7 Binomické rovnice

Binomickou rovnicí rozumíme rovnici ve tvaru

$$x^n - z = 0,$$

kde $z \in C$, $z \neq 0$, $n > 0$, $n \in N$.

Příklad 32. *Řešte v C rovnici*

$$x^3 - 8 = 0.$$

OPAKOVÁNÍ
Komplexní číslo. Absolutní hodnota. Argument komplexního čísla. Algebraický, goniometrický a exponenciální tvar komplexního čísla. Eulerův vzorec. Moivreova věta. Početní operace s komplexními čísly. Násobení komplexní jednotkou.

Řešení binomické rovnice

Rovnici

$$x^n - z = 0$$

upravíme na tvar

$$x^n = z.$$

Vyjádříme x a z:

$$x = |x|(\cos\varphi + i\sin\varphi),\ \ z = |r|(\cos\alpha + i\sin\alpha).$$

Potom bude mít rovnice tvar

$$|x|^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi) = |r|(\cos\alpha + i\sin\alpha).$$

Odtud plyne:

$$|x| = \sqrt[n]{r}, \quad \varphi = \frac{\alpha + 2k\pi}{n};\ k = 0, 1, 2, ..., n-1.$$

Kořeny dané binomické rovnice potom vypadají takto:

$$x_{k+1} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\alpha + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\alpha + 2k\pi}{n}\right),\ k = 0, 1, 2, ..., n-1.$$

Příklad 33. *Řešte v C rovnici*

$$x^3 - 2 = 0.$$

Kořeny rovnice znázorněte v Gaussově rovině komplexních čísel.

Příklad 34. *Řešte v C rovnici*

$$x^4 + 1 = 0.$$

Kořeny rovnice znázorněte v Gaussově rovině komplexních čísel.

Poznámky. Řešení binomické rovnice

1. Kořeny rovnice $x^n - a = 0$ tvoří v Gaussově rovině vrcholy pravidelného $n-$úhelníka vepsaného do kružnice se středem v počátku a s poloměrem rovným hodnotě $\sqrt[n]{|a|}$.

   Rovnicím $x^n - a = 0$ se proto také říká **rovnice pro dělení kruhu**.

2. Binomická rovnice $x^n - a = 0$ **má v C právě n různých kořenů**. Jinak řečeno, **má pouze jednoduché kořeny**.

3. Řešení binomické rovnice $x^n - a = 0$ nazýváme $n-$**tá odmocnina z** a. Pro jeho zápis budeme používat symbol $\sqrt[n]{a}$, kterým však rozumíme **libovolné z n různých řešení příslušné binomické rovnice**. Například:

$$\sqrt{1} = \pm 1,$$

$$\sqrt[3]{2} \text{ představuje } \sqrt[3]{2} \text{ nebo } \sqrt[3]{2}\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \text{ nebo } \sqrt[3]{2}\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

4. Někdy se $n-$té odmocnina z komplexního čísla zapisuje takto:

$$(\sqrt[n]{a})_C,$$

   aby se odlišila od reálné odmocniny čísla a.

ÚKOL: Dokažte tvrzení z poznámky 2.

ÚKOL: Rozhodněte, zda v C platí rovnost

$$\sqrt[n]{z_1} \cdot \sqrt[n]{z_2} = \sqrt[n]{z_1 \cdot z_2}.$$

7.1 $n-$té odmocniny z jedné

Binomická rovnice

$$x^n - 1 = 0$$

se nazývá **rovnice pro $n-$ té odmocniny z jedné**.

Příklad 35. *Určete všechny hodnoty $\sqrt[n]{1}$.*

Řešení: Řešíme rovnici $x^n - 1 = 0$:

$$|z|(\cos n\varphi + i \sin n\varphi) = 1(\cos 0 + i \sin 0)$$

Jednotlivé kořeny, které jsou dané vztahem

$$x_{k+1} = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n},\ k = 0, 1, 2, ..., n-1,$$

vypadají takto:

$$\begin{aligned}
x_1 &= \cos\frac{0}{n} + i\sin\frac{0}{n} &&= 1,\\
x_2 &= \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n} &&= \varepsilon,\\
x_3 &= \cos\frac{4\pi}{n} + i\sin\frac{4\pi}{n} &&= \varepsilon^2,\\
x_4 &= \cos\frac{6\pi}{n} + i\sin\frac{6\pi}{n} &&= \varepsilon^3,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
x_n &= \cos\frac{2(n-1)\pi}{n} + i\sin\frac{2(n-1)\pi}{n} &&= \varepsilon^{n-1}.
\end{aligned}$$

Poznámka. Označíme-li $\varepsilon = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}$, potom dle Moivreovy věty platí $\varepsilon^k = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}$. $n-$té odmocniny z jedné tak můžeme postupně označit takto:

$$1, \varepsilon, \varepsilon^2, \varepsilon^3, ..., \varepsilon^{n-1}.$$

Příklad 36. *Vypočtěte všechny hodnoty symbolu* $\sqrt[3]{z}$*, kde* $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) \neq 0$.

Řešení:

$$\begin{aligned} z_1 &= \sqrt[3]{r}(\cos\frac{\varphi}{3} + i\sin\frac{\varphi}{3}), \\ z_2 &= \sqrt[3]{r}(\cos\frac{\varphi+2\pi}{3} + i\sin\frac{\varphi+2\pi}{3}) = z_1\cdot\varepsilon, \\ z_3 &= \sqrt[3]{r}(\cos\frac{\varphi+4\pi}{3} + i\sin\frac{\varphi+4\pi}{3}) = z_1\cdot\varepsilon^2. \end{aligned}$$

Důsledek. Hodnoty $\sqrt[3]{z}$ můžeme zapsat ve tvaru

$$z_1, \quad z_1\cdot\varepsilon, \quad z_1\cdot\varepsilon^2,$$

kde z_1 je jedna konkrétní hodnota $\sqrt[3]{z}$.

Věta 7.1. *Nechť* z *je nenulové komplexní číslo. Nechť* $\sqrt[n]{z}$ *označuje libovolnou pevně zvolenou hodnotu tohoto symbolu (tj. libovolnou z* $n-$*tých odmocnin ze* z*). Potom všechny* $n-$*té odmocniny z čísla* z *jsou dány čísly*

$$\sqrt[n]{z},\ \varepsilon\cdot\sqrt[n]{z},\ \varepsilon^2\cdot\sqrt[n]{z},\ \varepsilon^3\cdot\sqrt[n]{z},\ \ldots\ \varepsilon^{n-1}\cdot\sqrt[n-1]{z},$$

kde $\varepsilon = \cos\dfrac{2\pi}{n} + i\sin\dfrac{2\pi}{n}$.

Definice 7.1 (Rovnice pro dělení kruhu.). *Binomickou rovnici ve tvaru*

$$x^n - 1 = 0,$$

kde $n \geq 1$*, budeme nazývat* **rovnicí pro dělení kruhu**.

ÚKOL: Určete 3., 4. a 5. odmocniny z jedné.

7.2 Algebraický tvar druhé odmocniny z komplexního čísla

Věta 7.2. *Druhá odmocnina z komplexního čísla* $a + ib$, $b \neq 0$ *má dvě hodnoty lišící se pouze znaménkem. Vypadají takto:*
a) Pro $b > 0$:

$$\pm\left[\sqrt{\frac{1}{2}(a+\sqrt{a^2+b^2})}+i\sqrt{\frac{1}{2}(-a+\sqrt{a^2+b^2})}\right],$$

b) Pro $b < 0$:

$$\pm\left[\sqrt{\frac{1}{2}(a+\sqrt{a^2+b^2})}-i\sqrt{\frac{1}{2}(-a+\sqrt{a^2+b^2})}\right].$$

Příklad 37. *Řešte rovnici* $x^2 + (1+3i)x - (2-2i) = 0.$