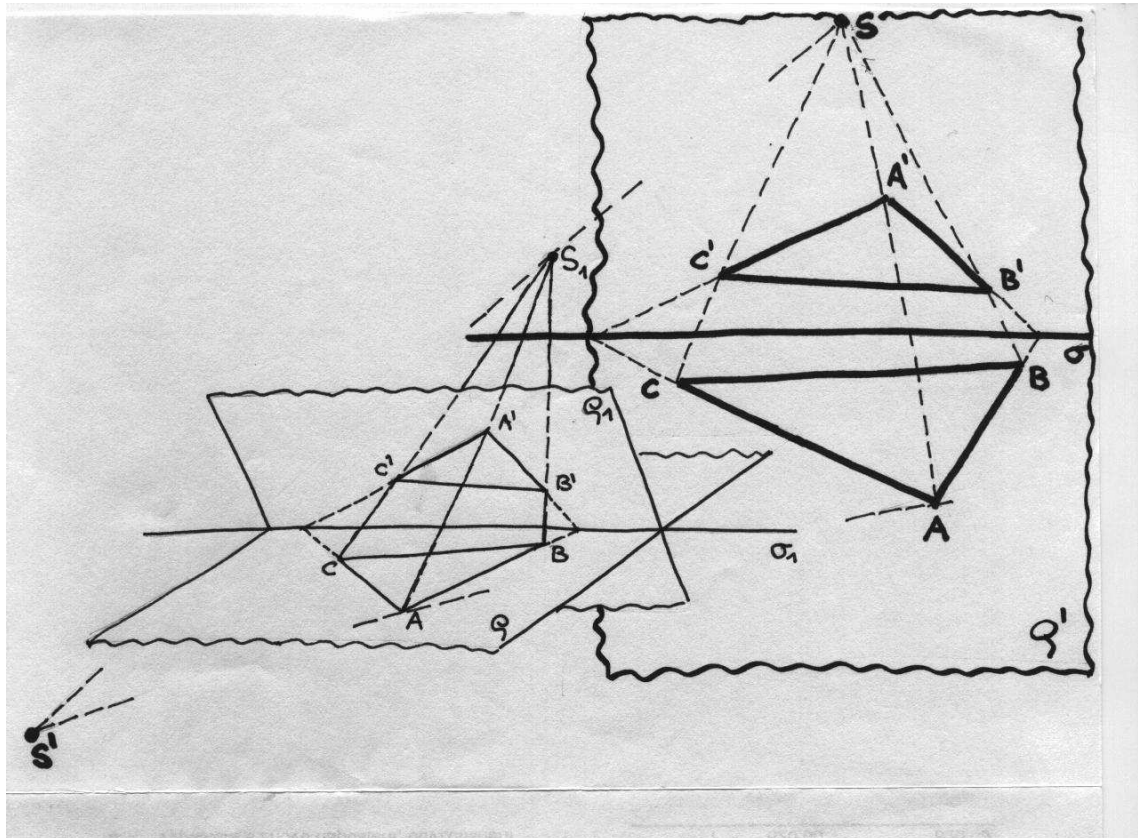
Věta 14 nám dovoluje konstruovat harmonickou čtveřici jednoduše pomocí úplného čtyřrohu, jak jsme uvedli již na str. 21.

5.5 Cvičení – Pappova věta a princip duality

1. K větě 14 vyslovte větu **duální** a tu **dokažte**.
2. Dvě protější strany úplného čtyřrohu jsou harmonicky sdruženy vzhledem k příslušným diagonálním stranám. Dokažte.
3. Ke konstrukci harmonické čtveřice bodů (doplňit D , známe-li A, B, C) vymyslete konstrukci duální, tj. konstrukci harmonické čtveřice přímek.

6 Středová kolineace

Jak naznačuje Obr. 34, středová kolineace (se středem S), jako vzájemně jednoznačné zobrazení \bar{E}_2 na sebe, je výsledkem středového průmětu (se středem S') středového promítání (se středem S_1) mezi dvěma různoběžnými rovinami v prostoru E_3 .



Obrázek 34: Vznik středové kolineace

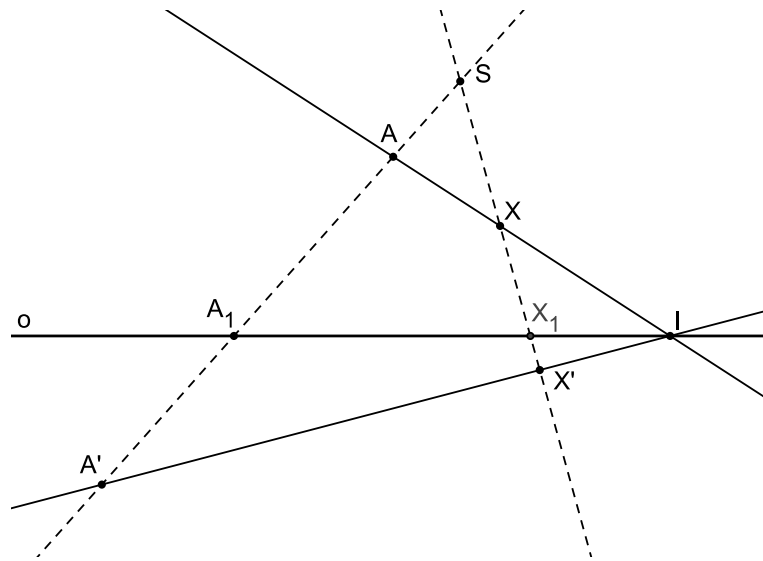
Definice 9 (Středová kolineace). *Středovou kolineací (též perspektivní kolineací, osovou kolineací či homologií) rozumíme vzájemně jednoznačné zobrazení roviny \bar{E}_2 těchto vlastností (viz Obr. 35):*

1. *Spojnice odpovídajících si bodů procházejí pevným bodem - středem kolineace.*
2. *Průsečík odpovídajících si přímek leží na pevné přímce - ose kolineace.*
3. *Incidence se zachovává.*

Poznámka. Tři kolineární body (tj. tři body na přímce) přejdou tímto zobrazením opět v body kolineární - proto KOLINEACE.

Poznámka. Středová kolineace je určena:

- osou o (samodružná přímka)
- středem S (samodružný bod)
- dvojicí odpovídajících si bodů A, A' ; $S \in AA'$ nebo přímek p, p' ; $S \notin p, p'$.



Obrázek 35: Zobrazení bodu ve středové kolineaci se středem S a s osou o

PŘÍKLAD 6.1. Ve středové kolineaci určené osou o , středem S a dvojicí bodů A, A' sestrojte:

- obraz bodu X ,
- obraz přímky p .

PŘÍKLAD 6.2. Ve středové kolineaci určené středem, osou a jedním párem odpovídajících si přímek sestrojte:

- obraz bodu B ,
- obraz přímky m .

Věta 15. Střed a každý bod osy kolineace jsou jejími samodružnými body. Osa kolineace a každá přímka procházející jejím středem jsou samodružné přímky.

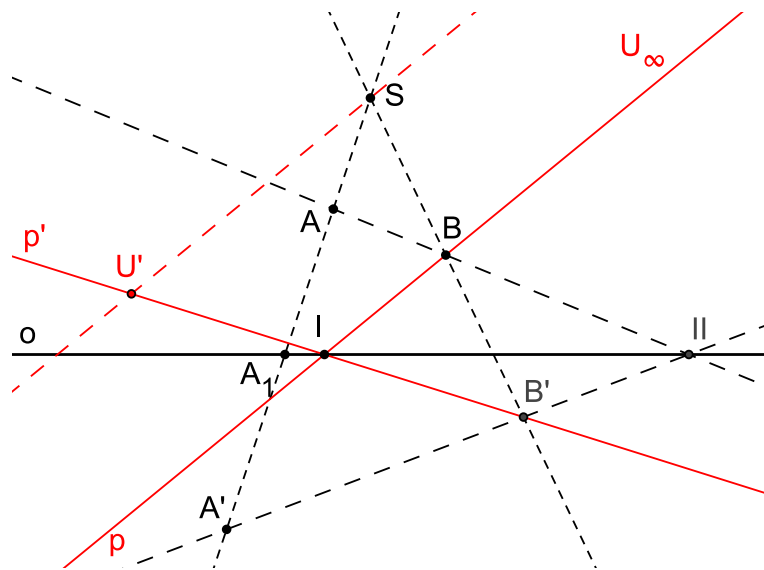
Věta 16. Kolineace je určena, je-li dán její střed, osa a jeden pár odpovídajících si bodů nebo přímek, jež nejsou incidentní ani se středem, ani s osou kolineace.

Charakteristika kolineace

$$(SA_1AA') = (SB_1BB') = \lambda$$

PŘÍKLAD 6.3. Středová kolineace je určena středem, osou a dvojicí sobě odpovídajících bodů. Sestrojte obraz nevlastního bodu U_∞ přímky p .

Řešení: Viz Obr. 36.



Obrázek 36: Zobrazení nevlastního bodu přímky p ve středové kolineaci se středem S a s osou o

Úběžník a úběžnice

- Úběžník je bod, který je v dané kolineaci obrazem nevlastního bodu (viz bod U' na Obr. 36).
- Úběžnice je přímka, která je obrazem nevlastní přímky.

PŘÍKLAD 6.4. *Úběžnice je rovnoběžná s osou kolineace. Dokažte.*

Řešení: Důkaz založíme na skutečnosti, že osa kolineace je přímkou samodružných bodů. Protože úběžnice je obrazem nevlastní přímky, nemůže mít s osou kolineace jiný společný bod než bod nevlastní.

PŘÍKLAD 6.5. *Sestrojte úběžnici v kolineaci dané středem, osou a*

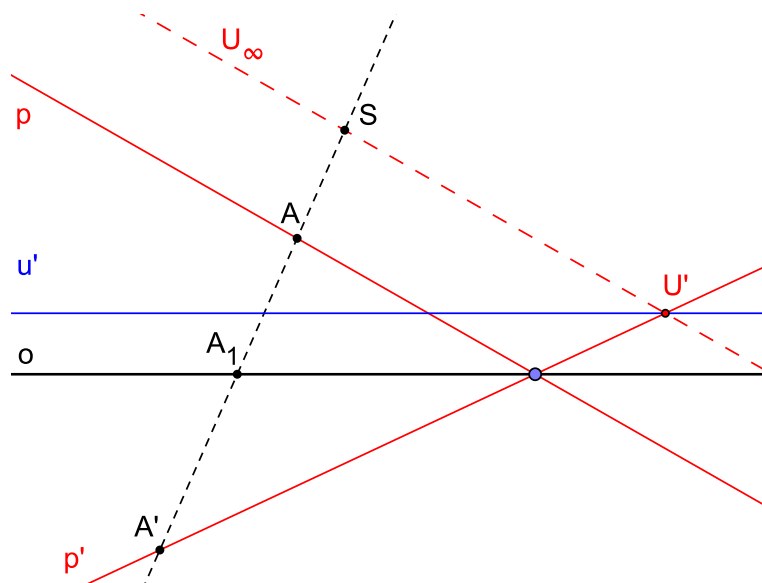
- párem odpovídajících si bodů,*
- párem odpovídajících si přímek.*

Řešení: Řešení ad a) viz Obr. 37

PŘÍKLAD 6.6. *Ve středové kolineaci najděte alespoň jeden bod V , jehož obrazem je nevlastní bod.*

Věta 17. *V kolineaci existují dvě úběžnice (1. a 2. úběžnice nebo úběžnice a protiúběžnice). Vzdálenost středu kolineace od jedné z nich je rovna vzdálenosti osy kolineace od druhé z nich; přitom buď obě tyto úběžnice leží mezi středem a osou kolineace, nebo střed a osa kolineace leží mezi těmito úběžnicemi.*

Věta 18. *Kolineace je určena středem, osou a jednou úběžnicí.*



Obrázek 37: Zobrazení úběžnice u' ve středové kolineaci se středem S a s osou o

PŘÍKLAD 6.7. *Ve středové kolineaci určené středem S , osou o a úběžnicí u sestrojte obraz bodu A .*

Věta 19. *Dvojpoměr se kolineací zachovává.*

PŘÍKLAD 6.8. *Střed úsečky se kolineací většinou nezachovává. Ukažte.*

PŘÍKLAD 6.9. *Středová kolineace je dána středem S , osou o a dvojicí bodů B, B_∞ . Najděte obraz bodu A .*

6.1 Kolineace kružnice a kuželosečky

Kuželosečce odpovídá v kolineaci zase kuželosečka. Obrazem kružnice v kolineaci tak může být elipsa, parabola nebo hyperbola. Na čem to závisí?

PŘÍKLAD 6.10. *Sestrojte elipsu, která odpovídá kružnici k v kolineaci dané osou, středem a úběžnicí.*

Při konstrukci obrazu kuželosečky v kolineaci využíváme následující vlastnosti:

1. Tečna kuželosečky k přejde kolineací v tečnu kuželosečky k' .
2. Dvojpoměr se kolineací zachovává.
3. Přímek rovnoběžným s osou kolineace odpovídají přímky téhož směru.
4. Kuželosečky k, k' odpovídající si v kolineaci mají společné průsečíky s osou kolineace a společné tečny vedené k nim ze středu kolineace.

5. Polární vlastnosti kuželoseček:

- Je-li přímka p polárou bodu P vzhledem ke kuželosečce k , pak body dotyku T_1, T_2 tečen kuželosečky k z bodu P jsou průsečíky p s k .
- Bod P indukuje na kuželosečce *involuci*.
- Dva body, z nichž každý leží na poláře toho druhého vzhledem k téže kuželosečce, se nazývají *sdrúžené póly*.

6. Průměr kuželosečky

- Každá vlastní přímka, jejíž pól je bod nevlastní.
- Spojnice bodu dotyku dvou rovnoběžných tečen kuželosečky (kromě paraboly).
- Spojnice průsečíku dvou tečen kuželosečky se středem úsečky určené body dotyku těchto tečen s kuželosečkou.
- Spojnice středu dvou rovnoběžných tětiv.
- Každá přímka procházející středem kuželosečky (středové).

7. Střed kuželosečky

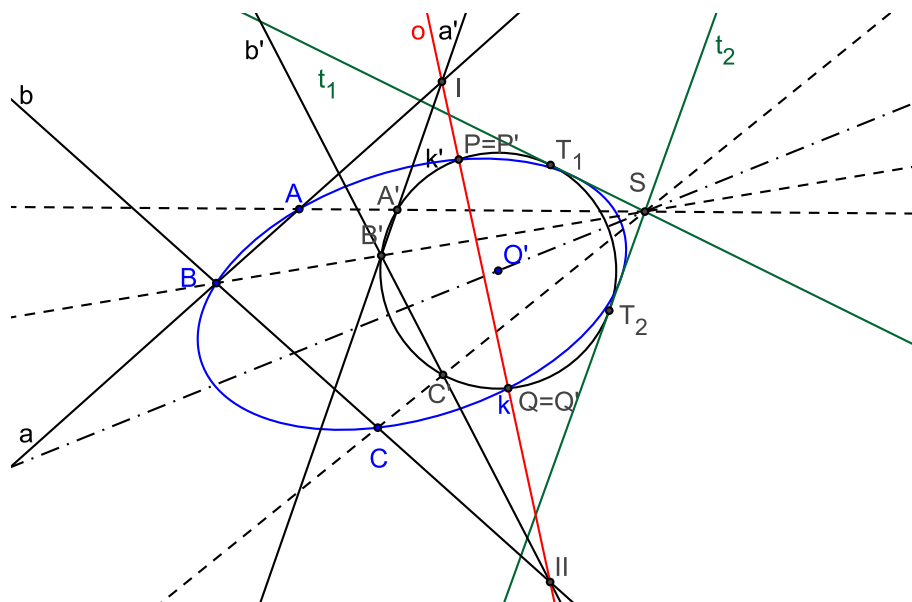
- Pro středové kuželosečky (elipsa, hyperbola) je to pól nevlastní přímky. Pól nevlastní přímky vzhledem k parabole je bod dotyku nevlastní přímky s parabolou.

PŘÍKLAD 6.11. Sestrojte parabolou, která odpovídá kružnici k v dané kolineaci.

PŘÍKLAD 6.12. Sestrojte hyperbolu, která odpovídá kružnici k v dané kolineaci.

PŘÍKLAD 6.13. Sestrojte kuželosečku, znáte-li tři její body a dvě tečny.

Řešení: Viz Obr. 38



Obrázek 38: Konstrukce kuželosečky (elipsy) z daných 3 bodů a 2 tečen

PŘÍKLAD 6.14. Středová kolineace v \overline{E}_2 je dána osou $o: y = 0$, středem $S = \langle 1, 0, a \rangle$ a dvojicí bodů $B = \langle 1, 0, b \rangle$, $B'_\infty = \langle 0, 0, b' \rangle$. Volte hodnoty parametrů a, b, r tak, aby obrazem kružnice $x^2 + y^2 = r^2$ byla postupně **parabola, hyperbola a elipsa**. Sestrojte.

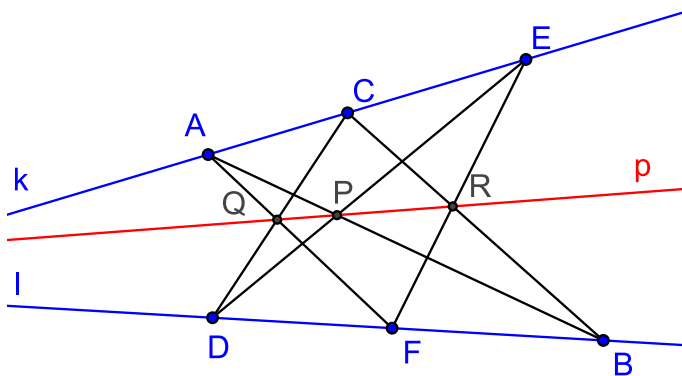
7 Vybrané věty projektivní geometrie

7.1 Pappova věta o šestiúhelníku

Následující větu poprvé dokázal *Pappos z Alexandrie* kolem roku 300 n. l. Její význam pro základy projektivní geometrie byl však rozpoznán až v 17. století, [2].

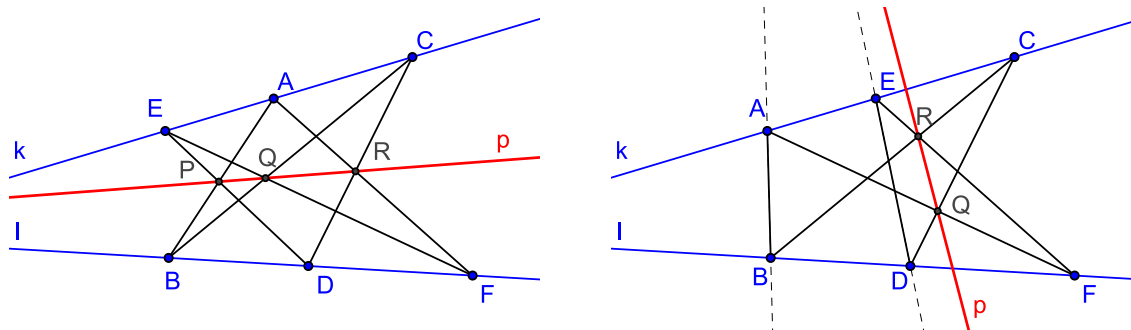
Věta 20 (Pappova věta o šestiúhelníku). *Jestliže A, C, E je trojice kolineárních bodů ležících na přímce k a B, D, F je další trojice kolineárních bodů tentokrát ležících na l , a jestliže se přímky AB, CD, EF protínají v uvedeném pořadí postupně s přímkami DE, FA, BC , potom jejich průsečíky $P = AB \cap DE, Q = CD \cap FA$ a $R = EF \cap BC$ leží v přímce (viz Obr. 39, přímka p , tzv. Pappova přímka).*

Důkaz. Větu zde uvádíme bez důkazu. Pěkný důkaz s využitím Menelaovy věty je publikován v [2]. □



Obrázek 39: Pappova věta o šestiúhelníku

„Projektivní charakter“ věty 20 spočívá v tom, že pojednává čistě jenom o incidenci, bez jakékoliv závislosti na délkách úseček a velikostech úhlů, i bez ohledu na uspořádání bodů (viz Obr. 40).



Obrázek 40: Pappova věta o šestiúhelníku, jiná uspořádání vrcholů

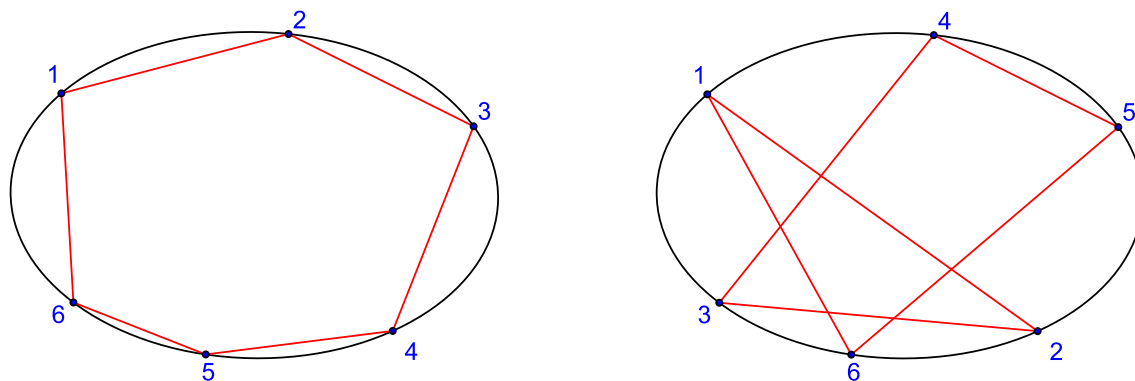
7.2 Šestiúhelník

Výše uvedená věta 20 je deklarována ve spojení s šestiúhelníkem. Je otázkou, s jakým. Jedná se o šestiúhelník $ABCDEF$ (že jsou jeho vrcholy „zpřeházené“ a nejdou pěkně „dokola“, jak jsme zvyklí, to nevadí). Body P, Q, R pak můžeme interpretovat jako průsečíky „protilehlých stran“ tohoto šestiúhelníku (více viz např. https://en.wikipedia.org/wiki/Pappus%27s_hexagon_theorem).

Proč nás zajímá právě uspořádání šesti bodů v rovině? Je známo, že kuželosečka je jednoznačně určena pěti body (viz např. nástroj *Kuželosečka daná pěti body* programu GeoGebra)¹.

Vezmeme-li libovolnou pětici bodů, vždycky je jimi určena nějaká kuželosečka. Nabízí se tak otázka, jakou podmínkou musí být spjato *šest bodů*, aby všechny ležely na jedné kuželosečce. Takovouto podmínku, kterou splňuje šest bodů ležících na jedné kuželosečce, objevil francouzský matematik a filozof *Blaise Pascal* (1623–1662) a uveřejnil ji roku 1640 (objevil ji ve svých 16 letech!), [6]. *Pascalově větě*, která o této podmínce pojednává, se budeme věnovat v následující kapitole 7.3. Zde si nejprve uvedeme některé poznatky a důležité pojmy související s „organizací“ šesti bodů do formy šestiúhelníku.

Vzhledem k výše uvedenému je pochopitelné, že se budeme zabývat šesti body na kuželosečce (pro názornost se omezujeme na kružnici nebo elipsu). Šest bodů na kuželosečce, z nichž žádné tři sousední neleží v přímce, můžeme chápat jako vrcholy šestiúhelníku, který je kuželosečce vepsán. *Uvažujme jedno takové rozmístění šesti bodů na dané kuželosečce*. Pokud budeme body (a jejich pořadí jako vrcholů šestiúhelníku) rozlišovat očíslováním 1, 2, 3, 4, 5, 6, je dobré si uvědomit, že existuje tolik vepsaných šestiúhelníků odpovídajících dané šesticí bodů, kolik je možných způsobů očíslování (též můžeme říkat *pojmenování*) těchto bodů, tj. $6! = 720$. Přitom ale vždy 12 z těchto šestiúhelníků má stejný „tvar“ a liší se jenom pojmenováním vrcholů (který z vrcholů má číslo 1 a zda pokračujeme v záporném či v kladném smyslu, tj. 6 možností „očíslování vrcholů“ na jednu stranu a 6 možností „očíslování vrcholů“ na druhou stranu). Daným šesti bodům na kuželosečce tak lze přiřadit $720/12 = 60$ různých šestiúhelníků. Dva konkrétní příklady vidíme na Obr. 41.



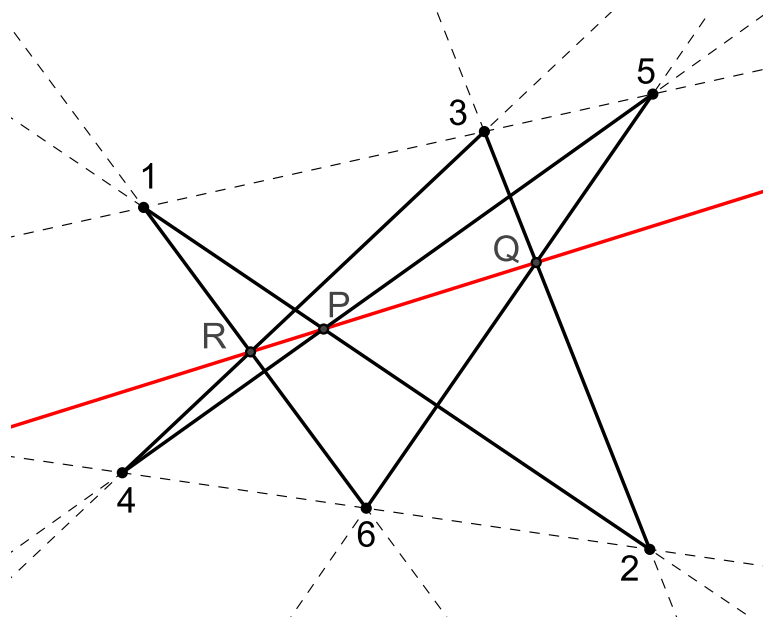
Obrázek 41: Dva příklady šestiúhelníku vepsaného dané elipse (pro pevně zvolené umístění 6 bodů)

U šestiúhelníku rozlišujeme dvojice vrcholů *sousedních* (1-2, 2-3, 3-4, 4-5, 5-6, 6-1), *střídavých* (1-3, 2-4, 3-5, 4-6, 5-1, 6-2) a *protilehlých* (1-4, 2-5, 3-6). Přímkou spojující dvojici protilehlých vrcholů

¹Tuto skutečnost můžeme zdůvodnit například tím, že dvě kuželosečky mohou mít nejvýše čtyři společné body. Pro jejich odlišení pak potřebujeme o jeden bod navíc. Další možností je argumentovat počtem vstupních údajů potřebných pro výpočet rovnice kuželosečky, tj. určení šesti koeficientů a, b, c, d, e, f v rovnici $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$. Vzhledem k tomu, že se jedná o homogenní rovnici, vystačíme se souřadnicemi pěti bodů.

šestiúhelníku budeme nazývat *diagonálou* (14, 25, 36). Mezi stranami šestiúhelníku nás budou zajímat *protilehlé strany* (12-45, 23-56, 34-61). Šestiúhelník má tedy tři dvojice protilehlých stran a tři diagonály.

Ačkoliv tři sousední vrcholy nesmí být kolineární, pro jiné trojice vrcholů to možné je. Větu 20 tak můžeme přeformulovat tímto způsobem: *Jestliže je každá trojice střídavých vrcholů šestiúhelníku kolineární a jestliže se tři dvojice jeho protilehlých stran protínají, potom jsou průsečíky těchto stran kolineární* (viz Obr. 42).



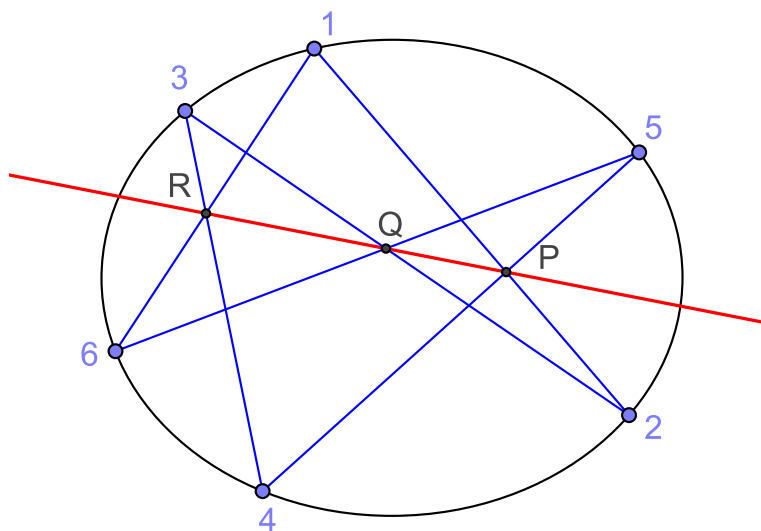
Obrázek 42: Pappova věta pro šestiúhelník 123456

7.3 Pascalova věta

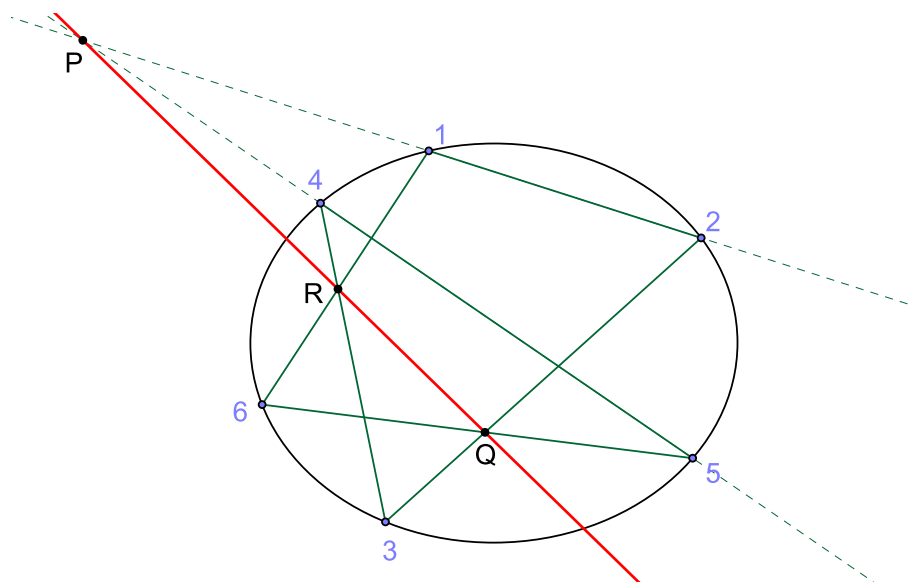
Jak už bylo uvedeno, následující větu formuloval ve svých 16 letech francouzský matematik a filozof *Blaise Pascal*, [2, 6].

Věta 21 (Pascalova věta). *Průsečíky protilehlých stran šestiúhelníku vepsaného kuželosečce jsou tři body ležící na jedné přímce (tzv. Pascalova přímka) a naopak, leží-li průsečíky protilehlých stran šestiúhelníku na jedné přímce, je tento šestiúhelník vepsán kuželosečce.*

Důkaz. Větu zde uvádíme bez důkazu. Důkaz jejího speciálního případu pro šestiúhelník vepsaný kružnici s využitím Menelaovy věty je publikován v [2]. \square



Obrázek 43: Pascalova věta



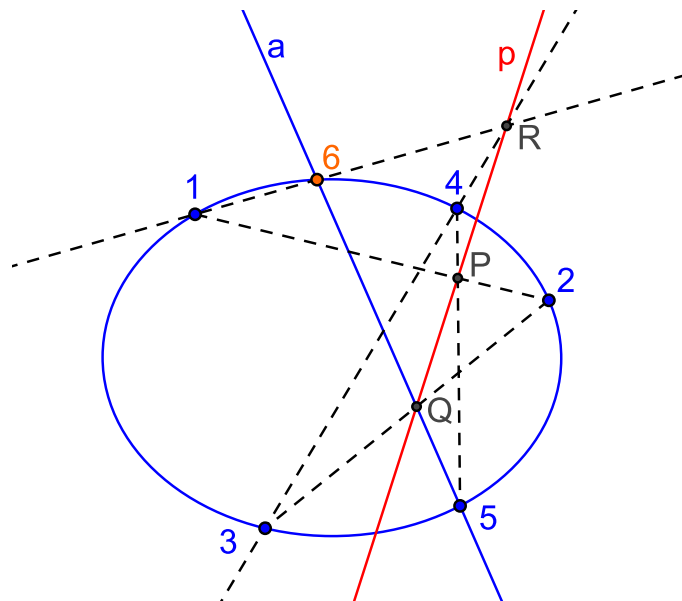
Obrázek 44: Pascalova věta

Poznámka. B. Pascal formuloval výše uvedenou větu pro šestiúhelník vepsaný kružnici. Byl si však vědom její platnosti i pro šestiúhelník vepsaný libovolné kuželosečce, [2].

Pascalovu větu můžeme využít při řešení rozličných konstrukčních úloh. Pro ilustraci zde uvedeme dva příklady, řadu dalších konstrukcí najde zájemce v [6].

PŘÍKLAD 7.1. *Je dáno pět bodů určujících kuželosečku. Jedním z nich prochází přímka. Určete její druhý průsečík s příslušnou kuželosečkou.*

Řešení: Zadání i postup řešení ilustruje Obr. 45. Danými pěti body jsou body 1, 2, 3, 4, 5. Danou přímkou je přímka a procházející bodem 5. Hledaným průsečíkem je potom bod 6. Konstrukce založená na Pascalově větě (věta 21) je zřejmá. Dané body spolu s hledaným chápeme jako vrcholy šestiúhelníku vepsaného kuželosečce. Z daných prvků jsme schopni sestrojiti body P a Q , tj. i Pascalovu přímku p . Jejím průsečíkem R s přímkou 34 potom musí dle Pascalovy věty procházet přímka 16. Bod 6 tedy určíme jako průsečík přímek a a $1R$.



Obrázek 45: Pascalova věta

PŘÍKLAD 7.2. *Kuželosečka v rovině je dána pěti body. Určete další její body.*

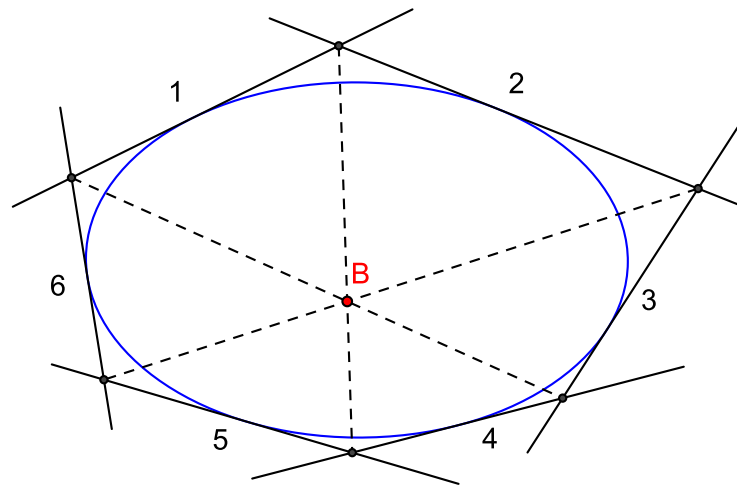
Řešení: Několikrát opakujeme konstrukci z řešení příkladu 7.1, pro různě zvolené přímky a .

7.4 Brianchonova věta

Věta, kterou v roce 1806 publikoval francouzský matematik a chemik *C. J. Brianchon* (1783–1864), je duální větou k větě Pascalově, [6].

Věta 22 (Brianchonova věta). *Tři přímky spojující protilehlé vrcholy šestiúhelníku opsaného kuželosečce procházejí jedním bodem (tzv. Brianchonův bod) a obráceně, pokud spojnice protilehlých vrcholů šestiúhelníku procházejí jedním bodem, je tento šestiúhelník opsán kuželosečce (viz Obr. 46).*

Důkaz. Větu uvádíme bez důkazu. Důkaz její varianty pro kružnic viz [2]. □



Obrázek 46: Brianchonova věta

Užitím Brianchonovy věty řešte následující příklady. Více podobných konstrukčních úloh na využití věty 22 viz [6].

PŘÍKLAD 7.3. *Kuželosečka je dána pěti tečnami. Daným bodem na jedné z nich ved'te další tečnu k této kuželosečce.*

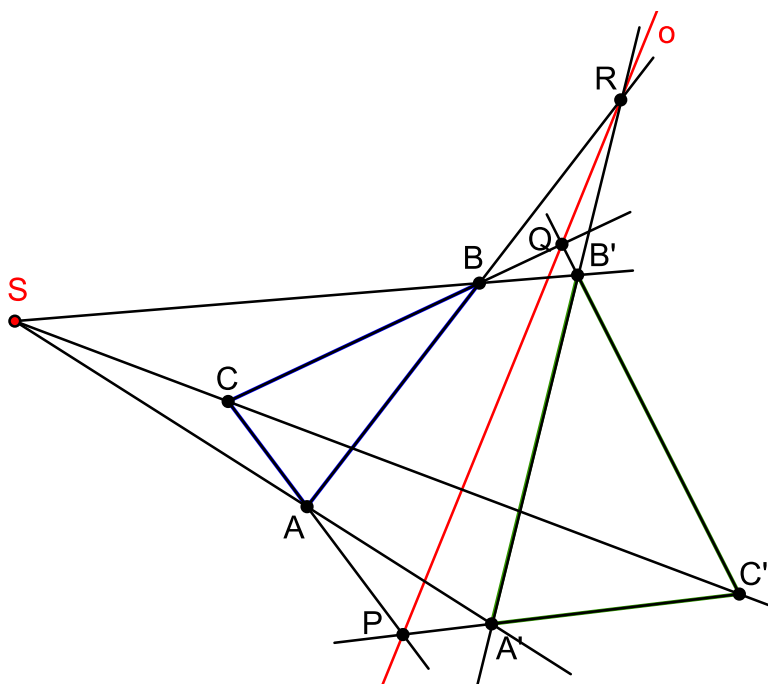
PŘÍKLAD 7.4. *Kuželosečka v rovině je dána pěti tečnami. Sestrojte několik dalších jejích tečen.*

7.5 Desarguesova věta

Následující větu o perspektivě dvou trojúhelníků formuloval na základě hlubšího studia teorie perspektivy francouzský architekt *G. Desargues* (1593–1662).

Věta 23 (Desarguesova věta o trojúhelnících). *Jestliže je jeden ze dvou trojúhelníků obrazem druhého ve středovém promítání, leží průsečíky tří dvojic sobě odpovídajících stran těchto trojúhelníků v jedné přímce. Naopak, leží-li tři průsečíky sobě odpovídajících stran dvojice trojúhelníků v přímce, protínají se přímky spojující sobě odpovídající vrcholy v jednom bodě (viz Obr. 47).*

Důkaz. Větu uvádíme bez důkazu. □



Obrázek 47: Desarguesova věta

Poznámka. Vztah mezi dvojicí trojúhelníků popsany Desarguesovou větou známe ze *středové kolineace*.

8 Křivky v E_3

Diferenciální geometrie využívá ke studiu křivek a ploch metody *diferenciálního počtu*. Nyní se seznámíme s vybranými pojmy a postupy diferenciální geometrie prostorových křivek.

8.1 Popis křivky

Křivku v prostoru E_3 budeme popisovat *parametricky*, stejně, jako popisujeme přímku. Křivku tak chápeme jako množinu bodů

$$X = [x(t), y(t), z(t)], \quad (22)$$

kde parametr t probíhá nějaký interval I . Přitom předpokládáme, že funkce $x(t), y(t)$ a $z(t)$ mají spojité derivace řádu aspoň $r \geq 1$ a jejich první derivace podle t , které značíme $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$, nejsou pro žádné $t \in I$ všechny rovny nule (tj. $\dot{X}(t) \neq \vec{0}$ pro všechna $t \in I$).

Konkrétní bod křivky tak dostaneme dosazením konkrétní hodnoty za parametr t .

Rovnici (22), kterou můžeme stručně zapsat jako $X = X(t)$, nazýváme *bodovou rovnicí* křivky k . Pokud místo bodu X křivky uvažujeme jeho *průvodič* (též *polohový vektor* nebo *rádusvektor*) \vec{x} , můžeme křivku zapsat rovnicí

$$\vec{x} = (x(t), y(t), z(t)), \quad (23)$$

kteřou nazýváme rovnicí *vektorovou*. Pokud rovnici (22), resp. rovnici (23) rozepíšeme po souřadnicích, dostaneme *parametrické rovnice křivky* k

$$x = x(t), y = y(t), z = z(t). \quad (24)$$

Poznámka. Derivaci podle parametru křivky značíme tečkou, první derivaci jednou tečkou, druhou derivaci potom dvěma tečkami. Platí tedy $\dot{x} = \frac{dx}{dt}, \ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2}$.

Bod křivky, v němž nejsou všechny derivace $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ zároveň rovny nule a jemuž odpovídá jediná hodnota $t \in I$ (tj. neexistují dvě různé hodnoty t , jimž by odpovídal tento jeden bod), nazýváme *regulárním bodem* křivky. Každý bod, který nesplňuje tato kritéria, nazýváme *singulárním bodem*. Pokud některý bod přísluší několika různým hodnotám $t \in I$, nazýváme ho *vícenásobným bodem*.

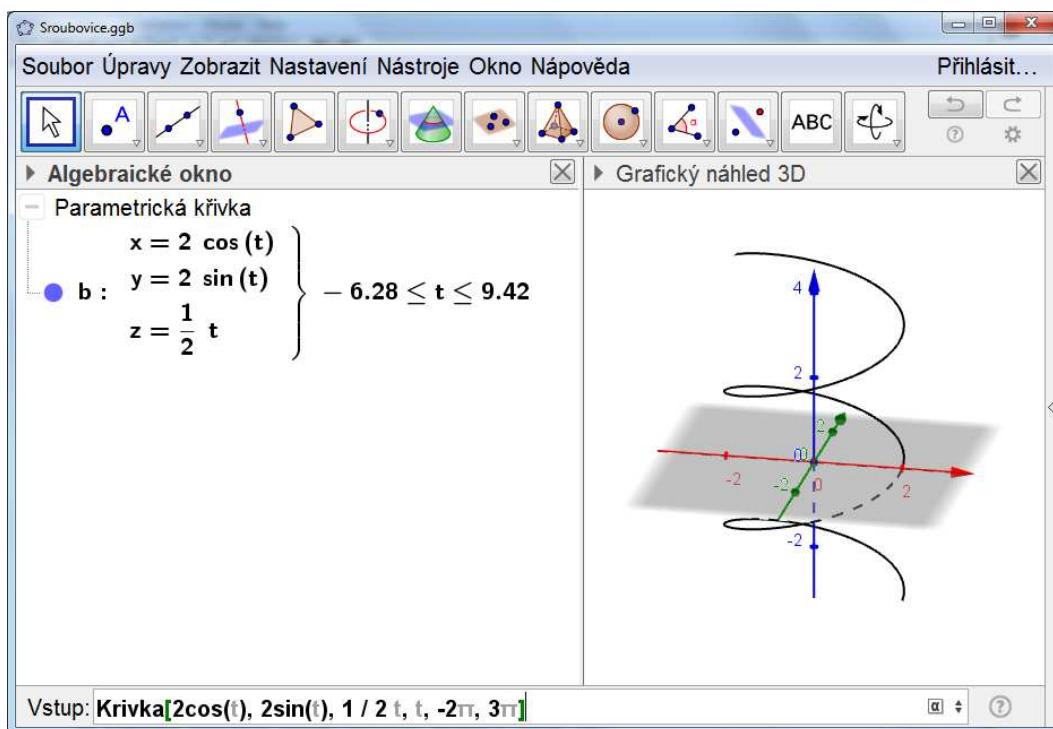
Příkladem prostorové křivky je *šroubovice*

$$x = a \cos t, y = a \sin t, z = bt; t \in (-\infty, \infty), \quad (25)$$

kde $a, b \in R$; a je poloměr válcové plochy, po níž se šroubovice odvíjí, b je tzv. *redukovaná výška závitu* (výška jednoho závitu je rovna $2\pi b$).

PŘÍKLAD 8.1. *Zobrazte šroubovici danou bodovou rovnicí $X = [2 \cos t, 2 \sin t, \frac{1}{2}t]$ pro $t \in \langle -2\pi, 3\pi \rangle$.*

Řešení: Použijeme program GeoGebra, konkrétně jeho prostředí *Grafický náhled 3D*. Do vstupního řádku zadáme příkaz `Krivka[2 cos(t), 2 sin(t), 1/2 t, t, -2 pi, 3 pi]`. Výsledek viz Obr. 48.



Obrázek 48: Zobrazení šroubovice v GeoGebře

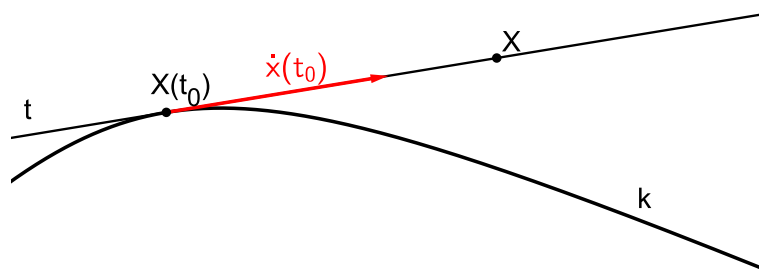
PŘÍKLAD 8.2. Zobrazte Vivianiho křivku, danou bodovou rovnicí $X = [1 + \cos t, \sin t, 2 \sin t/2]$, pro $t \in \langle -2\pi, 2\pi \rangle$.

8.2 Tečna křivky

Při zápisu tečny křivky k dané rovnicí $X = X(t)$ v bodě $X(t_0)$ použijeme parametrické vyjádření přímky. Tečnu chápeme jako přímku danou bodem $X(t_0)$ a směrovým vektorem $\dot{x}(t_0)$ (který nazýváme *tečným vektorem* křivky k v bodě $X(t_0)$), viz Obr. 49. Parametrické vyjádření tečny křivky k v bodě $X(t_0)$ má potom tvar

$$X = X(t_0) + \alpha \dot{x}(t_0); \alpha \in R, \quad (26)$$

kde α je reálný parametr.



Obrázek 49: Tečna křivky k v bodě $X(t_0)$

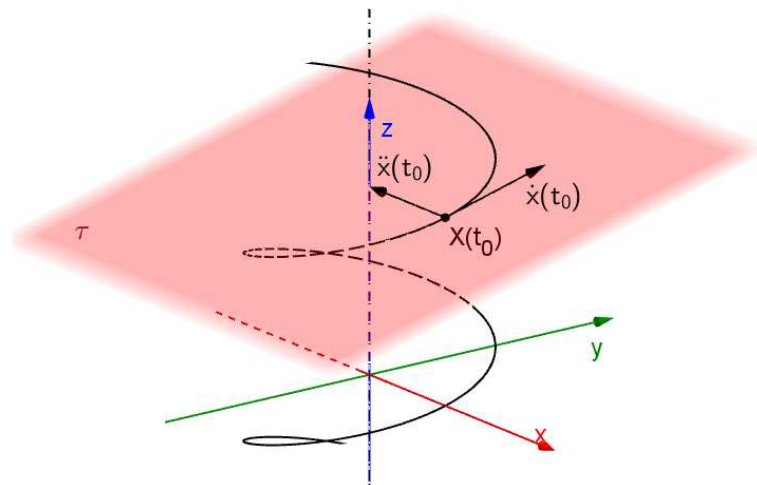
PŘÍKLAD 8.3. Napište rovnici tečny šroubovice $X = [a \cos t, a \sin t, bt]$ v bodě $X(\pi)$.

Řešení: Nejprve vyjádříme potřebné prvky rovnice: $X(\pi) = [-a, 0, b\pi]$, $\dot{x}(t) = [-a \sin t, a \cos t, b]$, $\dot{x}(\pi) = [0, -a, b]$. Příslušnou tečnu potom můžeme zapsat parametrickou rovnicí $X = [-a, 0, b\pi] + \alpha[0, -a, b]$; $\alpha \in \mathbb{R}$, bodovou rovnicí $X = [-a, -a\alpha, b\pi + \alpha b]$ (vektorovou zapíšeme analogicky), případně parametrickými rovnicemi $x = -a$, $y = -a\alpha$, $z = b\pi + \alpha b$; $\alpha \in \mathbb{R}$.

Poznámka. Křivku, která má v každém bodě jedinou tečnu spojitě se měnící s parametrem, nazýváme *hladkou*. Stejným způsobem můžeme zavést pojem *hladká část* dané křivky. Pokud se křivka skládá z hladkých částí, nazýváme ji *křivkou po částech hladkou*. [13]

8.3 Oskulační rovina

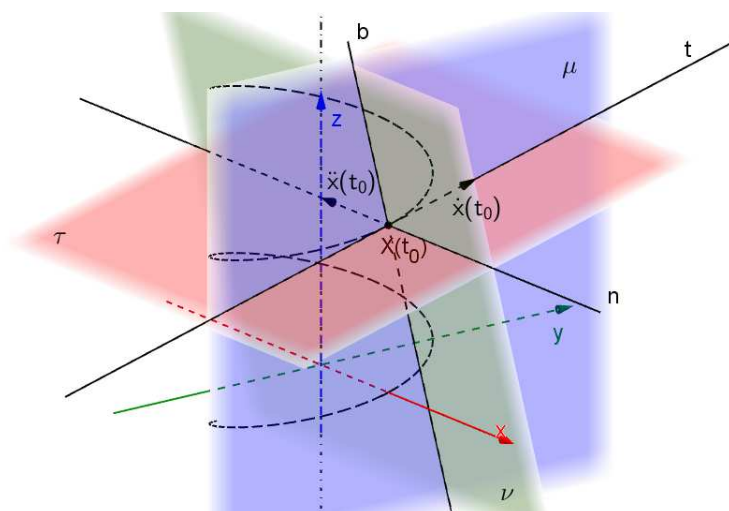
Křivku v prostoru E_3 si můžeme představit jako trajektorii hmotného bodu. Jeho pohyb je tak popsán (vektorovou) rovnicí křivky $\vec{x} = \vec{x}(t)$. Přitom vektor $\vec{x}(t)$ chápeme jako *vektor okamžité rychlosti v čase t* , který má vždy směr tečny (je to *tečný vektor křivky*). Vektor $\ddot{\vec{x}}(t)$ potom představuje *vektor okamžitého zrychlení v čase t* . Počátečním bodem obou těchto vektorů je příslušný hmotný bod (tj. bod křivky). Pokud jsou vektory $\vec{x}(t)$ a $\ddot{\vec{x}}(t)$ lineárně závislé, nazýváme příslušný bod křivky *inflexním bodem*. V ostatních bodech, které nazýváme *neinflexní*, jsou tyto vektory lineárně nezávislé. Každému neinflexnímu bodu $X(t_0)$ křivky k tak můžeme přiřadit rovinu, která je určena tímto bodem a různoběžnými vektory $\vec{x}(t_0)$, $\ddot{\vec{x}}(t_0)$. Tuto rovinu nazýváme *oskulační rovinou* křivky k v bodě $X(t_0)$, značíme ji τ , viz Obr. 50.



Obrázek 50: Oskulační rovina τ šroubovice $X = [2 \cos t, 2 \sin t, \frac{1}{2}t]$ v bodě $X(2\pi)$

Poznámka. V případě šroubovice na Obr. 50 je vektor $\ddot{\vec{x}}(t)$ kolmý na tečný vektor $\dot{\vec{x}}(t)$. Poznamenejme, že se jedná o speciální případ. Obecně, v případě jiných křivek, mohou tyto vektory svírat rozličné úhly (Víme, že v případě inflexního bodu jsou rovnoběžné).

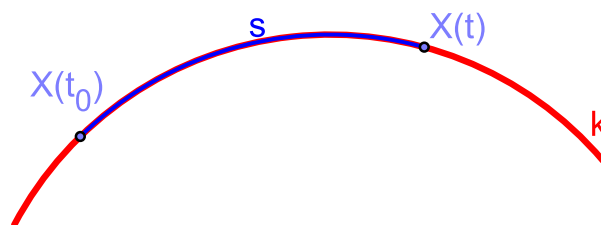
Vedle tečny t se směrovým vektorem $\dot{\vec{x}}(t)$ zavádíme v bodě X křivky k ještě další dvě význačné přímky a následně ještě tři roviny těmito přímkami určené, viz Obr. 51. Jedná se o přímku n , která leží v oskulační rovině τ a je kolmá k tečně t , a o přímku b , která prochází bodem X kolmo na τ . Přímku n nazýváme *hlavní normálou* křivky k v bodě X , přímku b potom *binormálou* křivky k v bodě X . Rovinu přímek n, b označujeme ν a nazýváme ji *normálovou rovinou* křivky k v bodě X . Rovinu přímek t, b označujeme μ a nazýváme ji *rektifikační rovinou* křivky k v bodě X .



Obrázek 51: Tečna t , hlavní normála n , binormála b , oskulační rovina τ , normálová rovina ν a rektifikační rovina μ šroubovice $X = [2 \cos t, 2 \sin t, \frac{1}{2}t]$ v bodě $X(t_0)$ ($t_0 = 2\pi$)

8.4 Oblouk křivky

Představme si, že na křivce zvolíme pevný bod $X(t_0)$ (tj. bod, jemuž odpovídá libovolná, pevně zvolená hodnota parametru t_0). Délku křivky měřenou od tohoto bodu nazýváme *obloukem křivky*, viz oblouk s na Obr. 52 (ukazuje se, že je výhodné použít oblouk jako parametr křivky).



Obrázek 52: Oblouk křivky k

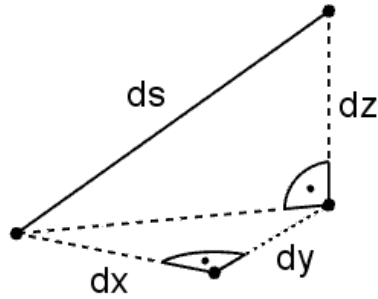
V definici oblouku tak figuruje známý vztah z integrálního počtu pro výpočet délky křivky (naše křivka k) mezi dvěma body (v našem případě se jedná o body $X(t_0)$ a $X(t)$).

Definice 10 (Oblouk křivky). *Předpokládejme, že křivka k je dána vektorovou rovnicí $\vec{x} = \vec{x}(t); t \in I$. Potom funkci*

$$s = s(t) = \int_{t_0}^t \sqrt{\dot{\vec{x}} \cdot \dot{\vec{x}}} dt = \int_{t_0}^t \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2 + \dot{z}(t)^2} dt \quad (27)$$

nazýváme obloukem křivky k od bodu $t_0 \in I$ do bodu $t \in I$.

Poznámka. Připomeňme si ve stručnosti hlavní myšlenku odvození vztahu pro výpočet délky křivky. Oblouk s si představíme rozdělený na nekonečně malé elementy, každý z nich nahradíme úsečkou délky ds (diferenciál). Tuto délku potom vyjádříme vztahem $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$, kde dx, dy, dz jsou odpovídající přírůstky (diferenciály) jednotlivých souřadnicových funkcí $x(t), y(t), z(t)$, viz Obr. 53 (jedná se vlastně o dvojí postupné použití Pythagorovy věty). S vědomím toho, že uvedený vztah



Obrázek 53: Nekonečně malý element oblouku s

použijeme v kontextu určitého integrálu, formálně ho upravíme do tvaru $ds = \sqrt{\frac{dx^2}{dt^2} + \frac{dy^2}{dt^2} + \frac{dz^2}{dt^2}} dt$, který už zřetelně koresponduje s formulí 27.

Oblouk se často používá jako parametr křivky. K přechodu od původního parametru t k novému parametru s použijeme funkci $s = s(t)$ (použijeme ji jako tzv. *přípustnou funkci*). Ta je na příslušném intervalu I vždy prostá (je rostoucí). Proto k ní na I existuje funkce inverzní $t = t(s)$, kterou když dosadíme do rovnice (bodové, vektorové, parametrických rovnic) křivky za t , stane se tato rovnice závislá na s , [1]. Tuto proceduru ilustruje následující příklad.

PŘÍKLAD 8.4. Na křivce dané rovnicí $X = [2 \cos t, 2 \sin t, \sqrt{5}t]$; $t \in \langle -\pi, \pi \rangle$ zaveďte nový parametr, který je obloukem.

Řešení: Nejprve určíme *přípustnou funkci* $s = s(t)$:

$$s = \int_0^t \sqrt{4 \sin^2 t + 4 \cos^2 t + 5} = 3t. \quad (28)$$

Potom stačí do dané rovnice šroubovice dosadit za t výraz $\frac{s}{3}$ a náležitě upravit meze intervalu, v němž se pohybují hodnoty nového intervalu s . Dostaneme $X = [2 \cos \frac{s}{3}, 2 \sin \frac{s}{3}, \sqrt{5} \frac{s}{3}]$; $t \in \langle -3\pi, 3\pi \rangle$.

8.5 První křivost křivky

Nyní budeme uvažovat, že parametrem křivky je oblouk s . Místo rovnice $X = X(t)$ tak pracujeme s rovnicí $X = X(s)$. Pro detailní seznámení s důsledky tohoto přechodu, na které zde není prostor, lze doporučit [1] a [13].

Z toho, jak byl oblouk zaveden, vyplývá, délka křivky mezi dvěma jejími body $X(s_1)$ a $X(s_2)$ je přímo rovna rozdílu $s_2 - s_1$. Proto se říká, že oblouk „měří křivku“.

Pro parametr s zavedeme vektory analogické vektorům $\dot{\vec{x}}(t), \ddot{\vec{x}}(t)$. Pro odlišení od běžného parametru budeme derivaci podle oblouku s místo tečkami značit čárkami, tj. $\vec{x}'(s), \vec{x}''(s)$.

Definice 11 (První křivost). Pro křivku k danou vektorovou rovnicí $\vec{x} = \vec{x}(s); s \in I$, kde s je obloukem, nazýváme vektor $\vec{t}(s) = \vec{x}'(s)$ vektorem tečny křivky k v bodě $X(s)$ a vektor $\vec{x}''(s)$ vektorem první křivosti křivky k v bodě $X(s)$. Číslo ${}^1k(s) = |\vec{x}''(s)|$ nazýváme první křivostí (též flexí) křivky k v bodě $X(s)$. Funkce 1k , která každému bodu křivky k přiřazuje jeho křivost, je tzv. první křivost křivky.

Poznámka. První křivost je významnou charakteristikou křivky. Její převrácená hodnota je rovna poloměru oskulační kružnice křivky v příslušném bodě (oskulační kružnice viz str. 51).

Ještě poznamenejme, že zatímco vektor $\vec{x}''(s)$ určuje svou velikostí první křivost křivky, velikost vektoru tečny $\vec{x}'(s)$ je vždy rovna 1 (tj. vektor tečny je vždy jednotkovým vektorem) [1].

Pro vektor $\vec{x}''(s)$ platí následující věta (viz [1], str. 200).

Věta 24. *Bod křivky je inflexním bodem právě tehdy, jestliže první křivost v tomto bodě je rovna nule. Jestliže je daný bod neinflexním bodem křivky, potom vektor první křivosti tohoto bodu je nenulovým vektorem, který je kolmý na vektor tečny tohoto bodu.*

Pokud je první křivost křivky rovna nule v každém jejím bodě, jedná se o přímku nebo její část.

8.6 Frenetův trojhran

Nyní završíme přehled charakteristik křivky v jejím daném bodě zavedením pojmu *Frenetův trojhran* (viz [1], str. 201) (*J. F. Frenet* (1816–1900), francouzský matematik).

Definice 12 (Frenetův trojhran). *Předpokládejme, že $X(s)$ je neinflexní bod křivky k . Potom vektory*

$$\vec{t}(s) = \vec{x}'(s), \quad \vec{n}(s) = \frac{\vec{x}''(s)}{|\vec{x}''(s)|}, \quad \vec{b}(s) = \vec{t}(s) \times \vec{n}(s) \quad (29)$$

nazýváme postupně vektorem tečny, vektorem hlavní normály a vektorem binormály křivky k v bodě $X(s)$. Uspořádanou trojici vektorů

$$(\vec{t}(s), \vec{n}(s), \vec{b}(s)) \quad (30)$$

nazýváme Frenetovým trojhranem křivky k v bodě $X(s)$.

Poznámka. Je zřejmé, že vektory $\vec{t}(s), \vec{n}(s), \vec{b}(s)$ jsou jednotkové a navzájem kolmé. Jejich orientace je přitom souhlasná s uspořádanou trojicí jednotkových souřadnicových vektorů $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$. Frenetův trojhran tvoří ortonormální bázi. Tuto skutečnost využíváme v kinematické geometrii při popisu pohybu v trojrozměrném prostoru.

Věta 25 (Frenetovy vzorce). *Pro vektorové funkce $\vec{t}, \vec{n}, \vec{b}$, které určují v každém bodě křivky k příslušný Frenetův trojhran, platí následující vztahy (tzv. Frenetovy vzorce):*

$$\begin{aligned} \vec{t}' &= & {}^1k\vec{n}, \\ \vec{n}' &= -{}^1k\vec{t} & + {}^2k\vec{b}, \\ \vec{b}' &= & -{}^2k\vec{n}, \end{aligned} \quad (31)$$

kde reálná funkce 1k je první křivost křivky k a reálná funkce 2k je tzv. druhá křivost (též torze) křivky k .

Poznámka. První křivost 1k jsme definovali na str. 49, pojem *druhé křivosti* 2k je však zaveden až výše uvedenými Frenetovými vzorci (31). Zatímco první křivost vyjadřuje míru vychýlení křivky od tečny, druhou křivost můžeme chápat jako míru pro odchýlení (vykroucení) křivky z její oskulační roviny [1].

Jestliže má křivka bez inflexních bodů v každém svém bodě druhou křivost rovnou nule, jedná se o rovinnou křivku. Poznamenejme, že v případě takovéto křivky jsou Frenetovy vzorce obzvláště jednoduché: $\vec{t}' = {}^1k\vec{n}, \vec{n}' = -{}^1k\vec{t}$.

8.7 Oskulační kružnice

Pro snazší zavedení pojmu *oskulační kružnice* nejprve pojednáme o povaze styku (dotyku), který mohou mít dvě křivky ve svém společném bodě. Hovoříme o styku q -tého řádu (ekvivalentně o styku $(q+1)$ -bodovém). Pro minimální řád styku je určující nejvyšší řád derivace rovnic obou křivek, která je pro ně společná.

Uvažujme křivky k, l o rovnicích $k = k(s)$, $l = l(s)$. Potom nutnou a postačující podmínkou, aby měly ve společném bodě $X(s_0)$ (tj. odpovídá mu hodnota parametru s_0) styk nejméně q -tého řádu (tj. styk $(q+1)$ -bodový), je splnění rovnic

$$k(s_0) = l(s_0), \quad k'(s_0) = l'(s_0), \quad \dots, \quad k^{(q)}(s_0) = l^{(q)}(s_0). \quad (32)$$

Dvě protínající se křivky k, l mají styk nultého řádu, tj. jednobodový, protože pro ně platí $k(s) = l(s)$, ale $k'(s) \neq l'(s)$.

Dvě křivky, které mají ve společném bodě společnou tečnu (u prostorových křivek také tečné roviny), mají v tomto bodě styk nejméně prvního řádu, tj. dvojbodový. Více o styku dvou křivek viz [13].

Definice 13 (Oskulační kružnice). *Kružnici m nazýváme oskulační kružnicí křivky k v jejím bodě X_0 , jestliže mají obě křivky v bodě X_0 styk alespoň druhého řádu.*

Vlastnosti oskulační kružnice specifikuje následující věta (viz [1], str. 210).

Věta 26. *Nechť X_0 je neinflexní bod křivky k . Potom existuje právě jedna oskulační kružnice m křivky k v bodě X_0 a má tyto vlastnosti:*

1. *Kružnice m leží v oskulační rovině křivky k v bodě X_0 , prochází bodem X_0 a má v něm s křivkou k společnou tečnu.*
2. *Poloměr kružnice m je roven převrácené hodnotě první křivosti 1k křivky k v bodě X_0 .*
3. *Střed oskulační kružnice leží na hlavní normále sestrojené ke křivce k v bodě X_0 , a to na polopřímce určené bodem X_0 a vektorem normály tohoto bodu.*

Důkaz. Viz [1], str. 210. □

9 Vybrané rovinné křivky

9.1 Obalová křivka

PŘÍKLAD 9.1. *Za určitých okolností můžeme na dně dobře umytého hrnečku nebo na hladině nápoje v něm pozorovat křivku podobnou srdci (viz obr. 54). Jaká je podstata tohoto jevu? Můžeme odvodit rovnici pozorované křivky?*



Obrázek 54: : Srdce ve sklenici

Dotyčná křivka je polovinou křivky zvané *nefroida*. Vzniká jako obálka světelných paprsků odražených od vnitřní stěny nádoby. Tím se řadí do rodiny tzv. *kaustik*. Geometrickou podstatu vzniku této křivky snadno modelujeme v programu GeoGebra. K vykreslení systému odražených paprsků, jejichž je nefroida obálkou, využijeme zobrazení stopy polopřímky, která je modelem odraženého paprsku. Při plynulém pohybu bodem dopadu I (viz Obr. 55a) podél kružnice znázorňující vnitřní stěnu nádoby (po jeho uchopení ukazatelem myši) se potom na *Nákresně* zobrazuje celý systém odražených paprsků a vznik výsledné křivky jako jejich „obálky“ je zřejmý. Výsledek vidíme na Obr. 55b.

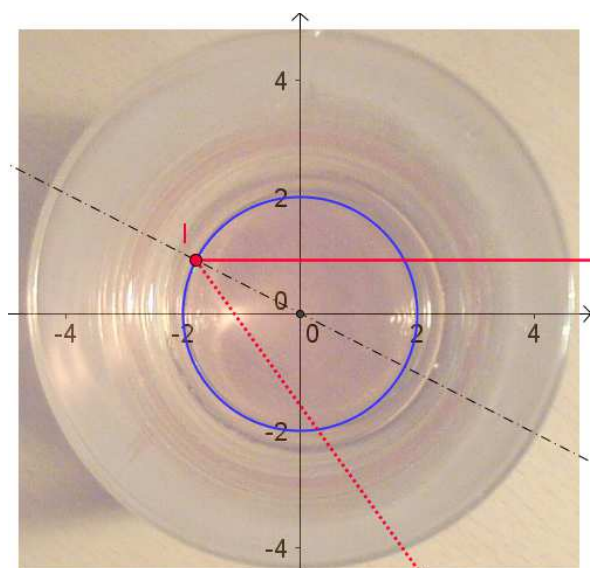
Obálkou (obalovou křivkou) systému křivek v rovině rozumíme křivku, která má v každém svém bodě tečnu společnou s jednou z křivek uvažovaného systému. Její rovnice jsou řešením soustavy rovnic, která je tvořena rovnicí parametrického systému křivek

$$l(x, y, \varphi) = 0, \quad (33)$$

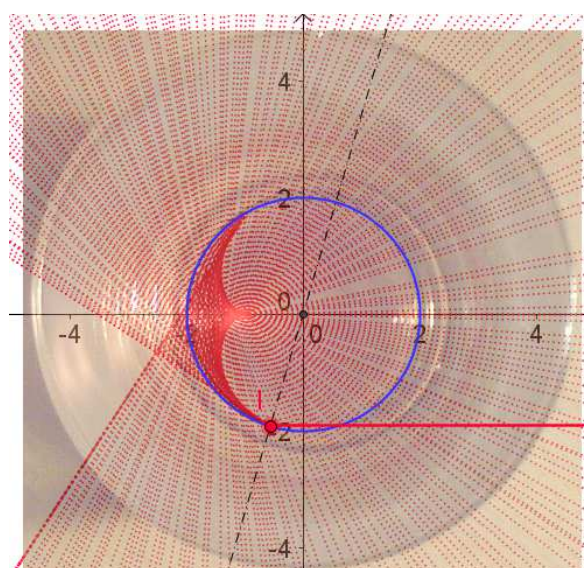
kde φ je reálný parametr, a její derivací podle tohoto parametru

$$\frac{\partial l(x, y, \varphi)}{\partial \varphi} = 0. \quad (34)$$

Při odvození rovnice zkoumané křivky v programu GeoGebra začneme zadáním souřadnic bodu dopadu I a normálových vektorů n_d a n_r přímkou, které v tomto pořadí reprezentují dopadající a odražený paprsek, viz řádky 1–4 následujícího kódu řešení v prostředí CAS GeoGebry.



a) Odraz světla



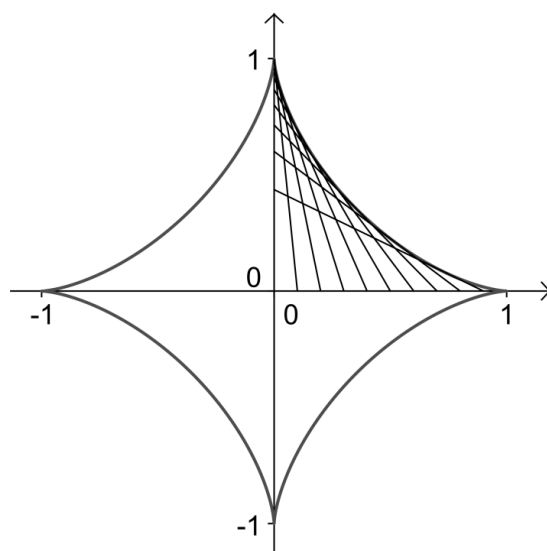
b) Obálka odražených paprsků

Obrázek 55: : Geometrický model vzniku kaustiky, GeoGebra 5.0

1	$P := (x, y)$ <input type="radio"/> $\rightarrow P := (x, y)$
2	$l := (\cos(\varphi + \pi/2), \sin(\varphi + \pi/2))$ <input type="radio"/> $\rightarrow l := (-\sin(\varphi), \cos(\varphi))$
3	$n_d := \text{Vektor}[(0, 1)]$ <input type="radio"/> $\rightarrow n_d := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
4	$n_r := \text{Vektor}[(-\sin(2\varphi), \cos(2\varphi))]$ <input type="radio"/> $\rightarrow n_r := \begin{pmatrix} -\sin(2\varphi) \\ \cos(2\varphi) \end{pmatrix}$
5	$l(\varphi) := (P - l) \cdot n_r$ <input type="radio"/> $\rightarrow l(\varphi) := -(\sin(\varphi) + x) \sin(2\varphi) + (-\cos(\varphi) + y) \cos(2\varphi)$
6	$dl(\varphi) := \text{Derivace}[l(\varphi), \varphi]$ <input type="radio"/> $\rightarrow dl(\varphi) := -2x \cos(2\varphi) - 2y \sin(2\varphi) - \sin(\varphi) \cos(2\varphi) + \sin(2\varphi) \cos(\varphi)$
7	$K := \text{Reseni}[\{l(\varphi) = 0, dl(\varphi) = 0\}, \{x, y\}]$ <input type="radio"/> $\rightarrow K := \left(-\frac{1}{4} \sin(3\varphi) - \frac{3}{4} \sin(\varphi) \quad \frac{1}{4} \cos(3\varphi) + \frac{3}{4} \cos(\varphi) \right)$

Poté definujeme rovnice (33), (34), v uvedeném kódu jsou nazvány $l(\phi)$ a $dl(\phi)$, viz řádky 5–6 kódu. Řešením soustavy těchto rovnic je bodová rovnice zkoumané křivky, kterou vidíme na posledním řádku č. 7 kódu řešení.

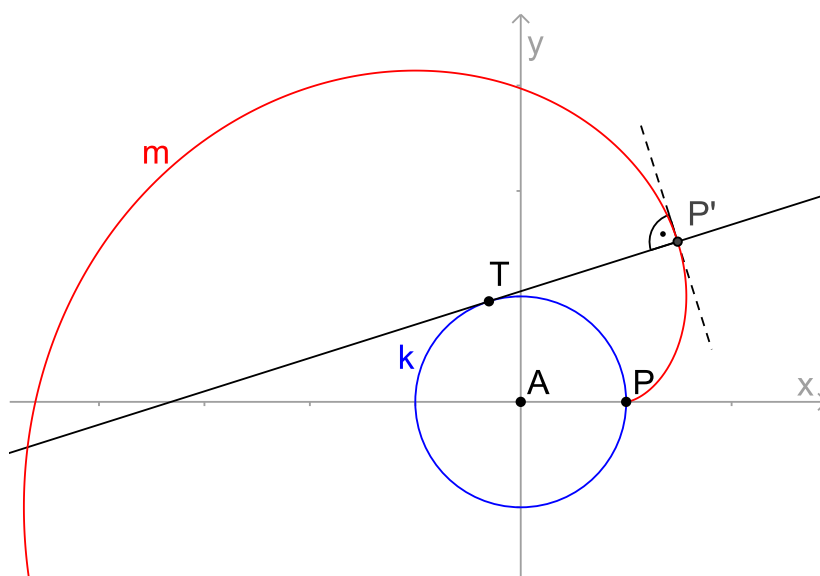
Dalším příkladem obalové křivky je *asteroida*. Můžeme ji totiž definovat jako *obálku* jednotlivých poloh úsečky, jejíž koncové body se pohybují podél kolmých přímk, viz Obr. 56. Pokuste se tuto křivku modelovat v GeoGebře, případně vypočítat její bodovou rovnici.



Obrázek 56: Asteroida

9.2 Evoluta a evolventa

Viz Obr. 57. Rovinná křivka m , která protíná kolmo všechny tečny dané křivky k , se nazývá *evolventa* křivky k . Rovinná křivka k , pro kterou je křivka m evolventou se nazývá *evoloutou* křivky m .



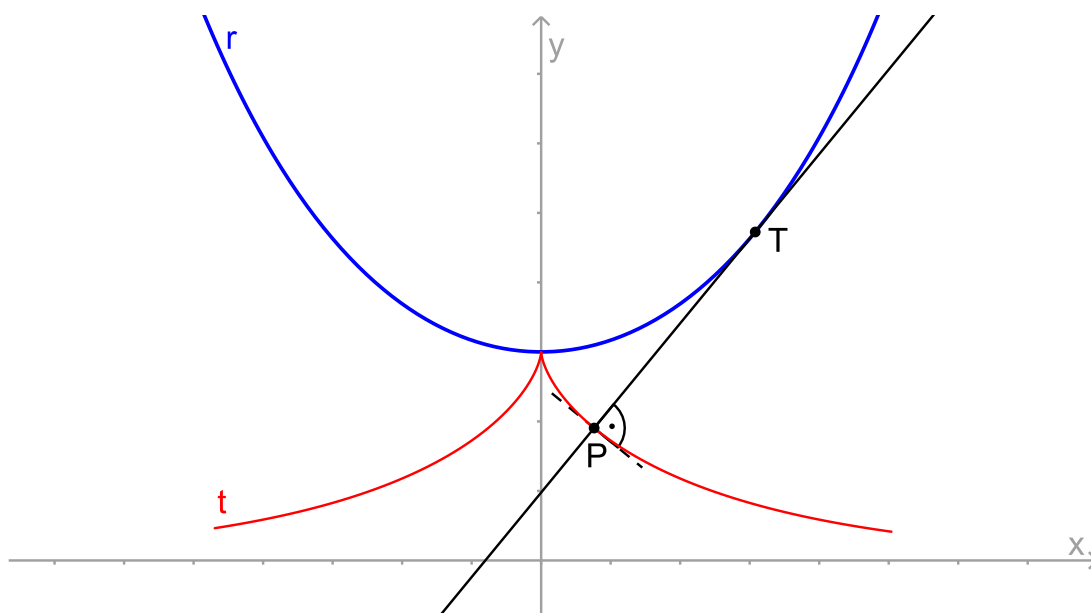
Obrázek 57: Evoluta k a evolventa m

K dané křivce k existuje nekonečně mnoho evolvent. Všechny tyto evolventy mají společné normály, které jsou tečnami k . Všechny je můžeme získat jako trajektorie bodů tečny odvalující se po křivce k (na odvalující se tečnu nanášíme délku oblouku, měřeného od pevně zvoleného bodu křivky k k dotykovému bodu tečny, tj. na Obr. 57 je délka úsečky TP' shodná s délkou oblouku PT).

Pokud křivka m nemá inflexní bod a má všude nenulovou derivaci první křivosti, existuje k ní jediná evoluta. Tato evoluta je množinou všech středů oskulačních kružnic křivky m . Evolutu dané rovinné křivky můžeme charakterizovat také jako obalovou křivku normál této křivky.

Na Obr. 57 vidíme část evolventy m kružnice k (kružnice k je tedy evolutou křivky m). V technické praxi se tato křivka uplatňuje při návrhu tvaru zubů u ozubených kol. Tvar evolventy kružnice zajišťuje odvalování zubů dvou kol po sobě a tím dochází k plynulému přenosu síly během jejich vzájemného otáčení.

Příkladem další známé dvojice křivek ve vztahu evoluta–evolventa je dvojice řetězovka–traktrix, viz Obr. 58.



Obrázek 58: Řetězovka r a traktrix t

Pro detailní seznámení s pojmy *evoluta* a *evolventa* lze doporučit [1] a [13].

Literatura

- [1] Budinský, B. *Analytická a diferenciální geometrie*. SNTL, Praha, 1983.
- [2] Coxeter, H. S. M., Greitzer, S. L. *Geometry revisited*. The Mathematical Association of America, Washington, D.C., 1967.
- [3] Devlin, K. *Jazyk matematiky*. ARGO, 2003.
- [4] Eukleides, *Základy. Knihy I–IV.*, koment. Petrem Vopěnkou, OPS, Nymburk, 2008.
- [5] Eukleides, *Eukleidovy základy (Elementa)*, překlad F. Servít, 1907.
Dostupné na https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Eukleides_Servit.pdf
- [6] Havlíček, K. *Úvod do projektivní geometrie kuželoseček*. SNTL, Praha, 1956.
- [7] Klíma, J. *Různé způsoby zobrazovací v deskriptivní geometrii*. Kapitola „Gnómonický a stereografický průmět kulové plochy“. Praha: JČMF, edice „Cesta k vědě“, 1944, str. 18-25.
Dostupné na http://dml.cz/bitstream/handle/10338.dmlcz/403087/CestaKVedeni_013-1944-1_6.pdf
- [8] Kuřina, F. *10 geometrických transformací*. Prometheus, Praha, 2002.
- [9] Kuřina, F. *10 pohledů na geometrii*. Akademie věd České republiky, Praha, 1996.
- [10] Kutuzov, B. V. *Lobačevského geometrie a elementy základů geometrie*. Nakladatelství Československé akademie věd, Praha, 1953.
- [11] Pech, P. *Klasické vs. počítačové metody při řešení úloh v geometrii*. Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích, České Budějovice, 2005.
Dostupné na <http://www.pf.jcu.cz/stru/katedry/m/knihy/Metody.pdf>
- [12] Pavlíček, J. B. *Základy neeukleidovské geometrie Lobačevského*. Přírodovědecké nakladatelství, Praha, 1953.
Dostupné na <http://dml.cz/dmlcz/402750>
- [13] Rektorys, K. *Přehled užití matematiky*. Prometheus, Praha, 2009.
- [14] Sekanina, M. a kol. *Geometrie II*, SPN Praha, 1988.
- [15] Vopěnka, P. *Trýznivé tajemství*. Práh, Praha, 2003.
- [16] Vyšín, J. a kol.: *Geometria pre pedagogické fakulty II*, Bratislava, 1970.

