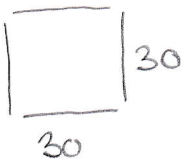
Obvod, obsah, povrch a objem

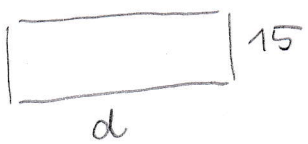
1. Čtvercová zahrada má výměru (obsah) 9 arů. Jak je dlouhá obdélníková zahrada o stejné výměře, jestliže je široká 15 m? Která zahrada má delší plot? (*Pozn.:* Význam jednotky ar viz `https://cs.wikipedia.org/wiki/Ar_(jednotka_plochy)`.)

9 arů = 900 m² tj. jedná se o čtverec o straně 30 m



Obvod (délka plotu) čtvercové zahrady je 4×30 m = 120 m

Obdélníková zahrada o straně 15 m a stejné výměře:



tj. $15 \times d = 900$
$d = 60$ m

Obvod (délka plotu) obdélníkové zahrady je potom
$2 \times (60 + 15) = 2 \times 75 = 150$ m

Delší plot má obdélníková zahrada.

2. Obvod obdélníku, jehož jeden rozměr je 8 cm, se rovná obvodu čtverce o straně 12,5 cm. Určete druhý rozměr obdélníku. Mají oba obrazce stejný obsah?

Čtverec o straně 12,5 cm má obvod $4 \times 12{,}5 = 50$ cm

Má-li mít obdélník o rozměrech $8 \times b$ stejný obvod, musí platit $2 \times (8 + b) = 50$

tj. $8 + b = 25$
$b = 17$ cm

Druhý rozměr obdélníku je 17 cm.

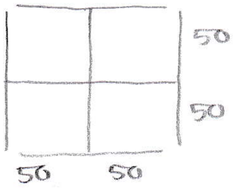
Obsah čtverce je $12{,}5 \times 12{,}5 = 156{,}25$ cm²

Obsah obdélníku je $8 \times 17 = 136$ cm²

Obrazce nemají stejný obsah. Větší obsah má čtverec.

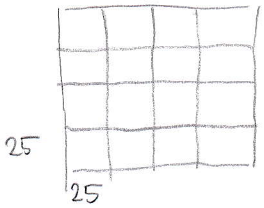
3. Podlaha má tvar obdélníku o rozměrech 10 m a 25 m. Kolik čtvercových dlaždic je potřeba k její vydláždění, jestliže má dlaždice stranu dlouhou: (a) 50 cm, (b) 25 cm?

Ad a) Na $1\,m^2$ jsou třeba 4 dlaždice:



Celkem je potřeba $10 \times 25 \times 4 =$ 1000 dlaždic

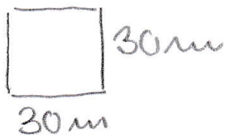
Ad b) Na $1\,m^2$ je potřeba 16 dlaždic:



Celkem je potřeba $10 \times 25 \times 16 =$ 4000 dlaždic

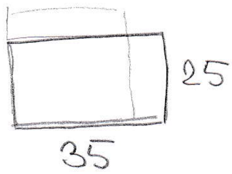
4. Změní se výměra čtvercové zahrady o straně 30 m, jestliže jednu její stranu a stranu protější o 5 m zvětšíme a druhou její stranu a stranu protější o 5 m zmenšíme?

Původní zahrada:



výměra je $30 \times 30 = 900\,m^2$

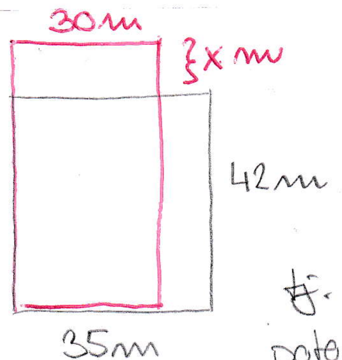
Zahrada po úpravě



výměra je $35 \times 25 = 875\,m^2$

Po úpravě se výměra zahrady zmenší.

5. Při pozemkové úpravě byla šířka obdélníkové zahrady o rozměrech 35 m a 42 m zmenšena o 5 m. O kolik metrů musí být délka zvětšena, aby se výměra zahrady nezměnila?



Aby se výměra zahrady nezměnila musí platit:

$35 \cdot 42 = 30 \cdot (42 + x)$,

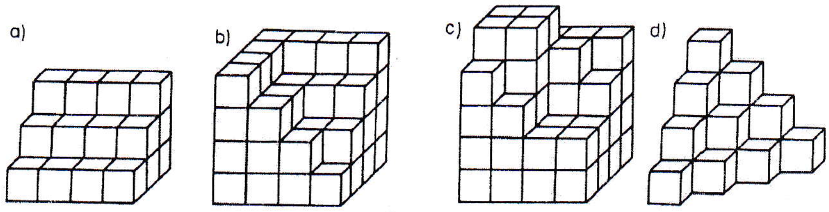
tj. $35 \cdot 42 = 30 \cdot 42 + 30x$,

potom $30x = 5 \cdot 42 = 210$

$x = 7\,m$

Délka musí být zvětšena o 7 metrů

6. Z kolika kostek jsou postaveny stavby na obrázcích a–d?



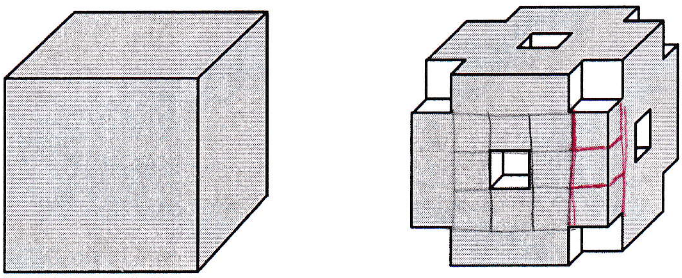
Ad a) $4 \times 6 = \underline{24}$

b) $64 - (1+4+9) = 64 - 14 = \underline{50}$

c) $64 - (4+6) + 4 = \underline{58}$

d) $1+3+6+10 = \underline{20}$

7. Krychle vlevo byla slepena ze 125 bílých krychliček, má tedy v každé řadě 5 krychliček. Krychle je na povrchu obarvena na šedo. Když se z každého rohu a ze středu každé stěny této krychle odebere jedna krychlička, vznikne těleso vpravo.



a) Kolik krychliček v tělese vpravo má právě jednu stěnu obarvenou na šedo?

b) Kolik krychliček v tělese vpravo má právě dvě stěny obarvené na šedo?

b) Kolik krychliček v tělese vpravo nemá obarvenou žádnou stěnu na šedo?

Ad a) $6 \times 8 = 48$

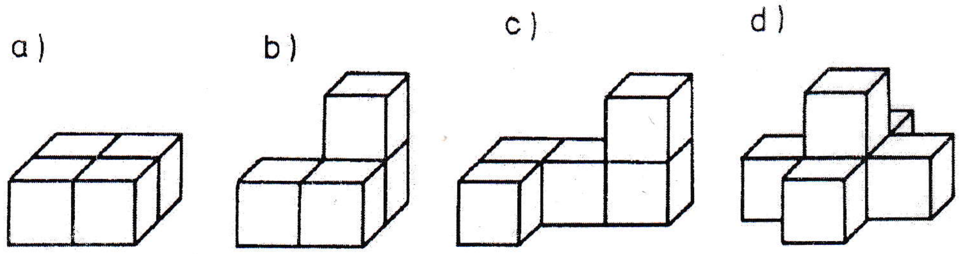
b) $12 \times 3 = 36$

c) $3 \times 3 \times 3 = 27$

zkouška: $48 + 36 + 27 = 111 = 125 - 14$,

kde 14 je počet odstraněných krychliček

8. Stavby na obrázcích a–d jsou vytvořeny z krychlí o hraně 1 cm. U každé z nich určete povrch a objem.



Ad a) $S = 16\,cm^2$, $V = 4\,cm^3$

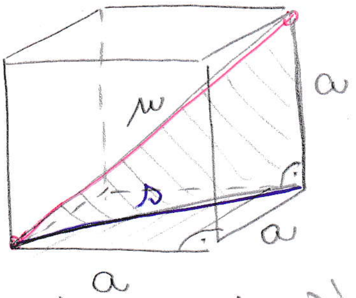
b) $S = 18\,cm^2$, $V = 4\,cm^3$

c) $S = 22\,cm^2$, $V = 5\,cm^3$

d) $S = 26\,cm^2$, $V = 6\,cm^3$

---

9. Vypočtěte objem a povrch krychle, jejíž tělesová úhlopříčka má délku 6 cm.



Tělesová úhlopříčka krychle má délku

$u = \sqrt{a^2+a^2+a^2} = \sqrt{3a^2} = a\sqrt{3}$

Jedná se o dvojí použití Pythagorovy věty. Nejprve určíme délku stěnové úhlopříčky $s = \sqrt{a^2+a^2} = a\sqrt{2}$, potom určíme délku tělesové úhlopříčky

$u = \sqrt{s^2+a^2} = \sqrt{2a^2+a^2} = \sqrt{3a^2} = a\sqrt{3}$

$\boxed{\frac{6}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{6\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3}}$

Řešení příkladu: $u = a\sqrt{3} = 6\,cm$

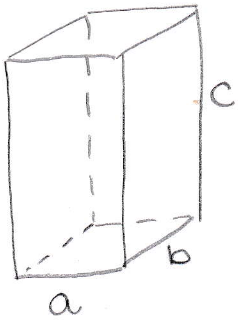
tj. $a = \frac{1}{\sqrt{3}}\cdot 6\,cm$, po usměrnění

dostaneme $a = 2\sqrt{3}\,cm$

Objem krychle: $V = a^3 = (2\sqrt{3})^3 = 2^3(\sqrt{3})^3 = 8\cdot 3\sqrt{3} = 24\sqrt{3}\,cm^3$

Povrch krychle: $S = 6\cdot a^2 = 6\cdot(2\sqrt{3})^2 = 6\cdot 4\cdot 3 = 72\,cm^2$

10. Vypočtěte povrch kvádru, který má objem $162\,\mathrm{cm}^3$ a délky jeho hran jsou v poměru $1:2:3$.



Objem kvádru o rozměrech $a \times b \times c$

je $\underline{V=a\cdot b\cdot c}$

Povrch tohoto kvádru je potom

$$\underline{S=2(a\cdot b+a\cdot c+b\cdot c)}$$

Pozn.: Ta dvojka je tam proto, že vždy dvě protilehlé stěny jsou shodné

Řešení příkladu: Jsou-li délky hran kvádru v poměru $1:2:3$ znamená to, že $\underline{a:b:c=1:2:3}$

Potom ale musí být $\underline{b=2a}$ a $\underline{c=3a}$

Objem kvádru tak můžeme vyjádřit jako

$$V=a\cdot b\cdot c=a\cdot 2a\cdot 3a=6a^3=162\,\mathrm{cm}^3$$

tj.

$$a^3=27\,\mathrm{cm}^3$$

$$\underline{a=3\,\mathrm{cm}}$$

Potom platí, že $\underline{b=6\,\mathrm{cm}}$ a $\underline{c=9\,\mathrm{cm}}$

a povrch kvádru je $S=2(3\cdot 6+3\cdot 9+6\cdot 9)$

$$S=2(18+27+54)=\underline{198\,\mathrm{cm}^2}$$

11. Kvádr má povrch $1\,000\,\mathrm{cm}^2$ a délky jeho hran jsou v poměru $1:2:6$. Vypočtěte jeho objem.

Postupujeme s využitím poznatků z řešení příkladu 10.

$a:b:c=1:2:6$, tj. $b=2a$, $c=6a$

$$S=2(ab+ac+bc)=2(2a^2+6a^2+12a^2)=40a^2=1000\,\mathrm{cm}^2$$

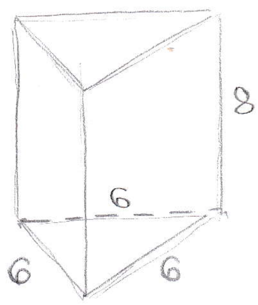
$$a^2=25\,\mathrm{cm}^2$$

$$\underline{a=5\,\mathrm{cm}}$$

Pro $a=5\,\mathrm{cm}$ je $b=10\,\mathrm{cm}$ a $c=30\,\mathrm{cm}$.

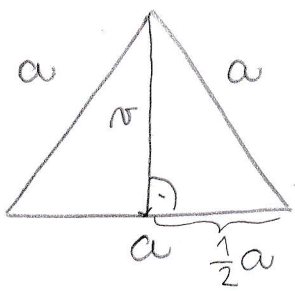
Objem kvádru je $V=a\cdot b\cdot c=5\cdot 10\cdot 30=\underline{1500\,\mathrm{cm}^3}$

12. Vypočtěte objem a povrch pravidelného trojbokého hranolu s podstavnou hranou délky 6 cm a výškou 8 cm.



Pravidelný trojboký hranol má jako postavu rovnostranný trojúhelník.
Pro výpočet objemu i povrchu potřebujeme vědět, jak spočítat obsah rovnostranného trojúhelníku.

Obsah rovnostranného trojúhelníku



pro výšku v platí $v^2 = a^2 - \frac{1}{4}a^2$,

tj. $v = \sqrt{a^2 - \frac{1}{4}a^2} = \sqrt{\frac{3}{4}a^2}$

$v = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot a$

Potom obsah rovnostr. trojúh. je $S = \frac{1}{2}a \cdot v = \frac{1}{2}a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}a$

$\underline{\underline{S = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2}}$

Řešení příkladu:

Objem hranolu: $V = S_p \cdot v$, kde S_p je obsah podstavy a v je výška hranolu!

$V = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 6^2 \cdot 8 = \sqrt{3} \cdot 36 \cdot 2 = \underline{72\sqrt{3}\ cm^3}$

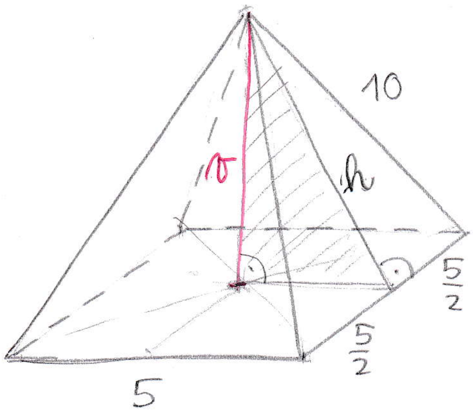
$\underline{\underline{V \doteq 124{,}7\,cm^3}}$

Povrch hranolu: $S = 2 \cdot S_p + S_{pl}$, kde S_{pl} je obsah pláště

$S = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 6^2 + 3 \cdot 6 \cdot 8 = 18 \cdot \sqrt{3} + 144 = \underline{18(8+\sqrt{3})\ cm^2}$

$\underline{\underline{S \doteq 175\ cm^2}}$

13. Vypočtěte objem a povrch pravidelného čtyřbokého jehlanu s podstavnou hranou délky 5 cm a délkou boční hrany 10 cm.



Pro výpočet objemu a povrchu daného jehlanu potřebujeme znát jeho výšku v a také výšku h trojúhelníku, který tvoří plášť jehlanu.

Nejprve zjistíme h. Platí $h^2 = 10^2 - \left(\frac{5}{2}\right)^2$, tj. $h = \sqrt{100 - \frac{25}{4}}$,

po úpravě $h = \sqrt{\frac{375}{4}} = \frac{5}{2}\sqrt{15}$ cm

Potom s jeho pomocí vyjádříme v.

Platí $v^2 = h^2 - \left(\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{375}{4} - \frac{25}{4} = \frac{350}{4}$

$$v = \sqrt{\frac{350}{4}} = \frac{5}{2}\sqrt{14} \text{ cm}$$

Objem jehlanu

$V = \frac{1}{3} S \cdot v$, kde S je obsah podstavy a v je výška

$$V = \frac{1}{3} \cdot 5^2 \cdot \frac{5}{2}\sqrt{14} = \frac{125}{6}\sqrt{14} \text{ cm}^3 \doteq 78 \text{ cm}^3$$

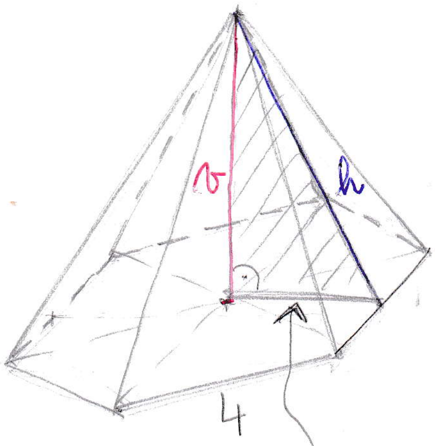
Povrch jehlanu

$S_j = S + 4 \cdot S_\Delta$, kde S_Δ je obsah jednoho trojúhelníku z pláště jehlanu, tj. $S_\Delta = \frac{1}{2} 5 \cdot \frac{5}{2}\sqrt{15}$

$$S_j = 5^2 + \cancel{4} \cdot \frac{1}{\cancel{2}} \cdot 5 \cdot \frac{5}{\cancel{2}}\sqrt{15} = 5^2 + 5^2\sqrt{15} = 25(1+\sqrt{15}) \text{ cm}^2$$

$S_j \doteq 121 \text{ cm}^2$

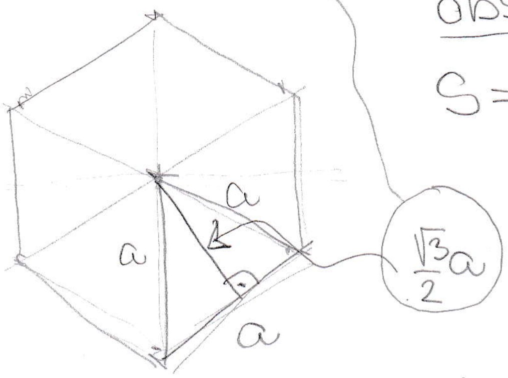
14. Vypočtěte objem a povrch pravidelného šestibokého jehlanu s podstavnou hranou délky 4 cm a výškou 8 cm.



Podstavou daného jehlanu je pravidelný šestiúhelník.
Pro řešení daného úkolu potřebujeme umět spočítat obsah podstavy jehlanu a obsah trojúhelníku, který tvoří jeho plášť.

obsah pravidelného šestiúhelníku

$$S = 6\cdot\frac{1}{2}a\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}a = \frac{3\sqrt{3}}{2}a^2$$



obsah plášťového trojúhelníku

$$S_\triangle = \frac{1}{2}a\cdot h, \text{ kde } h = \sqrt{v^2 + \frac{3}{4}a^2}$$

Řešení příkladu:

Objem jehlanu: $V = \frac{1}{3}S\cdot v = \frac{1}{\cancel{3}}\cdot\frac{\cancel{3}\sqrt{3}}{2}\cdot 4^2\cdot 8 = 64\sqrt{3}\ \mathrm{cm}^3$

$V \doteq 111\ \mathrm{cm}^3$

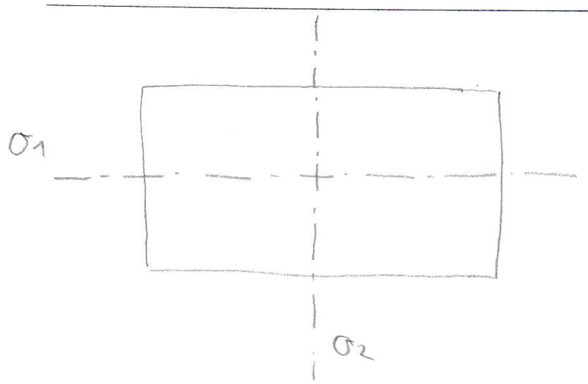
Povrch jehlanu: $S_j = S + 6\cdot S_\triangle = \frac{3\sqrt{3}}{\cancel{2}}\cdot 16 + 6\cdot\frac{1}{\cancel{2}}4\cdot\sqrt{64 + \frac{3}{\cancel{4}}\cancel{16}^{4}}$

$S_j = 24\cdot\sqrt{3} + 12\cdot\sqrt{76} = 24\cdot\sqrt{3} + 24\cdot\sqrt{19} = 24(\sqrt{3}+\sqrt{19})$

$S_j = 24(\sqrt{3}+\sqrt{19})\ \mathrm{cm}^2$

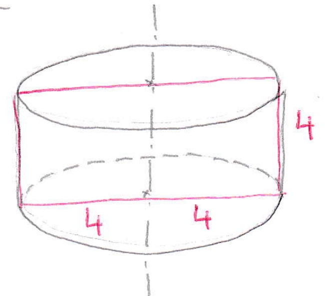
$S_j \doteq 146\ \mathrm{cm}^2$

15. Vypočtěte objem a povrch rotačního válce, který vznikne otáčením obdélníku s rozměry 4 cm a 8 cm kolem jeho osy souměrnosti.



Obdélník má dvě osy souměrnosti, jsou proto možná dvě řešení: nízký a široký válec nebo úzký a vysoký.

1. moznost: Rotace kolem osy o_2.

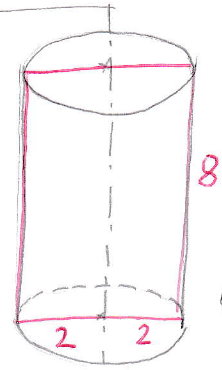


$V=\pi r^2\cdot v=\pi\cdot 4^2\cdot 4 = \underline{64\pi\,cm^3} \doteq 201\,cm^3$

$S=2\pi r^2+2\pi r\cdot v = 2\pi r(r+v)$

$S=2\pi\cdot 4(4+4) = \underline{64\pi\,cm^2 \doteq 201\,cm^2}$

2. moznost: Rotace kolem osy o_1



$V=\pi r^2\cdot v$

$V=\pi\cdot 2^2\cdot 8=\underline{32\pi\,cm^3}$

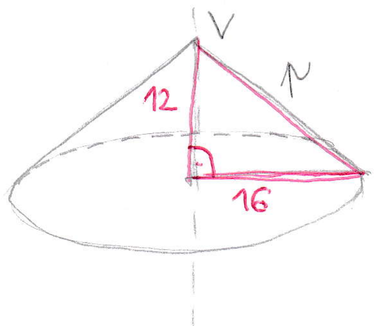
$\underline{V\doteq 100{,}5\,cm^3}$

$S=2\pi r^2+2\pi r\cdot v$

$S=2\pi r(r+v)=2\pi\cdot 2(2+8)=\underline{40\pi\,cm^2}$

$\underline{S\doteq 126\,cm^2}$

16. Vypočtěte objem a povrch rotačního kužele, který vznikne otáčením pravoúhlého trojúhelníku s odvěsnami $a = 12\,\text{cm}$, $b = 16\,\text{cm}$ kolem kratší odvěsny.



Objem rotačního kužele

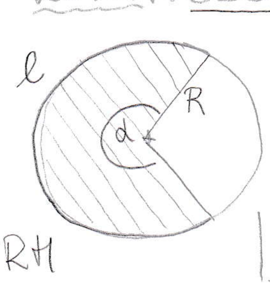
$\boxed{V=\frac{1}{3}S_p\cdot v}$, kde S_p je obsah podstavy a v je výška kužele,

tj. $\boxed{V=\frac{1}{3}\pi r^2\cdot v}$, kde r je polomer postavy

Povrch rotačního kužele

Povrch rotačního kužele je součtem obsahu podstavy, tj. kruhu o poloměru r, a pláště, tj. kruhové výseče z kruhu o poloměru s, kde s je délka povrchové úsečky pláště kužele, tj. spojnice vrcholu kužele s libovolným bodem na hranici podstavy.

VSUVKA: Obsah kruhové výseče



kruhová výseč kruhu o poloměru R příslušející oblouku délky l (úhlu α)

$S=\frac{\pi R^2}{2\pi}\cdot\alpha=\frac{\pi R^2}{2\pi}\cdot\frac{l}{R}=\frac{1}{2}R\cdot l$

$\boxed{S=\frac{1}{2}R^2\cdot\alpha=\frac{1}{2}R\cdot l}$, kde α je v rad.

RH

Řešení příkladu:

$V=\frac{1}{3}\pi\cdot 16^2\cdot 12=\underline{1024\pi\,cm^3}\doteq \underline{3217\,cm^3}$

$S=S_p+S_{pl}$, kde S_{pl} je obsah pláště. Platí $S_{pl}=\frac{1}{2}\cdot s\cdot 2\pi r$,

kde $s=\sqrt{12^2+16^2}=20\,cm$ a $2\pi r$ je obvod podstavy, tj. délka oblouku výseče tvořící plášť.

$S=\pi\cdot 16^2+\frac{1}{2}\cdot 20\cdot 2\pi\cdot 16=\underline{576\pi\,cm^2}\doteq \underline{1809{,}6\,cm^2}$