# 8 Algebraická řešitelnost algebraických rovnic

Umíme řešit binomické rovnice.
Nyní nás zajímá, pro které algebraické rovnice je možné otázku nalezení jejich řešení převést na vyřešení jistých binomických rovnic.

## 8.1 Algebraická řešitelnost kvadratické rovnice

$$a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0,$$

$$x^2 + \frac{a_1}{a_2}x + \frac{a_0}{a_2} = 0.$$

Označme

$$p = \frac{a_1}{a_2}, \quad q = \frac{a_0}{a_2}.$$

Potom

$$x^2 + px + q = 0,$$

$$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \frac{p^2 - 4q}{4} = 0.$$

Zvolme substituci

$$x + \frac{p}{2} = y, \quad \frac{p^2 - 4q}{4} = b.$$

Potom dostaneme binomickou rovnici

$$y^2 - b = 0,$$

pro jejíž řešení platí:

$$y_1 = \sqrt{b},\ y_2 = -\sqrt{b},$$

tj.

$$x_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{b},\ x_2 = -\frac{p}{2} - \sqrt{b},$$

resp.

$$x_1 = -\frac{a_1}{2a_2} + \frac{\sqrt{a_1^2 - 4a_0a_2}}{2a_2},\ x_2 = -\frac{a_1}{2a_2} - \frac{\sqrt{a_1^2 - 4a_0a_2}}{2a_2}.$$

## 8.2 Algebraická řešitelnost algebraických rovnice

Stručně můžeme říci, že algebraická rovnice $f(x) = 0$ $n-$tého stupně je algebraicky řešitelná, jestliže její kořeny lze vyjádřit pomocí operací *sčítání*, *odčítání*, *násobení*, *dělení*, *umocňování* a *odmocňování* prováděných v konečném počtu na koeficientech dané algebraické rovnice.

**Příklad 40.** *Kořeny kvadratické rovnice $a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$ lze vyjádřit ve tvaru*

$$x_1 = -\frac{a_1}{2a_2} + \frac{\sqrt{a_1^2 - 4a_0a_2}}{2a_2}, \; x_2 = -\frac{a_1}{2a_2} - \frac{\sqrt{a_1^2 - 4a_0a_2}}{2a_2}.$$

Nebo můžeme algebraickou řešitelnost definovat pomocí posloupností binomických rovnic.

**Definice 8.1.** *Prvek $b$ nazveme* **racionálně vyjádřitelný** *pomocí prvků $a_a$, $a_2$, $\ldots$, $a_k$ z tělesa $T$, právě když lze $b$ vyjádřit pomocí operací sčítání, odčítání, násobení a dělení, prováděných na prvcích $a_a$, $a_2$, $\ldots$, $a_k$.*

**Definice 8.2.** *Nechť $f(x)$ je nenulový polynom nad tělesem $T$. Řekneme, že rovnice $f(x) = 0$ je* **algebraicky řešitelná**, *právě když existuje konečná posloupnost binomických rovnic*

$$y^{n_1} - b_1 = 0, \; y^{n_2} - b_2 = 0, \; ..., \; y^{n_k} - b_k = 0. \tag{3}$$

*taková, že*
*a) Koeficient $i-$té rovnice $b_i$ $(i = 1, 2, ..., k)$ lze racionálně vyjádřit pomocí koeficientů polynomu $f(x)$ a řešení předcházejících rovnic.*
*b) Každé řešení rovnice $f(x) = 0$ lze racionálně vyjádřit pomocí koeficientů polynomu $f(x)$ a řešení rovnic (3).*
*Posloupnost binomických rovnic (3) se potom nazýbá* **řetězec algebraické řešitelnosti** *rovnice $f(x) = 0$.*

**Věta 8.1.** *Algebraicky řešitelná je každá algebraická rovnice stupně menšího nebo rovného čtyřem.*

**Poznámky.** Řešitelnost algebraických rovnic

1) Výše uvedená věta se také nazývá „Abelova věta".
2) O nalezení algebraického řešení algebraických rovnic třetího stupně se zasadili Scipione del Ferro, Niccollo Tartaglia a Gerolamo Cardano, o nalezení algebraického řešení rovnic čtvrtého stupně potom Lodovico Ferrari.
3) Důkaz věty 8.1 je potom spjat se jmény Niels Henrik Abel a Évariste Galois.

V předcházející kapitole jsme dospěli k algebraické řešitelnosti kvadratické rovnice

$$a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0.$$

Z ní potom plyne **řešitelnost každé rovnice ve tvaru**:

$$ax^{2n} + bx^n + c = 0.$$

**Příklad 41.** *Řešte algebraickou rovnici*

$$x^6 - x^3 - 6 = 0.$$

## 8.3 Algebraické řešení kubické rovnice

$$a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0,\ a_3 \neq 0$$

Nejprve rovnici převedeme na normovaný tvar:

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0.$$

**ÚKOL:** Zvolte vhodnou substituci tak, **aby z rovnice zmizel kvadratický člen**.

Řešením je **substituce**: $x = y - \dfrac{a}{3}$.

Výsledkem její aplikace je **kubická rovnice v redukovaném tvaru**:

$$y^3 + py + q = 0. \tag{4}$$

Uvažujme kořen $\alpha$ této rovnice ve tvaru $\alpha = u + v$. Po úpravách dostaneme:

$$u^3 + v^3 + (u+v)(3uv + p) + q = 0.$$

**Volme**: $uv = -\frac{p}{3}$. Potom platí následující vztahy:

$$u^3 + v^3 = -q, \quad u^3v^3 = -\frac{p^3}{3^3}.$$

Ty můžeme uvažovat jako Vietovy vztahy pro kvadratickou rovnici

$$z^2 + qz - \frac{p^3}{3^3} = 0,$$

kterou nazýváme **kvadratická rezolventa kubické rovnice** (4). Pro její kořeny platí

$$z_{1,2} = -\frac{q}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}.$$

Pro neznámé $u$, $v$ tedy platí:

$$\begin{aligned} u^3 &= -\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3} \\ v^3 &= -\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3} \\ v &= \frac{-p}{3u} \end{aligned}$$

Potom existují tři různé hodnoty $u$ jakožto třetí odmocniny z výrazu $-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}$:

$$u_1 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}, \quad u_2 = \varepsilon u_1, \quad u_3 = \varepsilon^2 u_1, \tag{5}$$

kde $\varepsilon = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ je tzv. primitivní třetí odmocnina z jedné. Snadno dokážeme, že hodnotám $u_i$ odpovídají následující hodnoty $v_i$ v pořadí dle (6):

$$v_1 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}, \quad v_2 = \varepsilon^2 v_1, \quad v_3 = \varepsilon v_1. \tag{6}$$

Řešení kubické rovnice v redukovaném tvaru (4) tak můžeme zapsat ve tvaru:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= u_1 + v_1 \\ \alpha_2 &= \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 v_1 \\ \alpha_3 &= \varepsilon^2 u_1 + \varepsilon v_1. \end{aligned}$$

**Věta 8.2 (Cardanovy vzorce).** *Nechť je dána rovnice*

$$x^3 + px + q = 0;\ p, q \in C.$$

*Označíme-li $u_1$ kteroukoliv hodnotu symbolu $\sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$ a písmenem $v_1$ tu hodnotu symbolu $\sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$, pro kterou platí $3u_1v_1 = -p$ a značí-li navíc $\varepsilon = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ jednu primitivní třetí odmocninu z jedné, pak kořeny $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ kubické rovnice $x^3 + px + q = 0$ jsou dány vzorci*

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= u_1 + v_1 \\ \alpha_2 &= \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 v_1 \\ \alpha_3 &= \varepsilon^2 u_1 + \varepsilon v_1. \end{aligned}$$

*Tyto vzorce pro kořeny kubické rovnice se nazývají* **Cardanovy vzorce**.

**Příklad 42.** *Řešte v $C$ rovnice:*

a) $x^3 + 12x + 63 = 0$, *y* b) $x^3 + 6x + 2 = 0$,

c) $x^3 - 8x + 1 = 0$.

## Cardanovy vzorce s diskriminantem

Kubická rovnice $a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$ má diskriminant ve tvaru:

$$D_3 = a_2^2a_1^2 + 18a_3a_2a_1a_0 - 4a_2^3a_0 - 4a_3a_1^3 - 27a_3^2a_0^2.$$

Pro rovnici v redukovaném tvaru

$$y^3 + py + q = 0$$

dostaneme

$$D_3 = -4p^3 - 27q^2 = -4 \cdot 27 \left[ \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 \right].$$

Potom Cardanovy vzorce můžeme psát takto:

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \frac{1}{18}\sqrt{-3D_3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \frac{1}{18}\sqrt{-3D_3}} \\
\alpha_2 &= \varepsilon\sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \frac{1}{18}\sqrt{-3D_3}} + \varepsilon^2\sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \frac{1}{18}\sqrt{-3D_3}} \\
\alpha_3 &= \varepsilon^2\sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \frac{1}{18}\sqrt{-3D_3}} + \varepsilon\sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \frac{1}{18}\sqrt{-3D_3}}
\end{aligned}$$

Pro $D_3 > 0$ nastává tzv. **casus irreducibilis** ( tj. nezjednodušitelný případ).

**Příklad 43.** *Řešte v $C$ rovnici* $x^3 - 5x + 4 = 0$.

## 8.4 Řešení casus irreducibilis trigonometrickou substitucí

Řešme rovnici:

$$x^3 + px + q = 0. \tag{7}$$

Volíme substituci

$$x = 2k\cos\alpha,\ \alpha \in (0, \pi):$$

$$8k^3\cos^3\alpha + 2kp\cos\alpha + q = 0,$$

$$2k^3 4\cos^3\alpha - \left(\frac{-2kp}{3}\right) 3\cos\alpha + q = 0.$$

Hodnotu $k$ určíme tak, aby platilo: $2k^3 = \dfrac{-2kp}{3}$, tedy

$$k^2 = -\frac{p}{3}.$$

Potom

$$2k^3(4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha) + q = 0.$$

Protože platí $4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha = \cos 3\alpha$, můžeme psát rovnici ve tvaru

$$2k^3\cos 3\alpha + q = 0.$$

Odtud dostneme postupně

$$\cos 3\alpha = \frac{-q}{2k^3},$$

$$\cos 3\alpha = \frac{\frac{-q}{2}}{\left(\sqrt{-\frac{p}{3}}\right)^3},$$

$$\cos 3\alpha = \frac{-q}{2}\sqrt{\frac{27}{-p^3}}. \tag{8}$$

Rovnice (8) má řešení právě tehdy, když $\left|\dfrac{-q}{2}\sqrt{\dfrac{27}{-p^3}}\right| \leq 1$, což odpovídá podmínce $D > 0$, tj. casus irreducibilis. Z rovnice (8) vyjádříme $\alpha$ :

$$\alpha_1 = \frac{1}{3}\arccos\left(\frac{-q}{2}\sqrt{\frac{27}{-p^3}}\right).$$

Potom pro řešení rovnice (7) platí:

$$\begin{aligned}
x_1 &= 2\sqrt{-\frac{p}{3}}\cos\alpha_1 \\
x_2 &= 2\sqrt{-\frac{p}{3}}\cos\left(\alpha_1 + \frac{2\pi}{3}\right) \\
x_1 &= 2\sqrt{-\frac{p}{3}}\cos\left(\alpha_1 + \frac{4\pi}{3}\right)
\end{aligned}$$

**Příklad 44.** *Řešte rovnici $x^3 - 5x + 4 = 0$.*

*Řešení:* $D = 68 > 0 \ldots$ casus irreducibilis

I. Řešení pomocí Cardanových vzorců

II. Řešení pomocí trigonometrické substituce

III. Řešení symbolické.

**Věta 8.3.** *Kubická rovnice s reálnými koeficienty ve tvaru $x^3 + px + q = 0$ má*

*1) dvojnásobný kořen, je-li $D_3 = 0$,*

*2) všechny kořeny reálné, je-li $D_3 > 0$,*

*3) jeden kořen reálný a dva komplexně sdružené, je-li $D_3 < 0$.*

**Věta 8.4 (Řešení casus irreducibilis trigonometrickou substitucí).** *Nechť diskriminant rovnice $x^3 + px + q = 0$ s reálnými koeficienty je kladný. Pak kořeny této rovnice vypočteme následujícím způsobem:*
*Nalezneme řešení goniometrické rovnice*

$$\cos 3\alpha = \frac{-q}{2}\sqrt{\frac{27}{-p^3}} \tag{9}$$

*tak, aby $3\alpha \in (0, \pi)$. Hledané řešení je pak dáno vztahy:*

$$\begin{aligned} x_1 &= 2\sqrt{-\frac{p}{3}}\cos\alpha_1 \\ x_2 &= 2\sqrt{-\frac{p}{3}}\cos\left(\alpha_1 + \frac{2\pi}{3}\right) \\ x_1 &= 2\sqrt{-\frac{p}{3}}\cos\left(\alpha_1 + \frac{4\pi}{3}\right), \end{aligned}$$

*kde druhá odmocnina z kladného čísla $-\frac{p}{3}$ je kladné reálné číslo.*