# 2 Diskriminant

Diskriminant polynomu je výraz, který můžeme vyjádřit pomocí kořenů polynomu (diskriminant $n$ neurčitých) nebo pomocí koeficientů daného polynomu (homogenní polynom vzhledem k těmto koeficientům). Jeho hodnota vypovídá o povaze kořenů polynomu.

**Příklad 3.** *Určete kořeny polynomu $x^3 - 9x^2 + 26x - 24$, víte-li, že jeden jeho kořen je aritmetickým průměrem zbývajících.*

**Příklad 4.** *Rozhodněte o počtech kořenů daných kvadratických rovnic:*
a) $2x^2 + 4x + 2 = 0$, b) $x^2 + 2x + 2 = 0$, c) $x^2 + 5x + 6 = 0$.

## 2.1 Diskriminant kvadratické rovnice (Diskriminant polynomu druhého stupně)

$ax^2 + bx + c = 0$

$$D = b^2 - 4ac$$

Dostaneme se k němu rozkladem kvadratického trojčlenu:

$$ax^2+bx+c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = ... = a\left(x - \frac{-b+\sqrt{D}}{2a}\right)\left(x - \frac{-b-\sqrt{D}}{2a}\right)$$

### Souvislost hodnoty $D$ s kořeny kvadratické rovnice

$D > 0$ : Dva různé reálné kořeny: $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$

$D = 0$ : Jeden dvojnásobný kořen: $x_1 = x_2 = \dfrac{-b}{2a}$

$D < 0$ : Dva imaginární, komplexně sdružené, kořeny: $x_{1,2} = \dfrac{-b}{2a} \pm \dfrac{\sqrt{D}}{2a} i$

Diskriminant známe jako výraz, tvořený koeficienty příslušného polynomu, který nám poskytuje informace o povaze jeho kořenů.

OTÁZKA: Je možné vyjádřit diskriminant pomocí kořenů příslušného polynomu?

Řešení pro polynom druhého stupně:
Pro kořeny $x_1, x_2$ polynomu platí:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2),$$

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a},$$

$$x_1 x_2 = \frac{c}{a}.$$

Potom:

$$b = -(x_1 + x_2)a,\ c = x_1 x_2 a.$$

Po dosazení do $D$ dostáváme:

$$D = b^2 - 4ac = (x_1 + x_2)^2 a^2 - 4a^2 x_1 x_2 = a^2(x_1^2 - 2x_1 x_2 + x_2^2) = a^2(x_1 - x_2)^2.$$

Závěr: Diskriminant polynomu druhého stupně s kořeny $x_1, x_2$ je dán vztahem

$$D = a^2(x_1 - x_2)^2.$$

**Poznámka.** Role diskriminantu je z tohoto vyjádření ihned patrná:

i) Dva různé reálné kořeny $x_1, x_2$: $D = a^2(x_1 - x_2)^2 > 0$.

ii) Jeden dvojnásobný reálný kořen $x_1 = x_2$: $D = a^2(x_1 - x_2)^2 = 0$.

iii) Dva komplexně sdružené imaginární kořeny $x_1 = m + ni, x_2 = m - ni$: $D = a^2(m + ni - m + ni)^2 = -4a^2n^2 < 0$.

### Diskriminant a Vandermondův determinant

$$V_2(x_1, x_2) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x_1 & x_2 \end{vmatrix}$$

$$V^2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x_1 & x_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \end{vmatrix} = ... = (x_1 - x_2)^2$$

Tedy: $D = a^2(x_1 - x_2)^2 = a^2V_2^2$.

## 2.2 Diskriminant kubické rovnice (Diskriminant polynomu třetího stupně)

$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$

$$D = b^2c^2 + 18abcd - 4b^3d - 4ac^3 - 27a^2d^2,$$

$$D = a^4(x_2 - x_1)^2(x_3 - x_1)^2(x_3 - x_2)^2.$$

### Souvislost hodnoty $D$ s kořeny kubické rovnice

$D > 0$ : Tři různé reálné kořeny $x_1, x_2, x_3$.

$D = 0$ : Alespoň dva stejné kořeny ze tří reálných.

$D < 0$ : Jeden reálný a dva imaginární, komplexně sdružené, kořeny.

### Diskriminant a Vandermondův determinant

$$V_3(x_1, x_2, x_3) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 \end{vmatrix}$$

$$D = a^4V_3^2.$$

### 2.3 Diskriminant polynomu $n-$tého stupně

Diskriminantem polynomu $n-$tého stupně s kořeny $x_1, x_2, ..., x_n$ rozumíme výraz

$$D_n(x_1, x_2, ..., x_n) = a_n^{2n-2} \prod_{i<j}^{n} (x_i - x_j)^2.$$

Pro účely výpočtu možno přehledněji rozepsat takto:

$$\begin{aligned} D_n(x_1, x_2, ..., x_n) = a^{2n-2} \cdot (x_1 - x_2)^2 \cdot (x_1 - x_3)^2 \cdot (x_1 - x_4)^2 \cdot ... \cdot (x_1 - x_n)^2 \cdot \\ \cdot (x_2 - x_3)^2 \cdot (x_2 - x_4)^2 \cdot ... \cdot (x_2 - x_n)^2 \cdot \\ \cdot (x_3 - x_4)^2 \cdot ... \cdot (x_3 - x_n)^2 \cdot \\ \cdots \\ \cdot (x_{n-1} - x_n)^2 \end{aligned}$$

OTÁZKA: Kolik činitelů ve tvaru $(x_i - x_j)^2$ má diskriminant $D_n(x_1, x_2, ..., x_n)$?

**Poznámka.** Rozlišujeme pojmy **diskriminant $n$ neurčitých** $x_1, x_2, ..., x_n$:

$$D_n(x_1, x_2, ..., x_n) = \prod_{i<j}^{n} (x_i - x_j)^2$$

a **diskriminant polynomu $n-$tého stupně** s kořeny $x_1, x_2, ..., x_n$:

$$D_n(x_1, x_2, ..., x_n) = a_n^{2n-2} \prod_{i<j}^{n} (x_i - x_j)^2.$$

**Definice 2.1 (Diskriminant $n$ neurčitých).** *Diskriminantem $n$ neurčitých $x_1, x_2, ..., x_n$ rozumíme polynom z $I[x_1, x_2, ..., x_n]$ ve tvaru:*

$$D_n(x_1, x_2, ..., x_n) = \prod_{i<j}^{n} (x_i - x_j)^2$$

*kde $I$ je obor integrity, popřípadě těleso.*

**Věta 2.1 (Vandermondův determinant).** *Označme:*

$$V_n(x_1, x_2, ..., x_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_{n-1} & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \dots & x_{n-1}^2 & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \dots & x_{n-1}^{n-1} & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

*(tzv. Vandermondův determinant). Potom platí:*

$$D_n(x_1, x_2, ..., x_n) = V_n^2(x_1, x_2, ..., x_n).$$

**Poznámka.** Z uvedené věty lze odvodit následující vyjádření diskriminantu pomocí polynomů $s_1, s_2, ..., s_n$ :

$$D_n(x_1, x_2, ..., x_n) = \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \dots & s_{n-1} \\ s_1 & s_2 & \dots & s_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ s_{n-1} & s_n & \dots & s_{2n-2} \end{vmatrix}$$

**ÚKOL:** Spočtěte $D_2(x_1, x_2)$.

**Definice 2.2 (Diskriminant polynomu).** *Nechť je dán polynom $f(x) \in I[x]$ ve tvaru*

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0; \; a_n \neq 0, n \geq 1.$$

*Nechť $x_1, x_2, ..., x_n$ jsou kořeny tohoto polynomu. Diskriminantem polynomu $f(x)$, resp. diskriminantem algebraické rovnice $f(x) = 0$, budeme rozumět výraz*

$$a_n^{2n-2} D_n(x_1, x_2, ..., x_n),$$

*tj.*

$$a_n^{2n-2} \prod_{i<j}^{n} (x_i - x_j)^2.$$

**Věta 2.2.** $D_n(x_1, x_2, ..., x_n) \neq 0$ *právě když má příslušná algebraická rovnice vesměs jednoduché kořeny.*

**Věta 2.3.** *Nechť* $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0 \in R[x],\ a_n \neq 0, n \geq 1,$ *má vesměs jednoduché kořeny. Pak její diskriminant je kladný (resp. záporný), právě když je počet párů komplexně sdružených kořenů polynomu* $f(z)$ *sudý (lichý).*