Geometrie III (2022)

Roman Hašek

October 2022

1 Úvod

Předmět *Geometrie III* je zaměřen převážně do oblasti *deskriptivní geometrie*. *Deskriptivní geometrie* se věnuje metodám dvojrozměrného znázornění trojrozměrných objektů a zkoumání jejich geometrických vztahů prostřednictvím tohoto znázornění.

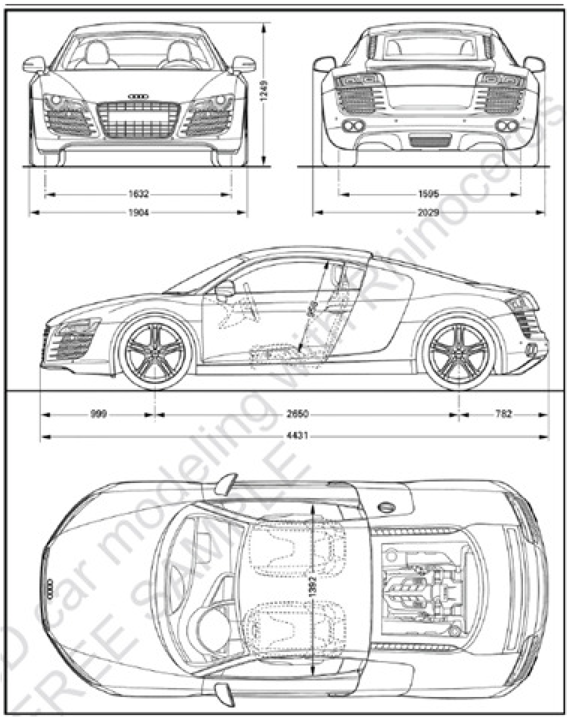

Figure 1: Audi R8 (*www.ak3d.de/portfolio/tutorials/FreeSample.pdf*)

Významnou roli při formování základů deskriptivní geometrie hrál francouzský geometr *Gaspard Monge*. Často je nazýván *otcem deskriptivní geometrie*. Název této geometrické disciplíny vzešel z jeho určující publikace *Géométrie Descriptive* vydané v roce 1799.

Gaspard Monge začal pro zobrazení trojrozměrných objektů systematicky využívat sdružení jejich dvou kolmých průmětů, metodu, která začala být nazývána *Mongeova projekce*. Jedná se jenom o jednu, i když notně významnou, metodu pro zobrazení trojrozměrných útvarů do roviny. Zde jsou některé z těch, které se používají v technické praxi:

- *kótované promítání*; rovnoběžné promítání kolmo na jednu průmětnu (*půdorysnu*), viz Obr. 2,
- *Mongeovo promítání*; útvar je promítnut dvěma rovnoběžnými promítáními na dvě vzájemně kolmé průmětny (*nárysnu* a *půdorysnu*), viz Obr. 3,
- *kosoúhlé promítání*; rovnoběžné promítání ve směru kosém na jednu průmětnu,

která je totožná s jednou ze souřadnicových rovin, speciálním případem kosoúhlého promítání je *volné rovnoběžné promítání*, viz Obr. 4,

– *axonometrie*; rovnoběžné promítání na rovinu obecně umístěnou vzhledem k souřadnicovým osám, pokud je směr promítání kolmý, hovoříme o *pravoúhlé axonometrii*, viz Obr. 4,

– *perspektiva*; středové promítání, odpovídá našemu zrakovému vjemu, existuje více druhů perspektivy, viz Obr. 4.

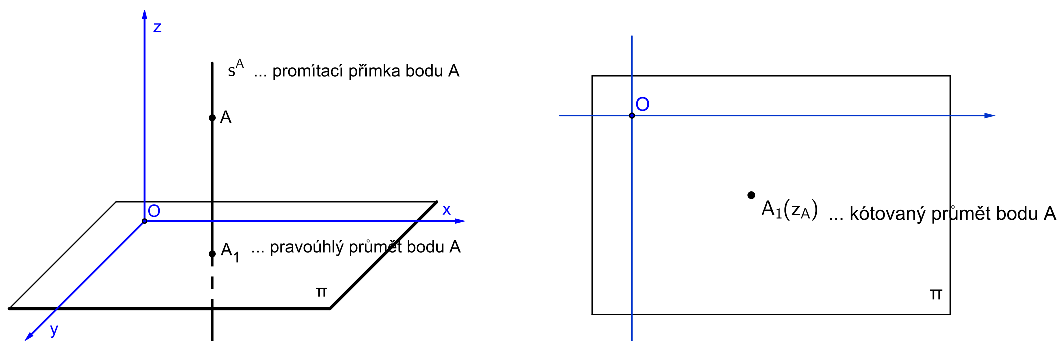

Figure 2: Kótované promítání – zobrazení bodu

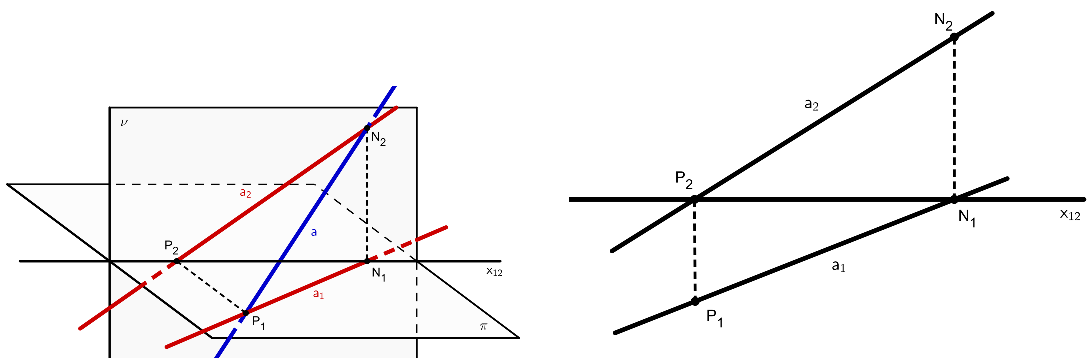

Figure 3: Mongeovo promítání – zobrazení přímky

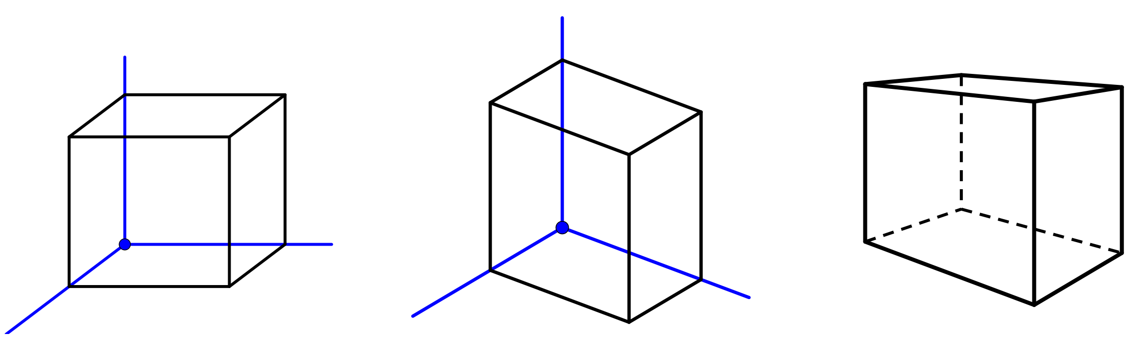

Figure 4: Kosoúhlé promítání (vlevo), pravoúhlá axonometrie (uprostřed), perspektiva (vpravo)

2 Eukleidovský trojrozměrný prostor. Souřadnice bodu.

Pojem *eukleidovský* (též *euklidovský*) bodový prostor byl zaveden a náležitě pojednán v předmětu *Geometrie I* (KMA/7G1). Zde si pouze připomeneme příslušnou definici a uvedeme její alternativní formulaci.

Eukleidovský prostor představuje ideální geometrický model prostoru, který nás obklopuje. Je to prostor školní geometrie, dvojrozměrný (*planimetrie*) a trojrozměrný (*stereometrie*), postupem času zobecněný na n rozměrný.

Pojmenován po *Eukleidovi z Alexandrie*, starověkém řeckém matematikovi, který geometrii trojrozměrného prostoru a tělesům, která jsou v něm usazena, věnoval poslední tři knihy ze svého třináctidílného díla *Základy*. Kompletní český překlad tohoto díla provedený Františkem Servítem v roce 1907 je volně dostupný na adrese `https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Eukleides_Servit.pdf`.

Výchozím pojmem zavedení *Eukleidovského prostoru* pro nás byl *afinní bodový prostor*, viz (Hašek: LAG 2020), str. 126. Použitá definice afinního bodového prostoru nám dovolila zavést *afinní soustavu souřadnic* (též nazývanou *repér*).

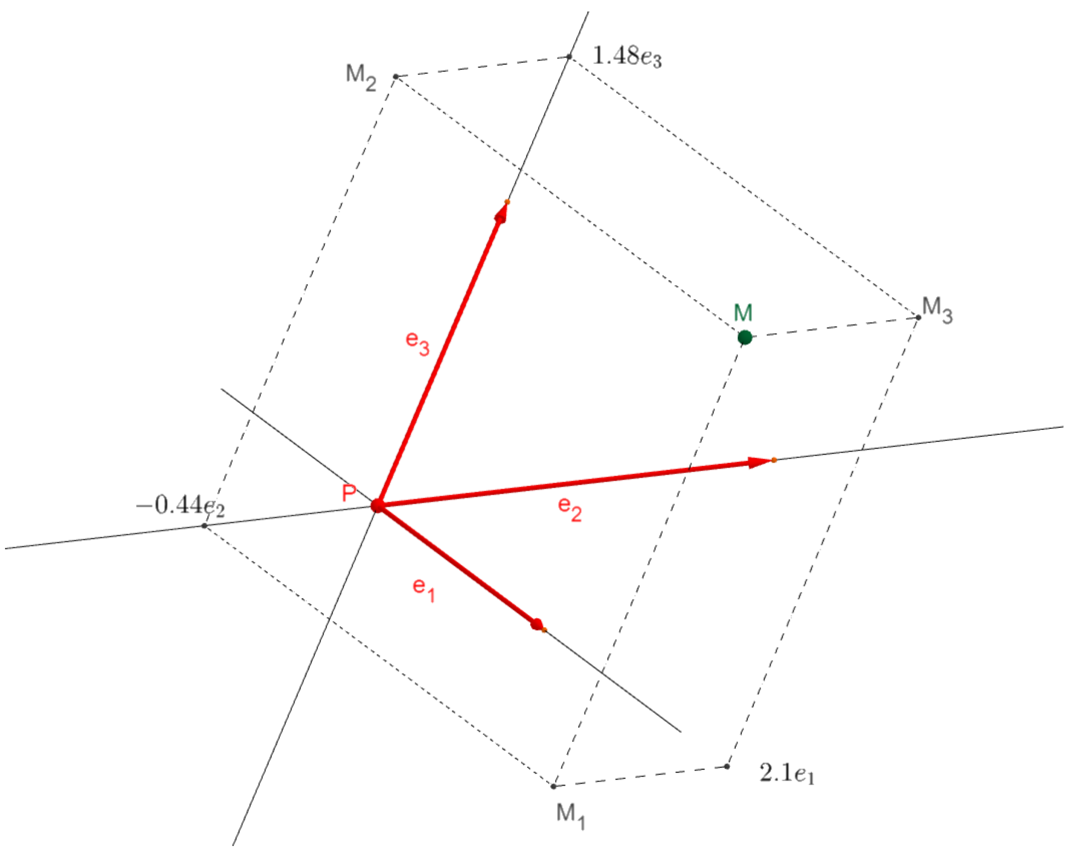

Figure 5: Afinní soustava souřadnic $\varphi = \{P, e_1, e_2, e_3\}$

Abychom soustavu souřadnic v trojrozměrném prostoru, jejíž příklad je na Obr. 5, mohli nazvat *afinní*, stačí, aby splňovala jediný požadavek, aby vektory $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ neležely v jedné rovině. Ekvivalentní podmínkou je požadavek, aby v jedné rovině neležel bod P spolu s koncovými body vektorů $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ (tyto body ovšem nejsou v obrázku popsány). Zavedení pojmu *afinní* do geometrie je připisováno švýcarskému matematikovi *Leonardu Eulerovi*. *Afinní zobrazení* můžeme stručně charakterizovat jako zobrazení, které přímku zobrazuje opět na přímku nebo na bod, a které střed dvojice bodů–vzorů zobrazí zase na střed odpovídající dvojice bodů–obrazů (přesněji řečeno, zachovává dělící poměr, viz (Hašek: PLA 2020), str. 15). *Afinní geometrií* potom rozumíme geometrii, která zkoumá takové vlastnosti geometrických útvarů, které se nemění při jejich afinních zobrazeních.

Afinní soustavu souřadnic nazýváme:

– *kosoúhlou*, pokud alespoň dvě její souřadnicové osy (tj. jejich směrové vektory) nejsou navzájem kolmé, viz Obr. 5,

– *pravoúhlou* (*ortogonální*), pokud každé dvě její osy (tj. jejich směrové vektory) jsou navzájem kolmé,

– *kartézskou* (*ortonormální*), pokud každé dvě její osy jsou navzájem kolmé (tj. jsou ortogonální) a zároveň jsou jednotky na všech těchto osách stejné.

Ve školní matematice pracujeme s *kartézskou soustavou souřadnic*. Je pojmenována po francouzském matematikovi a filosofovi *René Descartovi*, který se systematickým zavedením metody práce se souřadnicemi bodů v prostoru zasloužil o vznik *analytické geometrie* (tj. analytické metody v geometrii).

Již tedy umíme přiřadit každému bodu prostoru jeho souřadnice, tj. v případě trojrozměrného prostoru uspořádanou trojici reálných čísel. To nám dovoluje zkoumat vzájemné polohy geometrických útvarů v prostoru. Nestačí to ale k určování jejich vzdáleností a odchylek. To nám dovoluje až zavedení *skalárního součinu* na *zaměření* bodového prostoru (zjednodušeně můžeme zaměření charakterizovat jako vektorový prostor všech směrů možných v daném bodovém prostoru).

Jak je uvedeno v (Hašek:LAG 2020) na str. 166:

Eukleidovským bodovým prostorem rozumíme afinní bodový prostor, na jehož zaměření je definován skalární součin. Víme, že pomocí skalárního součinu jsou definovány pojmy norma vektoru a odchylka vektorů. Ty … využijeme k zavedení pojmů vzdálenost bodů, vzdálenost podprostorů, odchylka podprostorů. Vektorový a vnější součin potom … využijeme k výpočtu obsahů a objemů …

Detailní pojednání pojmu *skalární součin*, viz (Hašek: LAG 2020), str. 58.

Pojem *eukleidovský prostor* můžeme však zavést i axiomaticky, bez použití vektorového prostoru, jak ilustruje definice uvedená ve *Slovníku školské matematiky* (zprac. česká terminologická komise pro matematiku JČMF, Praha: SPN, 1981):

Euklidovský prostor (n-rozměrný) – množina všech uspořádaných n-tic reálných čísel, přičemž pro každou dvojici $u = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$, $v = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ *je definována vzdálenost d předpisem*

$$d(u, v) = \sqrt{(u_1 - v_1)^2 + (u_2 - v_2)^2 + \ldots + (u_n - v_n)^2}.$$

Např. zavedeme-li v rovině (resp. v trojrozměrném prostoru) kartézskou soustavu souřadnic, dostaneme dvojrozměrný (resp. trojrozměrný) euklidovský prostor, v němž se vzdálenost d shoduje s obvyklou vzdáleností bodů.

Poznámka: Obvyklou vzdáleností bodů můžeme rozumět vzdálenost spočítanou použitím Pythagorovy věty.

Existují i jiné soustavy souřadnic, než jsou kartézské nebo kosoúhlé. Jaké znáte?

Sférické souřadnice, viz Wikipedia: Spherical Coordinate System.

Cylindrické souřadnice, viz Wikipedia: Cylindrical Coordinate System.

3 Základní geometrická tělesa

Tělesem v geometrii rozumíme uzavřenou omezenou oblast v prostoru. Hranicí tělesa bývá plocha. [1]

Tělesa můžeme rozdělit na *konvexní* a *nekonvexní* [2]. Připomeňme si, že pro *konvexní* útvar platí, že úsečka spojující libovolné dva jeho body náleží celá tomuto útvaru. Naproti tomu pro *nekonvexní* útvar platí, že v něm existují takové dva body, že úsečka jimi určená neleží celá v tomto útvaru.

Tělesa můžeme rozdělit na *mnohostěny* a na *oblá* tělesa [2].

Mnohostěny jsou tělesa, jehož povrch tvoří *mnohoúhelníky*. Tyto mnohostěny tvoří *stěny* mnohostěnu. Společné strany sousedních stěn nazýváme *hrany*. Pro konvexní mnohostěny platí *Eulerova věta*:

$$s + v = h + 2,$$

kde s je počet jeho stěn, v počet jeho vrcholů a h je počet jeho hran.

Vybranými mnohostěny, s kterými se budeme postupně seznamovat, jsou:

- krychle, kvádr, rovnoběžnostěn,
- hranoly,
- jehlany,
- pravidelné mnohostěny (zvané též *Platónská tělesa*),
- polopravidelné mnohostěny (konkrétně *Archimédovská tělesa*).

Z oblých těles nás budou zajímat především rotační tělesa:

- válec,
- kužel,
- koule,
- anuloid (též *torus*).

ÚKOL: Zabývejte se tvorbou fyzických i digitálních modelů výše uvedených těles.

References

[1] Sedláček, J. a kol. *Slovník školské matematiky.* Praha: SPN ARGO. 1981.

[2] Voráčová, Š. a kol. *Atlas geometrie. Geometrie krásná a užitečná.* Praha: Academia. 2012.