1 Newtonovy vzorce

Poprvé formulovány *Albertem Girardem* a *Isaacem Newtonem*. Popisují vztah mezi dvěma typy symetrických polynomů - elementárními symetrickými polynomy σ_i a součty $i-$tých mocnin neurčitých $x_1, x_2, ..., x_n$, které budeme značit s_i. Mají využití v různých oblastech matematiky. Nás bude zajímat jejich role při:

+ Vyjádření součtů $k-$tých mocnin $x_1^k + x_2^k + ... + x_n^k$ všech kořenů polynomu $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$ pomocí jeho koeficientů, bez nutnosti tyto kořeny znát.

+ Vyjádření diskriminantu (polynomu) n neurčitých.

Označme:

$$
\begin{aligned}
s_1 &= x_1 + x_2 + ... + x_n = \sum^{(n)} x_1 \\
s_2 &= x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2 = \sum^{(n)} x_1^2 \\
s_3 &= x_1^3 + x_2^3 + ... + x_n^3 = \sum^{(n)} x_1^3 \\
&\dots \\
s_n &= x_1^n + x_2^n + ... + x_n^n = \sum^{(n)} x_1^n \\
s_0 &= n
\end{aligned}
$$

Potom *Newtonovy* vztahy mezi s_i a σ_i můžeme vyjádřit takto:

$$s_k - \sigma_1 s_{k-1} + \sigma_2 s_{k-2} - ... + (-1)^{k-1}\sigma_{k-1}s_1 + (-1)^k k\sigma_k = 0, \qquad (1)$$

kde $k = 1, 2, ...$

Pro konkrétní hodnoty k můžeme Newtonovy vztahy vyjádřit třeba takto:

$$\begin{aligned}
s_1 &= \sigma_1 \\
s_2 &= \sigma_1 s_1 - 2\sigma_2 \\
s_3 &= \sigma_1 s_2 - \sigma_2 s_1 + 3\sigma_3 \\
s_4 &= \sigma_1 s_3 - \sigma_2 s_2 + \sigma_3 s_1 - 4\sigma_4 \\
&\dots \\
s_k &= \sigma_1 s_{k-1} - \sigma_2 s_{k-2} + ... - (-1)^{k-1}\sigma_{k-1} s_1 - (-1)^k k\sigma_k
\end{aligned} \tag{2}$$

Poznámka. Hodnota k může být tedy i vyšší než n. Potom uvažujeme $\sigma_{n+1} = \sigma_{n+2} = ... = 0$.

Ze vztahů (2) můžeme vyjádřit polynomy s_i pomocí elementárních symetrických polynomů σ_i (nebo naopak):

$$\begin{aligned}
s_1 &= \sigma_1 \\
s_2 &= \sigma_1^2 - 2\sigma_2 \\
s_3 &= \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 + 3\sigma_3 \\
s_4 &= \sigma_1^4 - 4\sigma_1^2\sigma_2 + 4\sigma_1\sigma_3 + 2\sigma_2^2 - 4\sigma_4 \\
s_5 &= \sigma_1^5 - 5\sigma_1^3\sigma_2 + 5\sigma_1^2\sigma_3 + 5\sigma_1\sigma_2^2 - 5\sigma_1\sigma_4 - 5\sigma_2\sigma_3 + 5\sigma_5 \\
&\dots
\end{aligned}$$

Příklad 1. *Určete* $\alpha_1^5 + \alpha_2^5$*, kde* α_1, α_2 *jsou kořeny polynomu* $f(x) = x^2 + x - 19$.

Příklad 2. *Určete* p, q*, víte-li, že polynom* $f(x) = x^2 + px + q$ *má kořeny* $\alpha_1, \alpha 2$ *a platí:* $\alpha_1^5 + \alpha_2^5 = 31, \alpha_1 + \alpha_2 = 1$.