Geometrie III (2022)

Roman Hašek

October 2022

1 Úvod

Předmět *Geometrie III* je zaměřen převážně do oblasti *deskriptivní geometrie*. *Deskriptivní geometrie* se věnuje metodám dvojrozměrného znázornění trojrozměrných objektů a zkoumání jejich geometrických vztahů prostřednictvím tohoto znázornění.

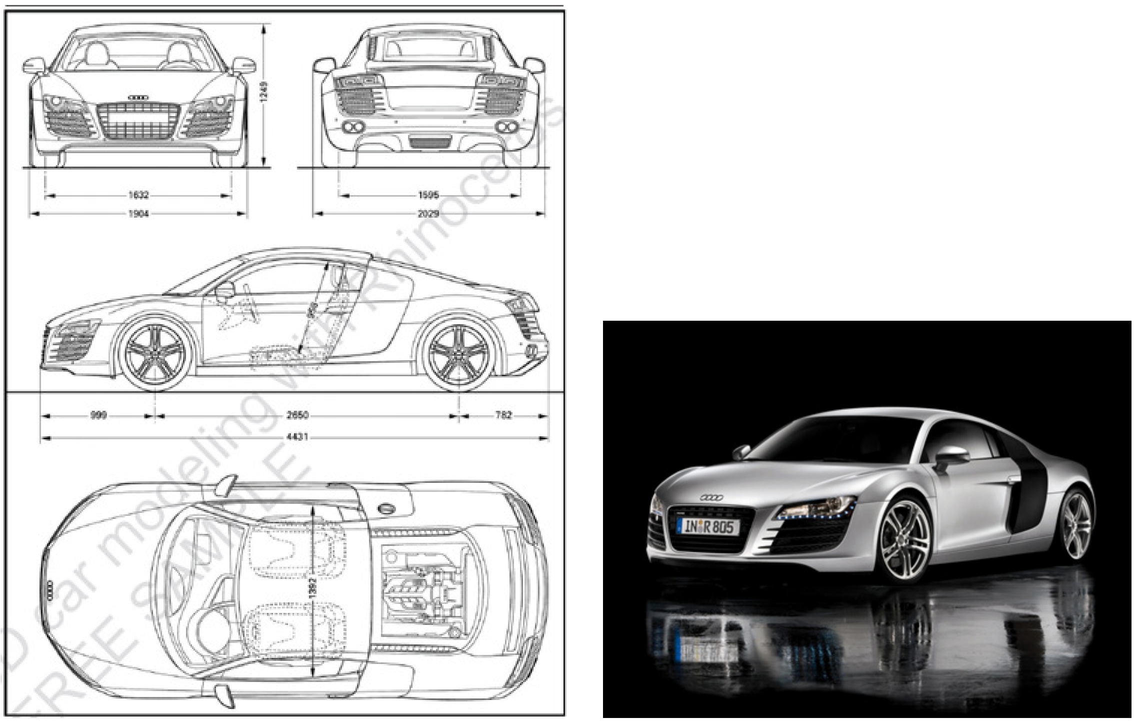


Figure 1: Audi R8 (*www.ak3d.de/portfolio/tutorials/FreeSample.pdf*)

Významnou roli při formování základů deskriptivní geometrie hrál francouzský geometr *Gaspard Monge*. Často je nazýván *otcem deskriptivní geometrie*. Název této geometrické disciplíny vzešel z jeho určující publikace *Géométrie Descriptive* vydané v roce 1799.

Gaspard Monge začal pro zobrazení trojrozměrných objektů systematicky využívat sdružení jejich dvou kolmých průmětů, metodu, která začala být nazývána *Mongeova projekce*. Jedná se jenom o jednu, i když notně významnou, metodu pro zobrazení trojrozměrných útvarů do roviny. Zde jsou některé z těch, které se používají v technické praxi:

– *kótované promítání*; rovnoběžné promítání kolmo na jednu průmětnu (*půdorysnu*), viz Obr. 2,

– *Mongeovo promítání*; útvar je promítnut dvěma rovnoběžnými promítáními na dvě vzájemně kolmé průmětny (*nárysnu* a *půdorysnu*), viz Obr. 3,

– *kosoúhlé promítání*; rovnoběžné promítání ve směru kosém na jednu průmětnu, která je totožná s jednou ze souřadnicových rovin, speciálním případem kosoúhlého promítání je *volné rovnoběžné promítání*, viz Obr. 4,

– *axonometrie*; rovnoběžné promítání na rovinu obecně umístěnou vzhledem k souřadnicovým osám, pokud je směr promítání kolmý, hovoříme o *pravoúhlé axonometrii*, viz Obr. 4,

– *perspektiva*; středové promítání, odpovídá našemu zrakovému vjemu, existuje více druhů perspektivy, viz Obr. 4.

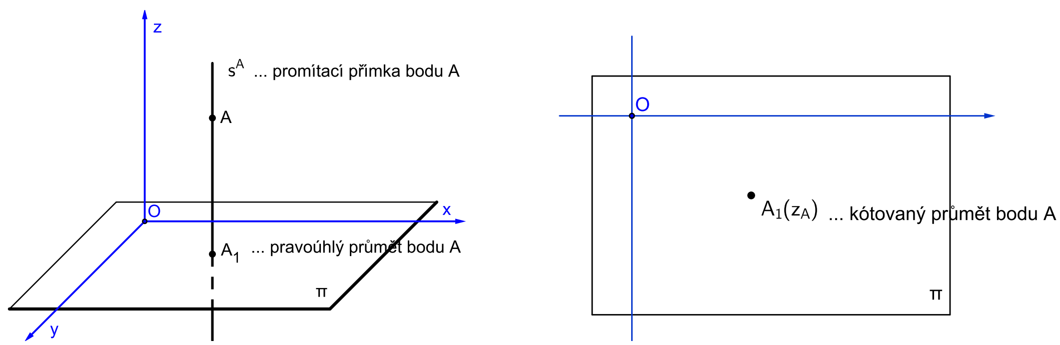


Figure 2: Kótované promítání – zobrazení bodu

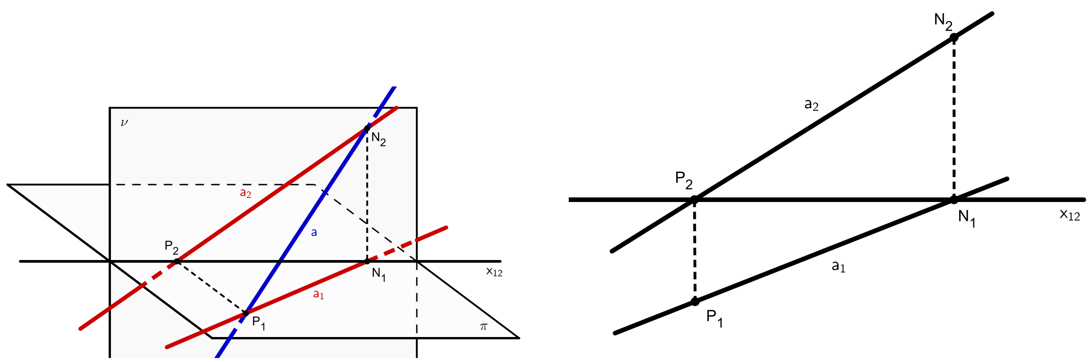


Figure 3: Mongeovo promítání – zobrazení přímky

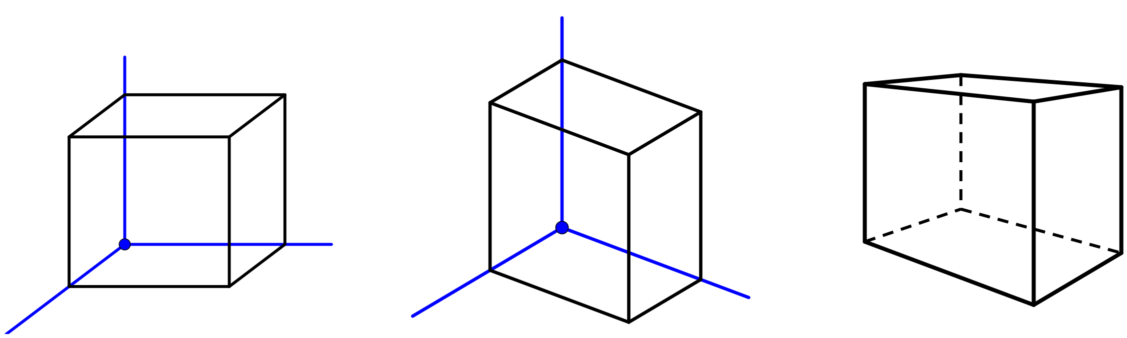


Figure 4: Kosoúhlé promítání (vlevo), pravoúhlá axonometrie (uprostřed), perspektiva (vpravo)

2 Eukleidovský trojrozměrný prostor. Souřadnice bodu.

Pojem *eukleidovský* (též *euklidovský*) bodový prostor byl zaveden a náležitě pojednán v předmětu *Geometrie I* (KMA/7G1). Zde si pouze připomeneme příslušnou definici a uvedeme její alternativní formulaci.

Eukleidovský prostor představuje ideální geometrický model prostoru, který nás obklopuje. Je to prostor školní geometrie, dvojrozměrný (*planimetrie*) a trojrozměrný (*stereometrie*), postupem času zobecněný na n rozměrný.

Pojmenován po *Eukleidovi z Alexandrie*, starověkém řeckém matematikovi, který geometrii trojrozměrného prostoru a tělesům, která jsou v něm usazena, věnoval poslední tři knihy ze svého třináctidílného díla *Základy*. Kompletní český překlad tohoto díla provedený Františkem Servítem v roce 1907 je volně dostupný na adrese `https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Eukleides_Servit.pdf`.

Výchozím pojmem zavedení *Eukleidovského prostoru* pro nás byl *afinní bodový prostor*, viz (Hašek: LAG 2020), str. 126. Použitá definice afinního bodového prostoru nám dovolila zavést *afinní soustavu souřadnic* (též nazývanou *repér*).

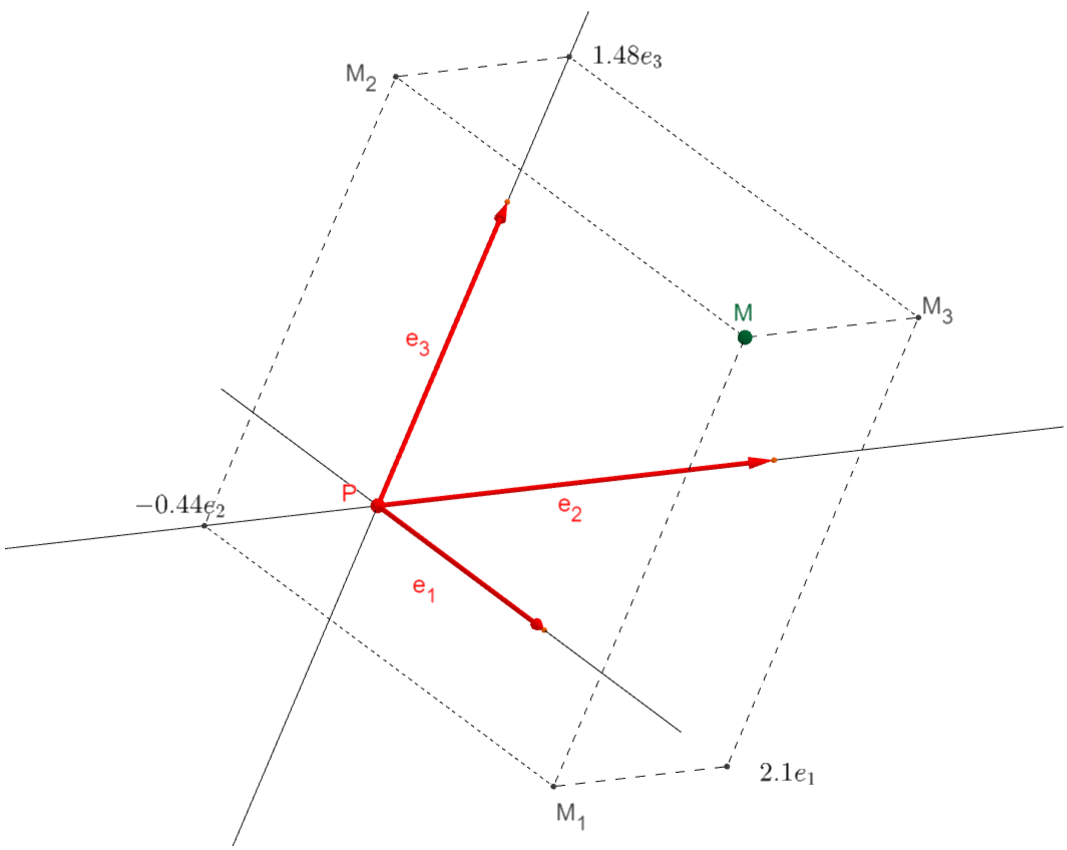


Figure 5: Afinní soustava souřadnic $\varphi = \{P, e_1, e_2, e_3\}$

Abychom soustavu souřadnic v trojrozměrném prostoru, jejíž příklad je na Obr. 5, mohli nazvat *afinní*, stačí, aby splňovala jediný požadavek, aby vektory $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ neležely v jedné rovině. Ekvivalentní podmínkou je požadavek, aby v jedné rovině neležel bod P spolu s koncovými body vektorů $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ (tyto body ovšem nejsou v obrázku popsány). Zavedení pojmu *afinní* do geometrie je připisováno švýcarskému matematikovi *Leonardu Eulerovi*. *Afinní zobrazení* můžeme stručně charakterizovat jako zobrazení, které přímku zobrazuje opět na přímku nebo na bod, a které střed dvojice bodů–vzorů zobrazí zase na střed odpovídající dvojice bodů–obrazů (přesněji řečeno, zachovává dělící poměr, viz (Hašek: PLA 2020), str. 15). *Afinní geometrií* potom rozumíme geometrii, která zkoumá takové vlastnosti geometrických útvarů, které se nemění při jejich afinních zobrazeních.

Afinní soustavu souřadnic nazýváme:

– *kosoúhlou*, pokud alespoň dvě její souřadnicové osy (tj. jejich směrové vektory) nejsou navzájem kolmé, viz Obr. 5,

– *pravoúhlou* (*ortogonální*), pokud každé dvě její osy (tj. jejich směrové vektory) jsou navzájem kolmé,

– *kartézskou* (*ortonormální*), pokud každé dvě její osy jsou navzájem kolmé (tj. jsou ortogonální) a zároveň jsou jednotky na všech těchto osách stejné.

Ve školní matematice pracujeme s *kartézskou soustavou souřadnic*. Je pojmenována po francouzském matematikovi a filosofovi *René Descartovi*, který se systematickým zavedením metody práce se souřadnicemi bodů v prostoru zasloužil o vznik *analytické geometrie* (tj. analytické metody v geometrii).

Již tedy umíme přiřadit každému bodu prostoru jeho souřadnice, tj. v případě trojrozměrného prostoru uspořádanou trojici reálných čísel. To nám dovoluje zkoumat vzájemné polohy geometrických útvarů v prostoru. Nestačí to ale k určování jejich vzdáleností a odchylek. To nám dovoluje až zavedení *skalárního součinu* na *zaměření* bodového prostoru (zjednodušeně můžeme zaměření charakterizovat jako vektorový prostor všech směrů možných v daném bodovém prostoru).

Jak je uvedeno v (Hašek: LAG 2020) na str. 166:

Eukleidovským bodovým prostorem rozumíme afinní bodový prostor, na jehož zaměření je definován skalární součin. Víme, že pomocí skalárního součinu jsou definovány pojmy norma vektoru a odchylka vektorů. Ty … využijeme k zavedení pojmů vzdálenost bodů, vzdálenost podprostorů, odchylka podprostorů. Vektorový a vnější součin potom … využijeme k výpočtu obsahů a objemů …

Detailní pojednání pojmu *skalární součin*, viz (Hašek: LAG 2020), str. 58.

Pojem *eukleidovský prostor* můžeme však zavést i axiomaticky, bez použití vektorového prostoru, jak ilustruje definice uvedená ve *Slovníku školské matematiky* (zprac. česká terminologická komise pro matematiku JČMF, Praha: SPN, 1981):

Euklidovský prostor (n-rozměrný) - množina všech uspořádaných n-tic reálných čísel, přičemž pro každou dvojici $u = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$*,* $v = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ *je definována vzdálenost d předpisem*

$$d(u, v) = \sqrt{(u_1 - v_1)^2 + (u_2 - v_2)^2 + \cdots + (u_n - v_n)^2}.$$

Například, zavedeme-li v rovině (resp. v trojrozměrném prostoru) kartézskou soustavu souřadnic, dostaneme dvojrozměrný (resp. trojrozměrný) euklidovský prostor, v němž se vzdálenost d shoduje s obvyklou vzdáleností bodů.

Poznámka: Obvyklou vzdáleností bodů můžeme rozumět vzdálenost spočítanou použitím Pythagorovy věty.

Existují i jiné soustavy souřadnic, než jsou kartézské nebo kosoúhlé. Jaké znáte?

Sférické souřadnice, viz Wikipedia: Spherical Coordinate System.

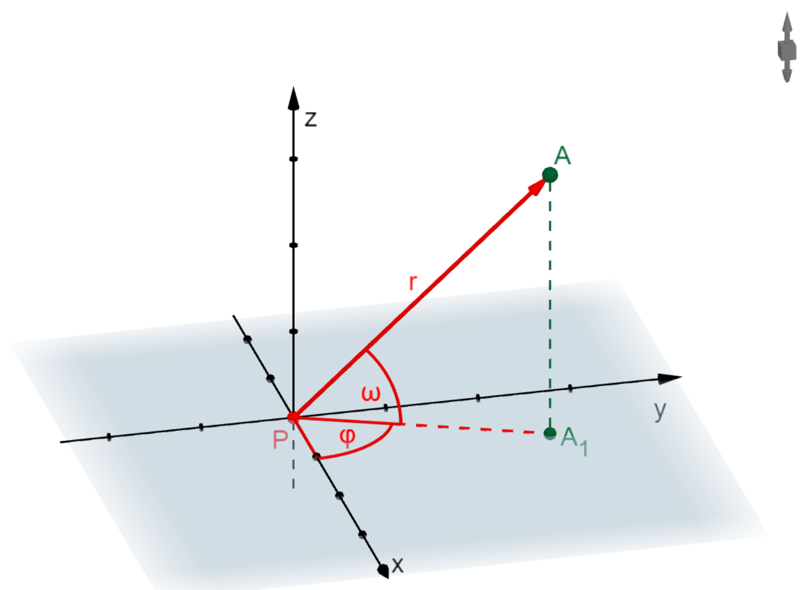


Figure 6: Sférické souřadnice (r, φ, ω)

Cylindrické souřadnice, viz Wikipedia: Cylindrical Coordinate System.

Příklad 2.1. *Využijte princip sférických souřadnic k odvození parametrických rovnic kulové plochy a k jejímu zobrazení v GeoGebře.*

Řešení: Použijeme sférické souřadnice (r, φ, ω) zavedené dle Obr. 6, které se mírně liší od jejich zavedenějšího pojetí (místo našeho úhlu ω se používá $\theta = \pi/2 - \omega$),viz Wikipedia: Spherical Coordinate System.

Potom pro parametrické rovnice kulové plochy platí:

$$x(r, \varphi, \omega) = r \cdot \cos\omega \cdot \cos\varphi, \tag{1}$$

$$y(r, \varphi, \omega) = r \cdot \cos\omega \cdot \sin\varphi, \tag{2}$$

$$z(r, \varphi, \omega) = r \cdot \sin\omega;\ r \geq 0, \varphi \in \langle 0; \pi), \omega \in \langle 0, 2\pi). \tag{3}$$

Po zavedení posuvníku pro hodnoty r a po zadání příkazu `Plocha(`$r \cdot \cos\omega \cdot \cos\varphi$`,` $r \cdot \cos\omega \cdot \sin\varphi$`,` $r \cdot \sin\omega$`,` φ`, 0,` π`,` ω`, 0,` 2π`)` získáme graf kulové plochy zachycený na Obr. 7. Měníme-li posuvníkem hodnotu r, mění se velikost (poloměr) kulové plochy.

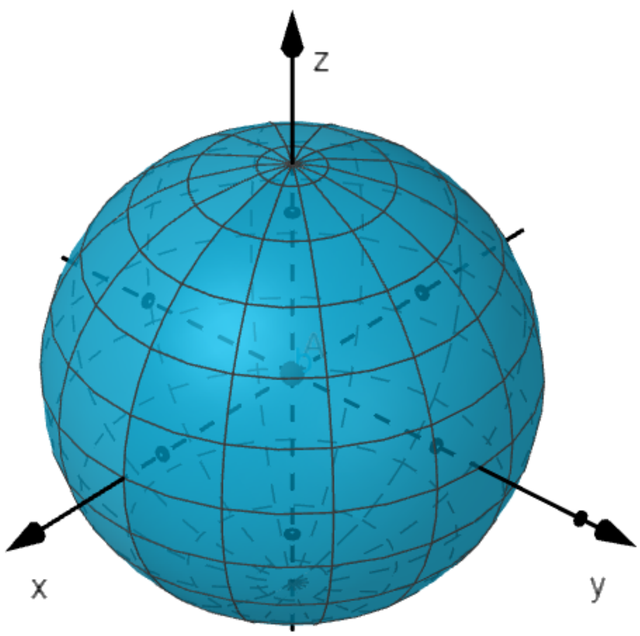


Figure 7: Kulová plocha

Rovinnou analogií sférických souřadnic jsou *polární souřadnice*. Mohou sloužit jako jednodušší předstupeň pro pochopení sférických souřadnic a rovnice pro jejich převedení na kartézské souřadnice, viz (1), (2), (3).

Polární souřadnice (r, φ) bodu X v rovině si zavedeme dle Obr. 8. Polární soustava souřadnic je určena *pólem* P a *polární osou* p. Obrázek nabízí jednoduchý přechod od polárních souřadnic $X = (r, \varphi)$ k souřadnicím kartézským $X = [x; y]$. Pokud ztotožníme pól P s počátkem kartézské soustavy souřadnic a polární osu p s kladnou poloosou x, lze pro bod X psát:

$$x = r \cdot \cos \varphi, \tag{4}$$

$$y = r \cdot \sin \varphi. \tag{5}$$

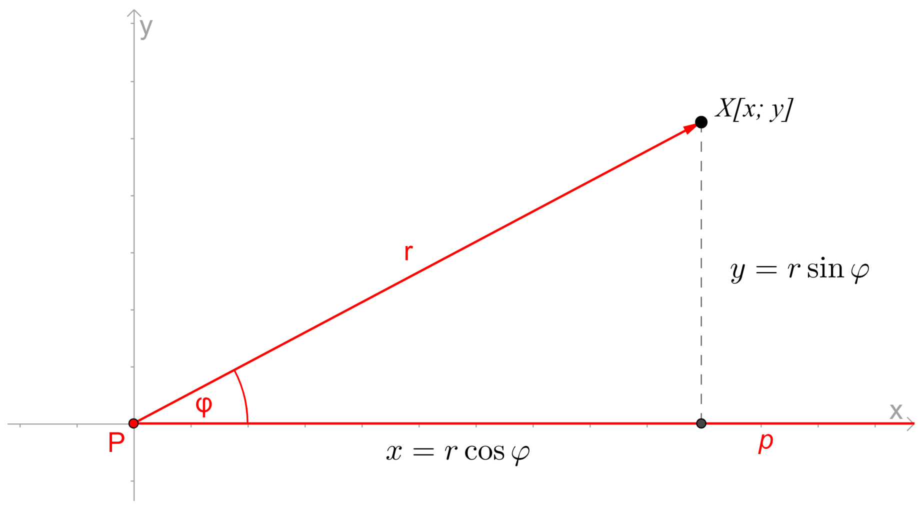


Figure 8: Polární souřadnice

Příklad 2.2. *Napište parametrické rovnice kružnice se středem v počátku soustavy souřadnic a s poloměrem* $r = 5$*. Napište rovnici této kružnice v polárních souřadnicích.*

3 Základní geometrická tělesa

Tělesem v geometrii rozumíme uzavřenou omezenou oblast v prostoru. Hranicí tělesa bývá plocha. [1]

Tělesa můžeme rozdělit na *konvexní* a *nekonvexní* [2]. Připomeňme si, že pro *konvexní* útvar platí, že úsečka spojující libovolné dva jeho body náleží celá tomuto útvaru. Naproti tomu pro *nekonvexní* útvar platí, že v něm existují takové dva body, že úsečka jimi určená neleží celá v tomto útvaru.

Tělesa můžeme rozdělit na *mnohostěny* a na *oblá* tělesa [2].

Mnohostěny jsou tělesa, jehož povrch tvoří *mnohoúhelníky*. Tyto mnohostěny tvoří *stěny* mnohostěnu. Společné strany sousedních stěn nazýváme *hrany*. Pro konvexní mnohostěny platí *Eulerova věta*:

$$s + v = h + 2,$$

kde s je počet jeho stěn, v počet jeho vrcholů a h je počet jeho hran.

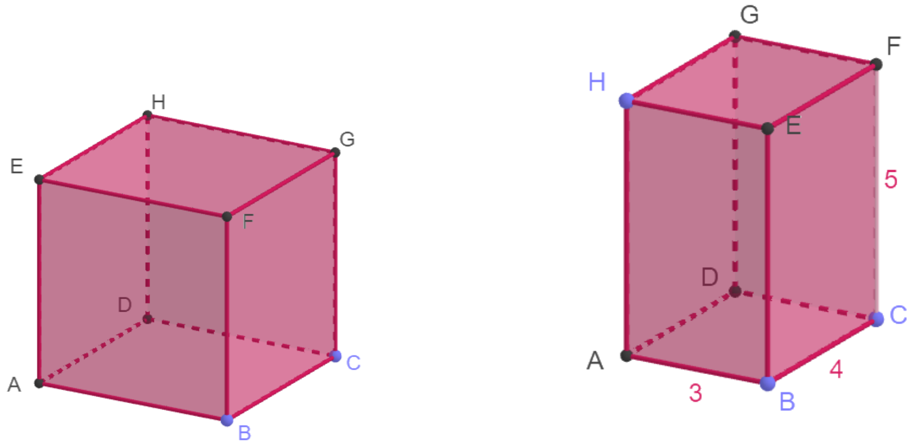
Vybranými mnohostěny, s kterými se budeme postupně seznamovat, jsou:

- krychle, kvádr, rovnoběžnostěn,
- hranoly,
- jehlany,
- pravidelné mnohostěny (zvané též *Platónská tělesa*),
- polopravidelné mnohostěny (konkrétně *Archimédovská tělesa*).

Z oblých těles nás budou zajímat především rotační tělesa:

- válec,
- kužel,
- koule,
- anuloid (též *torus*).

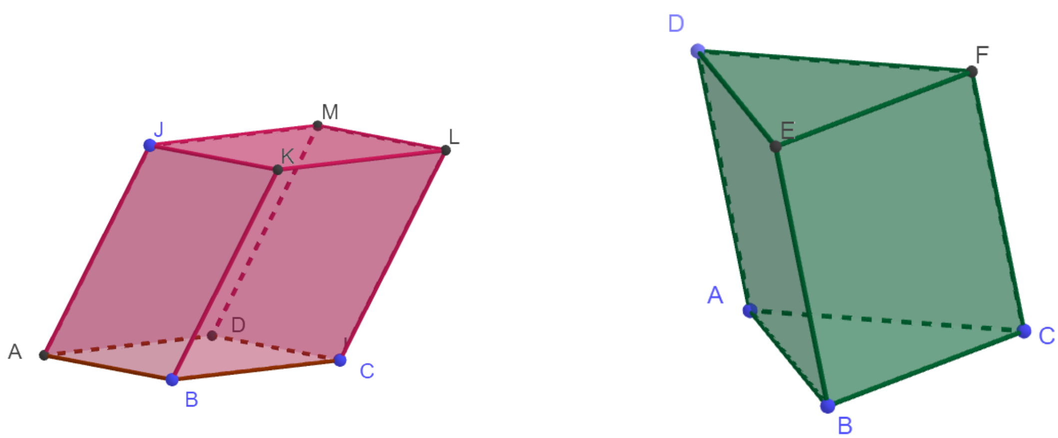
ÚKOL: Zabývejte se tvorbou fyzických i digitálních modelů výše uvedených těles.



`Krychle(A,B,C)` `Hranol(A,B,C,D,H)`

Figure 9: GeoGebra: Krychle a kvádr

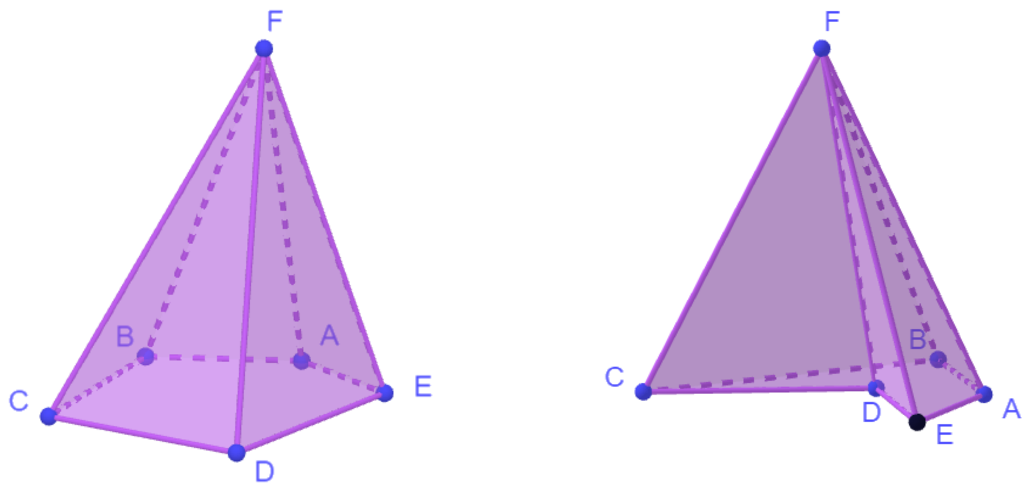
Příklad 3.1. *Pro vykreslení krychle v prostředí Grafický náhled 3D programu GeoGebra stačí příkazu* `Krychle(A,B,C)` *zadat první dva body A, B, třetí bod C si program "domyslí". Přijdete na to, jak? Jaké kritérium takový bod C splňuje?*



`Hranol(podstava,J)` `Hranol(A,B,C,D,H)`

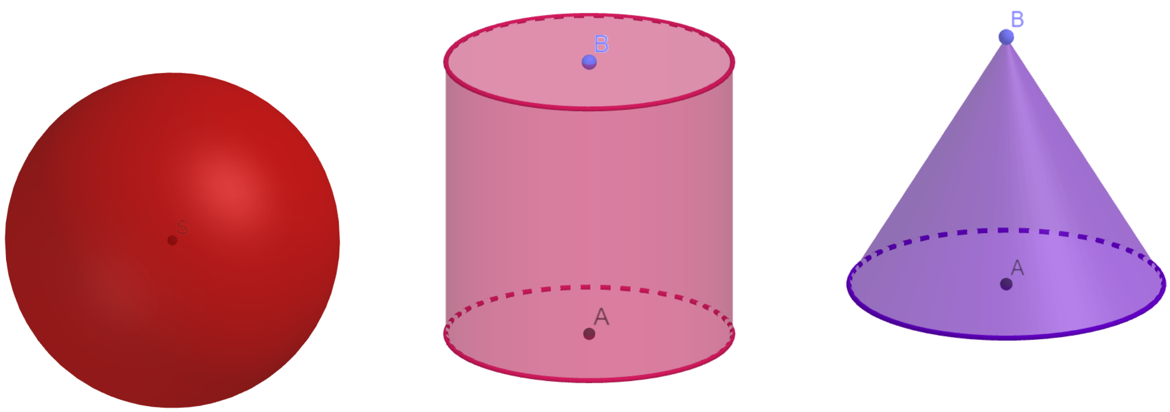
Figure 10: GeoGebra: Rovnoběžnostěn a kosý trojboký hranol

Příklad 3.2. *Sestrojte v GeoGebře dva kolmé pětiboké hranoly, jeden konvexní a druhý nekonvexní.*



`Jehlan(podstava,F)` `Jehlan(podstava,F)`

Figure 11: GeoGebra: Jehlan konvexní a jehlan nekonvexní



`Koule(Bod,Bod)` `Valec(A,B,2)` `Kuzel(A,B,3)`

Figure 12: GeoGebra: Koule, válec a kužel

Příklad 3.3. *Každé z uvedených těles zobrazte v programu GeoGebra. Alespoň pro vybraná z nich potom využijte možnost programu měnit metodu promítání (axonometrie, perspektiva, kosoúhlé promítání) a směr pohledu na zobrazovaný objekt (půdorys, nárys a bokorys) a všemi těmito způsoby si je zobrazte. Pokuste se popsat některé zjevné odlišnosti v zobrazení téhož tělesa různými metodami.*

4 Zobrazení útvarů trojrozměrného prostoru. Promítání.

Promítání (též *projekce*) je zobrazení trojrozměrného prostoru na danou plochu, rovinu, kulovou plochu, válcovou plochu apod. V deskriptivní geometrii uvažujeme vesměs promítání trojrozměrného prostoru na rovinu.

S termínem *promítání*, ve spojení s určitým přívlastkem, se setkáme v označení některých zobrazovacích metod, viz např. *Mongeovo promítání*, *kosoúhlé promítání*, *kótované promítání*, i když se jedná o kombinaci několika promítání. [1]

4.1 Středové a rovnoběžné promítání

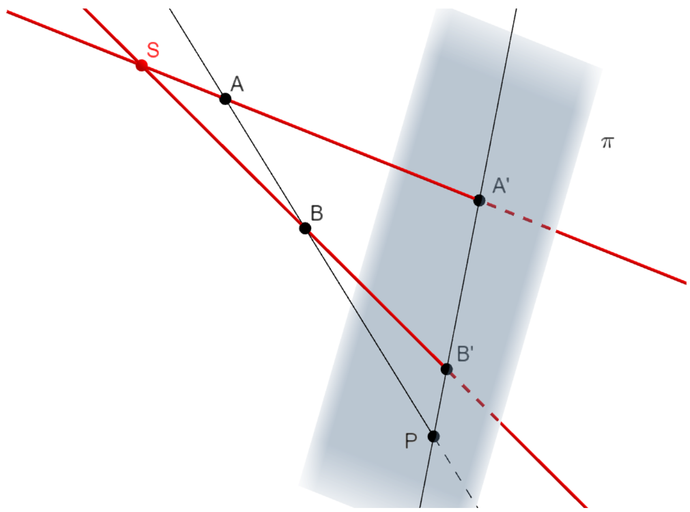


Figure 13: Středové promítání dané středem S a průmětnou π

Středové promítání dané *středem (promítání)* S a *průmětnou* π je zobrazení, které libovolnému bodu A prostoru (s výjimkou samotného bodu S) přiřadí jeho obraz A' jako průsečík přímky SA s rovinou π, viz Obr. 13. Bod A' se nazývá *středový průmět* bodu A, přímka SA se nazývá *promítací přímka bodu* A (též říkáme *promítací paprsek bodu* A).

Rovnoběžné promítání dané *směrem (promítání)* $\vec{s}$ a *průmětnou* π. Pokud je střed promítání S "nekonečně daleko" (hovoříme o tzv. *nevlastních bodech* v *rozšířeném eukleidovském prostoru*, viz později) promítací přímky různých bodů prostoru se stanou rovnoběžné, viz Obr. 14. Hovoříme potom o *rovnoběžném (paralelním) promítání* určeném *směrem promítání* $\vec{s}$ a průmětnou π.

Průmětem útvaru nazýváme množinu průmětů všech jeho bodů, viz Obr. 16, jeho *promítacím útvarem* nazýváme útvar, který vyplní promítací přímky všech bodů útvaru. Promítacím útvarem přímky je *promítací rovina*, viz Obr. 15. Průsečík

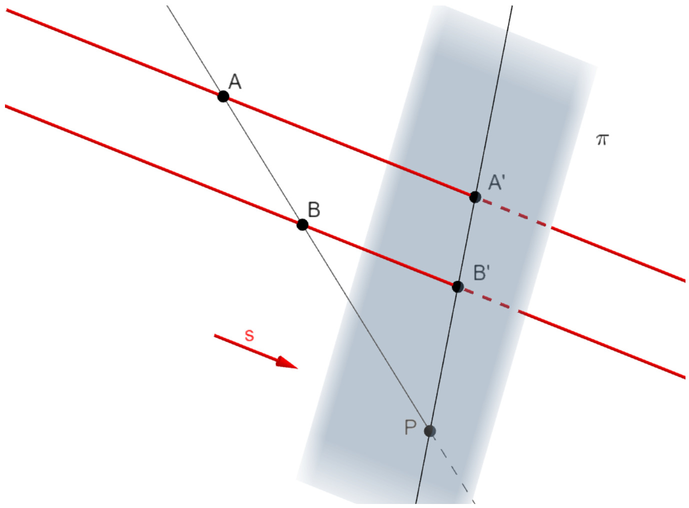


Figure 14: Rovnoběžné promítání dané směrem $\vec{s}$ a průmětnou π

přímky s průmětnou nazýváme *stopník přímky*, viz Obr. 13, 14 nebo 15, kde je zobrazen stopník P přímky $\leftrightarrow AB$.

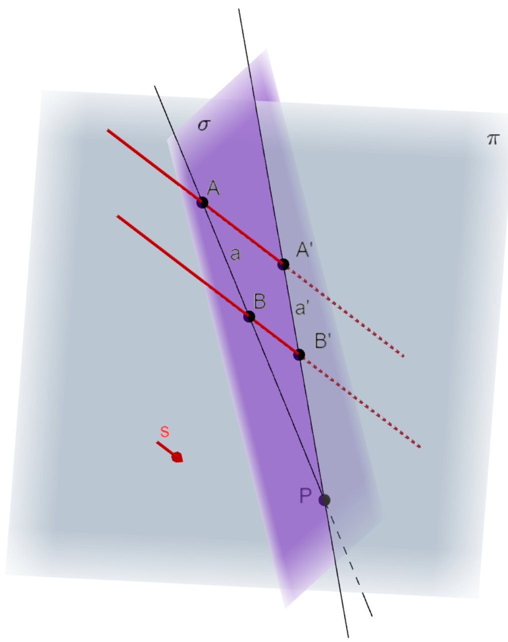


Figure 15: Promítací rovina σ přímky a při rovnoběžném promítání

K výrazům průmět, promítací přímka, apod. se často přidává přívlastek určující druh promítání nebo název průmětny – kosoúhlý průmět, půdorysně promítací přímka.

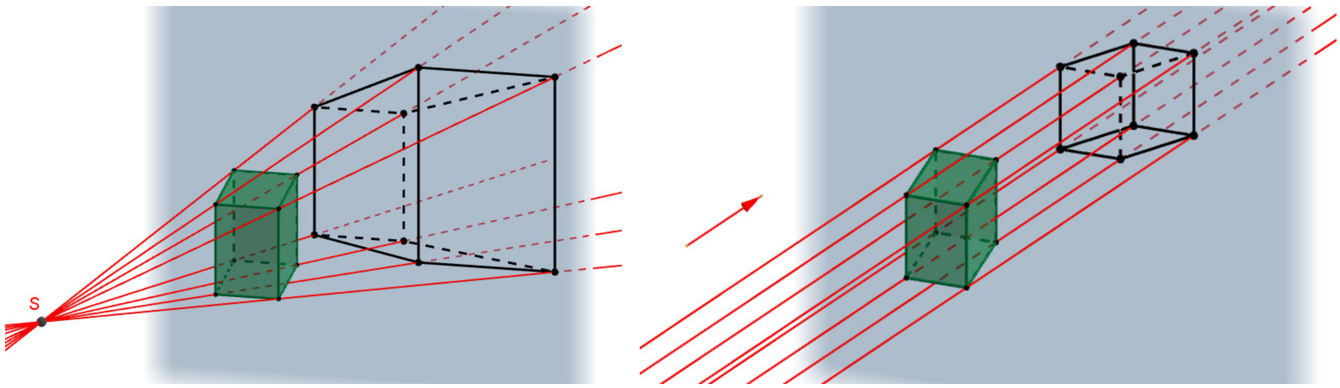


Figure 16: Průmět kvádru ve středovém (vlevo) a rovnoběžném (vpravo) promítání do roviny

4.2 Invarianty středového a rovnoběžného promítání

Příklad 4.1. *U geometrických zobrazení nás zajímají vlastnosti a charakteristiky, které se při nich zachovávají, tj. platí jak pro vzor, tak i pro jeho obraz, říkáme jeim invarianty daného zobrazení. Známe například tvrzení, že se při určitém zobrazení "zachovává incidence". Zjistěte experimentálně, zda se u rovnoběžného a středového promítání zachovává střed úsečky. Své závěry se pokuste dokázat.*

Experimentální řešení příkladu 4.1 můžeme provést v programu GeoGebra, viz Obr. 17 a 18. Využijeme při tom funkci *Vytvořit 2D náhled z* dané roviny. Pro

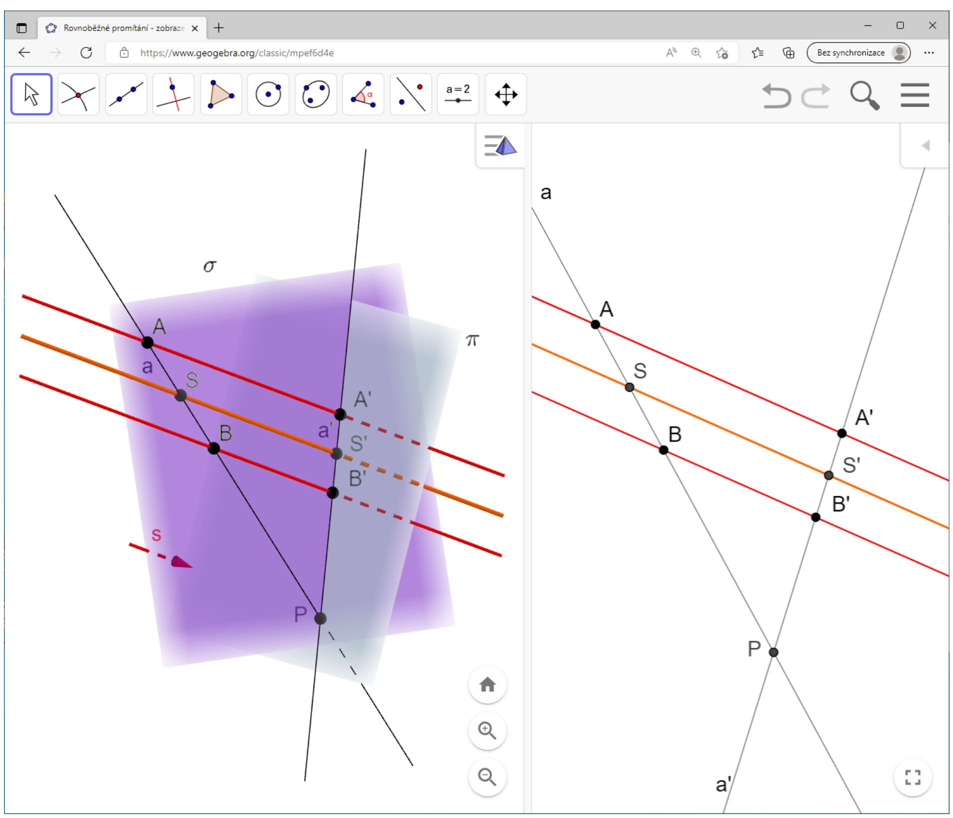


Figure 17: Zobrazení středu úsečky v rovnoběžném promítání (řešeno v programu GeoGebra)

rovnoběžné i středové promítání si nejprve v 3D náhledu zobrazíme promítací rovinu přímky AB, potom použitím uvedené funkce zobrazíme dění v této rovině ve vedlejším okně, jak vidíme na Obr. 17 a 18. Tyto náhledy z perspektivy promítací roviny nám jasně ukazují, jaké bude řešení úkolu stanoveného v příkladu.

V případě rovnoběžného promítání se střed (bod S) úsečky (AB) zobrazí na střed obrazu ($A'B'$) této úsečky. Tvrzení bychom dokázali odkazem na podobnost trojúhelníků, Konkrétně v situaci na Obr. 17 jsou trojúhelníky $PB'B$, $PS'S$ a $PA'A$ vzájemně podobné podle kritéria *uu*. Všechny tři trojúhelníky mají společný vnitřní úhel při vrcholu P. Shoda dalších sobě odpovídajících úhlů, např. u vrcholů B', S' a A', je zajištěna rovnoběžností promítacích přímek.

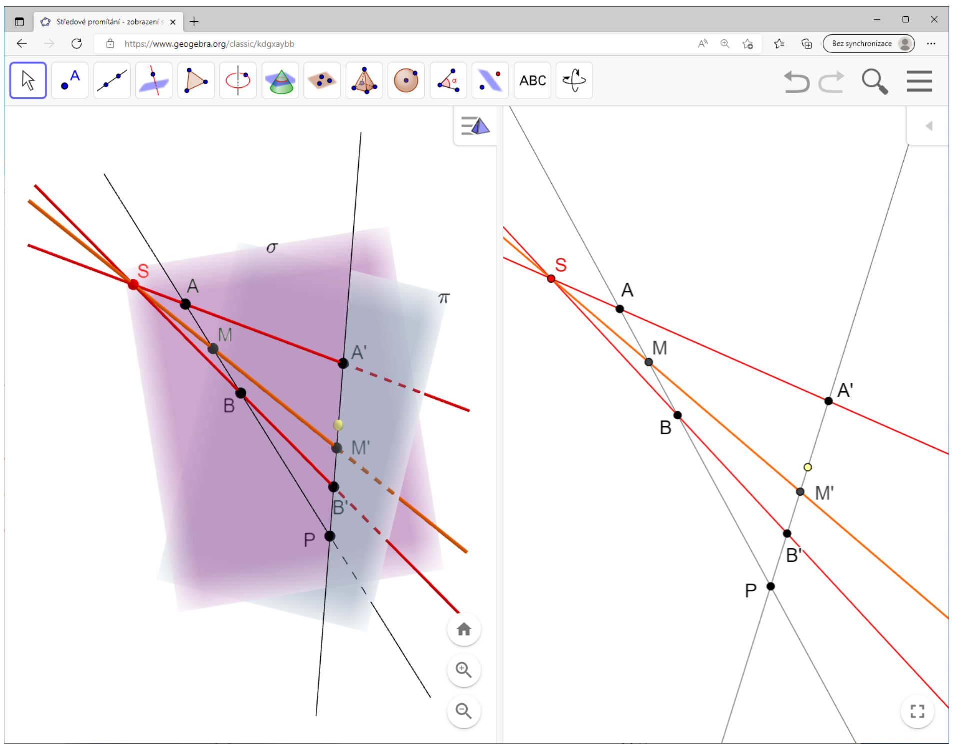


Figure 18: Zobrazení středu úsečky ve středovém promítání (řešeno v programu GeoGebra)

V případě středového promítání, viz Obr. 18, právě tato shoda úhlů při vrcholech B', M' a A' nebo B, M a A neplatí v důsledku různoběžnosti promítacích přímek. Příslušné trojúhelníky tak nejsou podobné, tedy střed (bod M) úsečky (AB) se nezobrazí na střed obrazu ($A'B'$) této úsečky. Pro vizuální evidenci této skutečnosti je střed úsečky $A'B'$ na Obr. 18 vyznačen žlutým bodem.

Zjištěné skutečnosti jsou projevem obecných vlastností rovnoběžného a středového promítání a týkají se jejich *invariant*[1] těchto zobrazení.

[1] *Invariantem* rozumíme vlastnost, která se při aplikaci dané transformace nemění. Více viz např. Wikipedia: Invariant (mathematics)

Invariantem rovnoběžného promítání je dělicí poměr.

Vlastnost *zachování středu* při *rovnoběžném promítání*, tj. zobrazení středu úsečky na střed jejího obrazu, je pouze dílčím projevem obecné vlastnosti tohoto zobrazení, která spočívá v tom, že se zachovává (tj. přenáší ze vzorů na obrazy) jakýkoliv poměr vzdáleností tří bodů. Stručně vyjádřeno, v rovnoběžném promítání se *zachovává dělicí poměr*[2].

Invariantem středového promítání je dvojpoměr.

Jak je zjevné z Obr. 18, ve středovém promítání se dělicí poměr *nezachovává.* Neznamená to ale, že je toto promítání zcela *nevyzpytatelné.* I ono disponuje invariantem. Dokonce takovým, který je spjat s pojmem dělicí poměr. Ten se sice ve středovém promítání nezachovává, zachovává se ale poměr dělicích poměrů pro čtyři body na přímce, tzv. *dvojpoměr*[3]. Tato vlastnost je předmětem *Pappovy věty o invarianci dvojpoměru.* Důkaz je uveden např. v Hašek, R. *Geometrie 4* (studijní text). 2021, str. 26–27.

4.3 Základní pojmy a vybrané vlastnosti (rovnoběžného) promítání

Hlavní rovina je (každá) rovina rovnoběžná s průmětnou π, viz rovina $\tau \parallel \pi$ na Obr. 19.

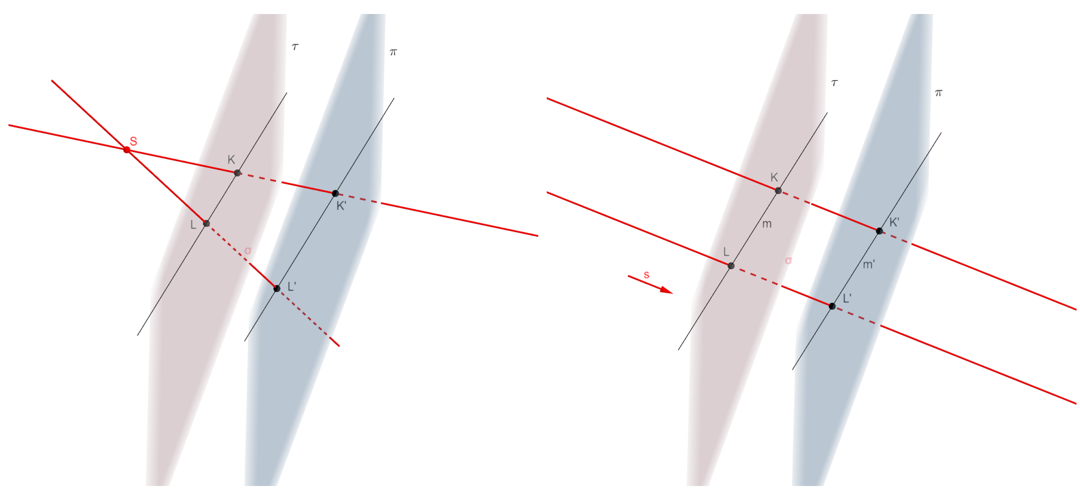


Figure 19: Hlavní rovina τ ve středovém (vlevo) a v rovnoběžném (vpravo) promítání.

[2] *Dělicím poměrem* rozumíme číslo, které jednoznačně udává polohu bodu na přímce vzhledem ke dvěma pevně daným bodům této přímky. Můžeme ho definovat takto: *Nechť A, B, C; $A \neq B$, $C \neq B$, jsou tři body ležící na přímce (tj. tři kolineární body). Potom číslo λ definované rovnicí*

$$C - A = \lambda(C - B)$$

značíme (ABC) a nazýváme dělicím poměrem bodu C vzhledem k bodům A, B.. Více viz Hašek, R. *Planimetrie* (studijní text). 2020, str. 15

[3] *Dvojpoměr* můžeme definovat takto: *Nechť A, B, C, D jsou čtyři navzájem různé body přímky. Číslo $\delta = \dfrac{(ABC)}{(ABD)}$ nazýváme dvojpoměrem bodů A, B, C, D (v tomto pořadí) a značíme $\delta = (ABCD)$.* Více viz Hašek, R. *Geometrie 4* (studijní text). 2021, str. 19–30

Z Obr. 19 a s ním spojených online appletů je zřejmé, že *obrazem přímky ležící v hlavní rovině (jinak řečeno, přímky rovnoběžné s průmětnou) je v obou typech promítání přímka, která je s ní rovnoběžná.* V případě rovnoběžného promítání navíc platí, že *průmětem (obrazem) útvaru ležícího v hlavní rovině je útvar s ním shodný.*

Příklad 4.2. *Jak je uvedeno výše, v případě rovnoběžného promítání je průmětem útvaru ležícího v hlavní rovině útvar s ním shodný. Jak je tomu ve středovém promítání? Existuje i zde nějaká souvislost mezi obrazcem ležícím v hlavní rovině a obrazcem, který je jeho obrazem? Vysvětlete!*

Nadále se budeme zabývat výhradně *rovnoběžným promítáním.* Budeme při tom často odkazovat na následující vlastnosti *rovnoběžného promítání*:

1. *Průmětem přímky je přímka nebo bod.*

2. *Průmětem roviny je celá průmětna nebo přímka.*

3. *Průmětem rovnoběžných přímek jsou rovnoběžné přímky nebo dva body.*

Příklad 4.3. *Každou z uvedených vlastností ilustrujte 3D obrázkem nakresleným v prostředí GeoGebra Grafický náhled 3D.*

Příklad 4.4. *Platí výše uvedené vlastnosti 1–3 také pro středové promítání? Pokud ne doslova, platí alespoň nějaké analogie? Vyslovte je!*

Třetím podprostorem trojrozměrného bodového prostoru vedle bodu a přímky je *rovina.* Uvedeme si zde proto ještě klíčové pojmy, s kterými při zobrazování rovin pracujeme, viz Obr. 20. *Stopa roviny* je průsečnice roviny s průmětnou, viz Obr. 20,

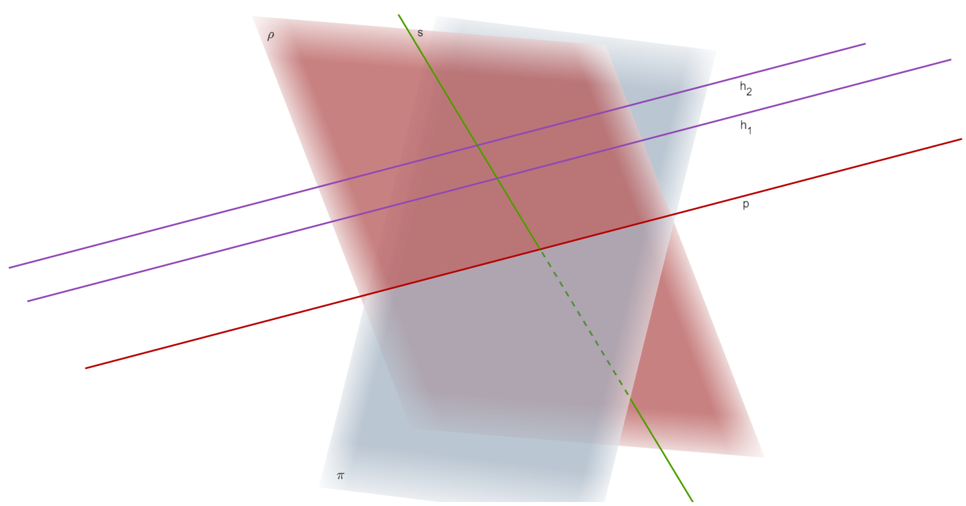


Figure 20: Rovina ρ a její stopa p, hlavní přímky h_1, h_2 a spádová přímka s

přímka $p \equiv \rho \cap \pi$. *Hlavní přímka roviny* je každá přímka, která leží v příslušné rovině a je rovnoběžná s průmětnou, viz Obr. 20, přímky h_1, h_2. *Spádová přímka roviny* je přímka, která leží v příslušné rovině a je kolmá na její hlavní přímky, viz Obr. 20, přímka s. Z uvedeného je patrné, že stopu roviny můžeme považovat za speciální případ hlavní přímky a že spádová přímka je kolmá i ke stopě roviny.

5 Kosoúhlé promítání

Kosoúhlým promítáním rozumíme *rovnoběžné promítání, při němž je směr promítání kosý k průmětně (tzv. průmětně kosoúhlého promítání).* [1] Kosoúhlé promítání je zpravidla určeno průměty os pravoúhlé souřadnicové soustavy, jejíž jedna souřadnicová rovina je totožná (obecně předpokládáme, že rovnoběžná) s průmětnou, viz Obr. 21.

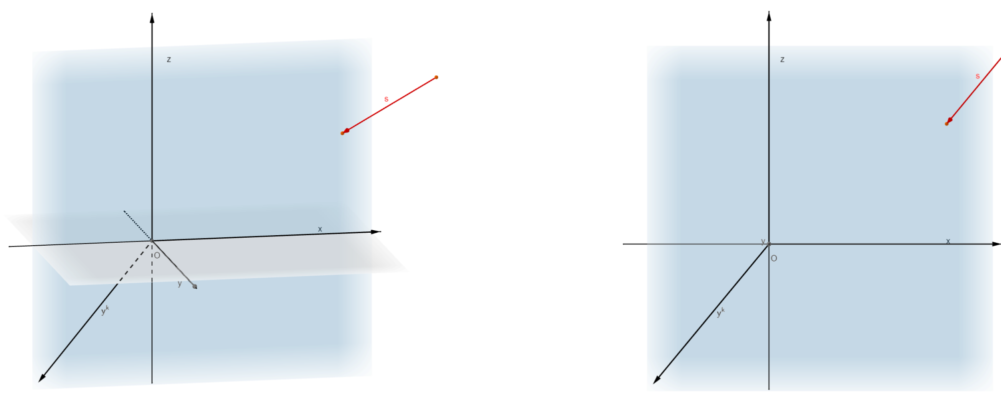


Figure 21: Princip kosoúhlého promítání; vlevo názorný průmět celé scény, vpravo výsledný kosoúhlý průmět

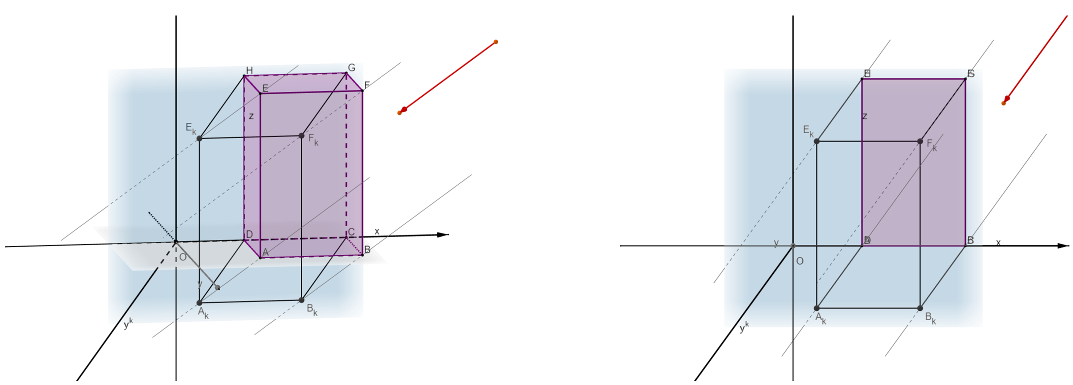


Figure 22: Kvádr v kosoúhlém promítání; vlevo názorný průmět celé scény, vpravo výsledný kosoúhlý průmět kvádru

5.1 Zadání kosoúhlého promítání

Kosoúhlé promítání je většinou určeno průměty os pravoúhlé soustavy souřadnic (x, y, z). V literatuře se setkáme s použitím jak pravotočivé, tak i levotočivé soustavy. My budeme používat *levotočivou soustavu souřadnic*, viz Obr. 23 i všechny předchozí ilustrace kosoúhlého promítání, stejně jako v *Mongeově promítání.*

Jak bylo uvedeno dříve, průmětna kosoúhlého promítání je rovnoběžná, většinou přímo totožná, s jednou ze souřadnicových rovin. Na Obr. 23 je to rovina xz. Velikost kosoúhlého průmětu jednotkové úsečky na souřadnicové ose kolmé k průmětně, na Obr. 23 se jedná o kosoúhlý průmět y_k osy y, se nazývá *poměr zkrácení* (též *poměr (kvocient) zkreslení*) a značí se q. Osy x a z jsou totožné se svými kosoúhlými průměty, značíme je tedy x, z. Osa y je orientována "proti nám", kolmo k průmětně. Jejím kolmým průmětem je bod O. Pracujeme tedy s jejím kosoúhlým průmětem y_k, jeho6 jednotky ale vidíme zkreslené koeficientem q, jak bylo uvedeno. Orientovaný úhel kosoúhlých průmětů y_k a x (při "naší" volbě průmětny kosoúhlého promítání rovnoběžné s rovinou xz) se nazývá *úhel kosoúhlého promítání* (též *úhel zkosení*) a značí se ω, mluvíme pak o kosoúhlém promítání (ω, q), viz Obr. 23.

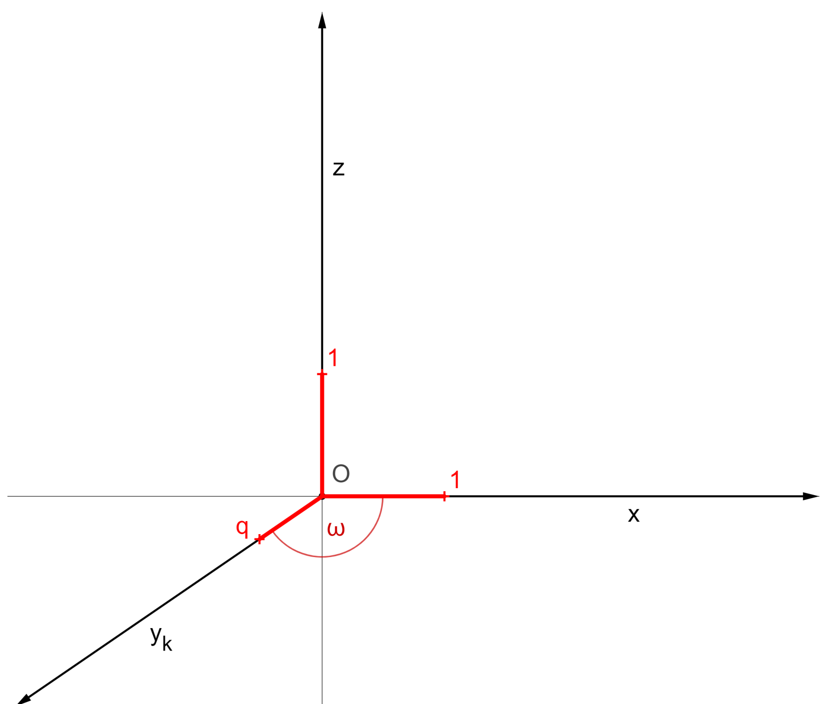


Figure 23: Kosoúhlé promítání (ω, q) - zadání osovým křížem

5.2 Zobrazení bodu v kosoúhlém promítání

Příklad 5.1. *V kosoúhlém promítání, které je zadáno úhlem zkosení* $\omega = 135°$ *a poměrem zkreslení* $q = 3/4$*, sestrojte kosoúhlý průmět bodu* $A = [3, 5, 6]$ *(použijte levotočivou soustavu).*

Pro určení polohy bodu vzhledem k souřadnicovým osám nestačí jenom jeho *kosoúhlý průmět* A_k (nehrozí-li mýlka, značíme jednoduše A) do průmětny π^k (případně označené pouze π). Je to pouze jeden bod, který nám neposkytne informaci, jak hluboko ve scéně je umístěn. Potřebujeme proto ještě jeden *kolmý* průmět bodu do jedné ze souřadnicových rovin. Používá se *půdorys*, tj. kolmý průmět A_1 do roviny xy. Ten se potom kosoúhle promítá do průmětny π^k (π) jako *kosoúhlý půdorys* A_{1k}.

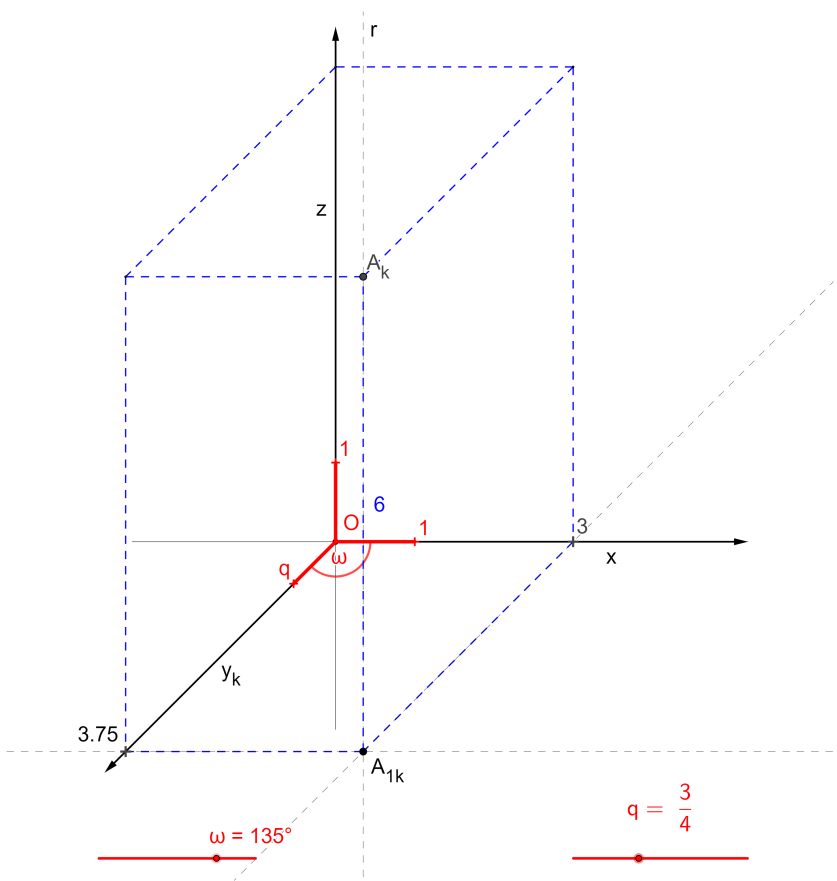


Figure 24: Kosoúhlé promítání $(135°, 3/4)$: Zobrazení bodu $A[3, 5, 6]$

Příklad 5.2. *V kosoúhlém promítání* $(120°, 1/2)$ *zobrazte body* $K = [-2, 6, 5]$*,* $L = [5, -4, 3]$*.*

5.3 Vybrané druhy kosoúhlého promítání

- **Kavalírní perspektiva**

  Průmětnou je $\nu = (xz)$, $\omega = 135°$, $q = 1$ (izometrie)[4]

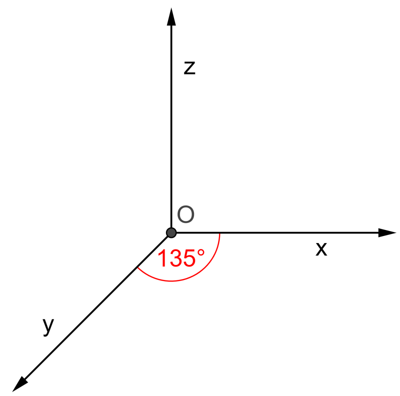


Figure 25: Vojenská perspektiva

- **Vojenská perspektiva (plánometrie)**

  Průmětnou je $\pi = (xy)$, $\omega = 135°$, $q = 1$ (izometrie)

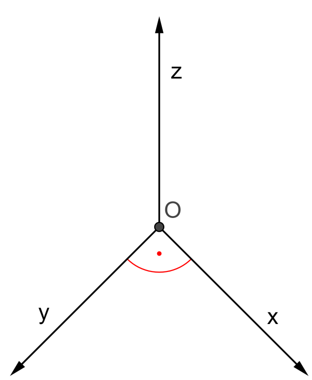


Figure 26: Vojenská perspektiva

- **Volné rovnoběžné promítání**

  Nejsou zobrazeny osy, $\omega = 135°$, $q = 1/2$

[4]Podle vztahu velikostí jednotek j_x, j_y, j_z (hovoříme o axonometrických jednotkách, viz kapitola **Axonometrie**) na jednotlivých osách soustavy souřadnic $O(xyz)$ označujeme příslušné promítání přívlastkem:

- ISOMETRIE pro $j_x = j_y = j_z$,
- DIMETRIE pro $j_x = j_y \neq j_z$ nebo $j_x \neq j_y = j_z$ nebo $j_z \neq j_x = j_y$,
- TRIMETRIE pro $j_x \neq j_y \neq j_z \neq j_x$.

6 Volné rovnoběžné promítání

Volné rovnoběžné promítání je rovnoběžné promítání na jednu průmětnu, v němž se obraz průmětu útvaru sestrojuje užitím vět platících pro rovnoběžné promítání, viz str. 17, a to bez zadání obrazů průmětů os souřadnicové soustavy. [1]

Volné rovnoběžné promítání je základní metodou zobrazení trojrozměrných těles používanou ve výuce na základní a střední škole.

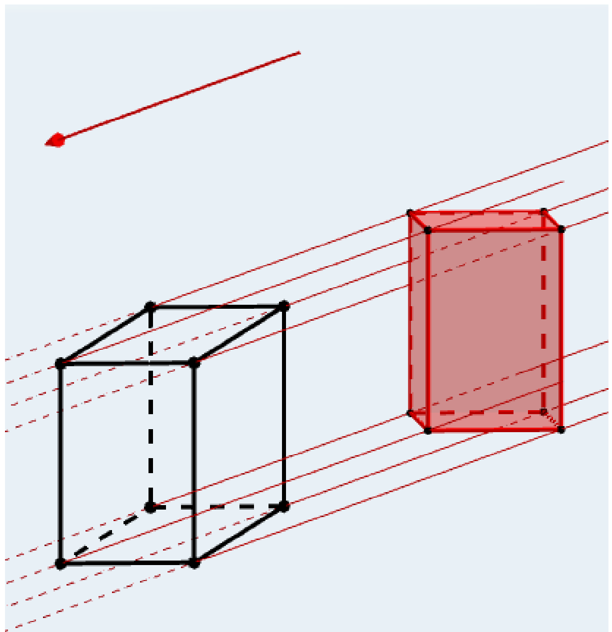


Figure 27: Volné rovnoběžné promítání – zobrazení kvádru v *průčelné* poloze

Volným rovnoběžným promítáním (nazývá se též zkráceně *Volné promítání*) nazýváme rovnoběžné promítání, u kterého nezadáváme souřadnicové osy (přesněji jejich průměty). Při zobrazování těles ve volném rovnoběžném promítání dbáme na dodržení těchto vlastností (viz Obr. 27):

* *Průmětem libovolné přímky je buď přímka nebo bod.*

* *Průmětem libovolných dvou rovnoběžek jsou buď rovnoběžky (mohou i splývat) nebo dva body.*

* *Průmětem každého geometrického útvaru, který leží v průčelné rovině (tj. v rovině rovnoběžné s průmětnou) je útvar s ním shodný.*

* *Geometrický útvar, který neleží v průčelné rovině se zpravidla zkresluje. Poměr rovnoběžných úseček se při tom zachovává, tj. pro dvě úsečky AB, CD a jejich obrazy $A'B'$, $C'D'$ platí $|A'B'|/|C'D'| = |AB|/|CD|$.*

* *Obrazy úseček kolmých k průmětně (tj. k jakékoliv průčelné rovině) jsou vzájemně rovnoběžné a s vodorovným směrem (představme si třeba směr kladné poloosy x)*

svírají úhel φ (zpravidla volíme $\varphi = 45°$). Velikost obrazu každé takové úsečky je potom q násobkem velikosti původní úsečky, tj. pro každou úsečku KM kolmou k průmětně a její obraz $K'M'$ platí $|K'M'| = q|KM|$ (zpravidla volíme $q = \frac{1}{2}$).

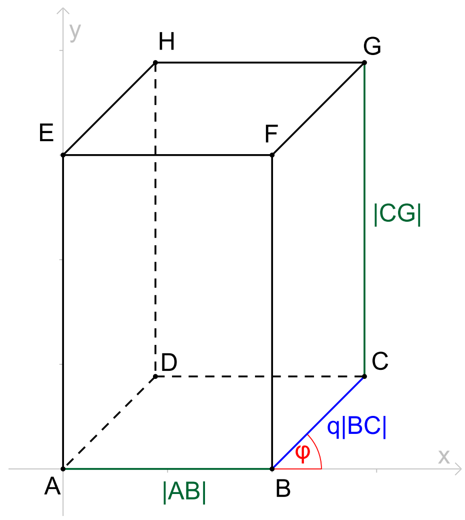


Figure 28: Volné rovnoběžné promítání – zobrazení kvádru $4 \times 5 \times 6$

Příklad 6.1. *Výše uvedené tvrzení "Poměr rovnoběžných úseček se při tom zachovává, tj. pro dvě úsečky AB, CD a jejich obrazy $A'B'$, $C'D'$ platí $|A'B'|/|C'D'| = |AB|/|CD|$" je důsledkem invariantnosti dělicího poměru v rovnoběžném promítání. Vysvětlete!*

Příklad 6.2. *Naučte se načrtnout od ruky krychli, pravidelný čtyřstěn a válec ve volném rovnoběžném promítání ($\varphi = 45°$, $q = 1/2$), viz Obr. 29, 30 a 31.*

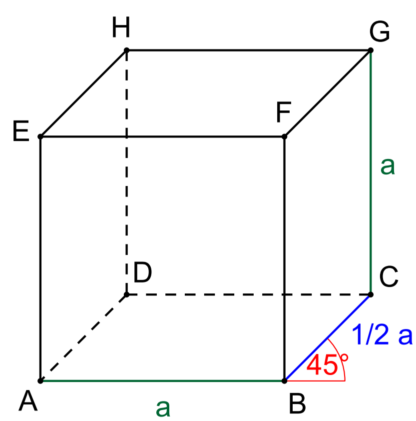


Figure 29: Volné rovnoběžné promítání – zobrazení krychle $a \times a \times a$

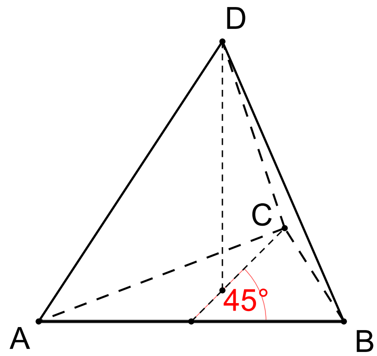


Figure 30: Volné rovnoběžné promítání – zobrazení pravidelného čtyřstěnu s hranou délky a

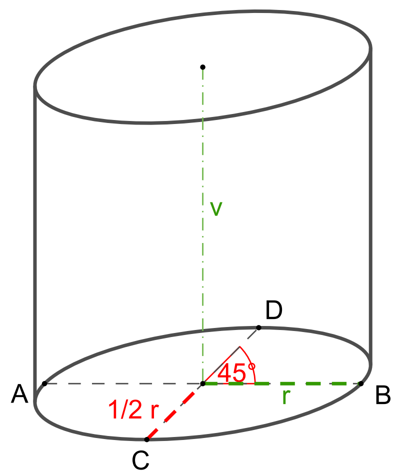


Figure 31: Volné rovnoběžné promítání – zobrazení válce s poloměrem r a výškou v

Elipsa kosoúhlého průmětu podstavy válce je určena svými *sdruženými průměry* AB, CD, viz Obr. 31. Pro nalezení jejích os a vrcholů použijeme *Rytzovu konstrukci*.

6.1 Slabiny kosoúhlého promítání

Výsledek kosoúhlého promítání je názorný, ale neodpovídá realitě. Evidentní je to v případě zobrazení koule, viz Obr. 32, jejímž průmětem je elipsa. Podobný efekt, i když méně patrný, se projevuje i při zobrazení válce nebo kužele, kdy délka hlavní poloosy elipsy podstavy je větší než poloměr příslušného kruhu. Při zobrazení kvádru nebo krychle (ale platí to samozřejmě naprosto obecně) se zase dobře projevuje absence zohlednění hloubky scény, kdy není rozdíl v zobrazení stejně vysokých hran, které jsou od pozorovatele různě daleko (jak známe z reálného světa a jak je uplatněno při perspektivním zobrazení). Nejedná se o nedostatky či chyby, jedná se o přirozený důsledek skutečnosti, že se jedná o rovnoběžné promítání ve směru kosém vzhledem k průmětně.

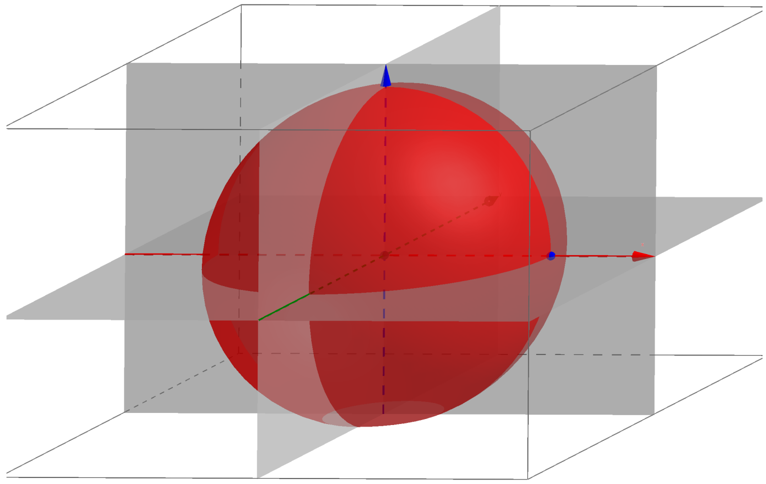


Figure 32: Koule v kosoúhlém promítání

References

[1] Sedláček, J. a kol. *Slovník školské matematiky.* Praha: SPN ARGO. 1981.

[2] Voráčová, Š. a kol. *Atlas geometrie. Geometrie krásná a užitečná.* Praha: Academia. 2012.