Největší společný dělitel mnohočlenů

PŘÍKLAD 1: Určete NSD v R[x] mnohočlenů x^2-5x+6, x^2-4x+4.

```
> restart;
> f:=x^2-5*x+6; g:=x^2-4*x+4;
```

$$f := x^2-5x+6$$

$$g := x^2-4x+4$$

Použijeme příkaz **gcg**:

```
> gcd(f,g);
```

$$x-2$$

```
> factor(f); factor(g);
```

$$(x-2)(x-3)$$

$$(x-2)^2$$

```
> factor(f,real); factor(g,real);
```

$$(x-2.000000000)(x-3.000000000)$$

$$(x-2.)^2$$

Maple dokáže určit polynomy q(x) (quotient, příkaz **quo(f(x),g(x),x)**) a r(x) (remainder, příkaz **rem(f(x),g(x),x)**) z rovnosti $f(x)=g(x)\,q(x)+r(x)$. Pracuje v tělese, které je určeno koeficienty polynomů f(x), g(x). Přesněji to znamená, v nejmenším tělese obsahujícím koeficienty těchto polynomů. Pokud například mají f(x), g(x) celočíselné koeficienty, pracuje program v oboru integrity Q[x].

PŘÍKLAD 2: Určete NSD v R[x] mnohočlenů x^3+2x^2+3x+6, $3x^5+7x^2-4$.

```
> restart;
> f:=x^3+2*x^2+3*x+6; g:=3*x^5+7*x^2-4;
```

$$f := x^3+2x^2+3x+6$$

$$g := 3x^5+7x^2-4$$

```
> gcd(g,f);
```

$$1$$

```
> q1:=quo(g,f,x);
```

$$q1 := 3x^2-6x+3$$

```
> r1:=rem(g,f,x);
```

$$r1 := -22+x^2+27x$$

```
> q2:=quo(f,r1,x);
```

$$q2 := x-25$$

```
> r2:=rem(f,r1,x);
```

$$r2 := -544 + 700\,x$$

```
> q3:=quo(r1,r2,x);
```

$$q3 := \frac{x}{700} + \frac{4861}{122500}$$

```
> r3:=rem(r1,r2,x);
```

$$r3 := \frac{-12654}{30625}$$

```
> q4:=quo(r2,r3,x);
```

$$q4 := \frac{8330000}{6327} - \frac{10718750\,x}{6327}$$

```
> r4:=rem(r2,r3,x);
```

$$r4 := 0$$

PŘÍKLAD 3: Určete NSD v R[x] mnohočlenů $x^4 - 2\,x^2 + 1$, $x^3 + 3\,x^2 - x - 3$.

```
> restart;
> f:=x^4-2*x^2+1; g:=x^3+3*x^2-x-3;
```

$$f := x^4 - 2\,x^2 + 1$$

$$g := x^3 + 3\,x^2 - x - 3$$

```
> gcd(f,g);
```

$$x^2 - 1$$

```
> q1:=quo(f,g,x);
```

$$q1 := x - 3$$

```
> r1:=rem(f,g,x);
```

$$r1 := -8 + 8\,x^2$$

```
> q2:=quo(g,r1,x);
```

$$q2 := \frac{x}{8} + \frac{3}{8}$$

```
> r2:=rem(g,r1,x);
```

$$r2 := 0$$

PŘÍKLAD 4: Určete NSD v R[x] mnohočlenů $x^5 - 2\,x^3 + x^2 - 3\,x + 2$, $2\,x^2 - 1$.

```
> restart;
> f:=x^5-2*x^3+x^2-3*x+2; g:=2*x^2-1;
```

$$f := x^5 - 2\,x^3 + x^2 - 3\,x + 2$$

$$g := 2\,x^2 - 1$$

```
> gcd(f,g);
```

$$1$$

```
> q1:=quo(f,g,x);
```

$$q1 := \frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{4}x + \frac{1}{2}$$

```
> r1:=rem(f,g,x);
```

$$r1 := \frac{5}{2} - \frac{15\,x}{4}$$

```
> q2:=quo(g,r1,x);
```

$$q2 := -\frac{8\,x}{15} - \frac{16}{45}$$

```
> r2:=rem(g,r1,x);
```

$$r2 := \frac{-1}{9}$$

```
> q3:=quo(r1,r2,x);
```

$$q3 := -\frac{45}{2} + \frac{135\,x}{4}$$

```
> r3:=rem(r1,r2,x);
```

$$r3 := 0$$

PŘÍKLAD 5: Určete NSD v R[x] mnohočlenů $x^4 + 9\,x^3 + 27\,x^2 + 39\,x + 20$, $x^3 + 8\,x^2 + 18\,x + 15$.

```
> restart;
> f:=x^4+9*x^3+27*x^2+39*x+20; g:=x^3+8*x^2+18*x+15;
```

$$f := x^4 + 9\,x^3 + 27\,x^2 + 39\,x + 20$$

$$g := x^3 + 8\,x^2 + 18\,x + 15$$

```
> gcd(f,g);
```

$$x + 5$$

```
> q1:=quo(f,g,x);
```

$$q1 := x + 1$$

```
> r1:=rem(f,g,x);
```

$$r1 := 5 + x^2 + 6\,x$$

```
> q2:=quo(g,r1,x);
```

$$q2 := x + 2$$

```
> r2:=rem(g,r1,x);
```

$$r2 := x + 5$$

```
> q3:=quo(r1,r2,x);
```

$$q3 := x + 1$$

```
> r3:=rem(r1,r2,x);
```

$$r3 := 0$$

PŘÍKLAD 6: Určete NSD v R[x] mnohočlenů $x^4 - 2x^3 - 2x^2 + 7x - 6$, $2x^3 - 4x^2 - x + 2$.

```
> restart;
> f:=x^4-2*x^3-2*x^2+7*x-6; g:=2*x^3-4*x^2-x+2;
```

$$f := x^4 - 2x^3 - 2x^2 + 7x - 6$$

$$g := 2x^3 - 4x^2 - x + 2$$

```
> gcd(f,g);
```

$$x - 2$$

```
> factor(f); factor(g);
```

$$(x - 2)(x^3 - 2x + 3)$$

$$(x - 2)(2x^2 - 1)$$

```
> factor(f,real); factor(g,real);
```

$$(x + 1.893289196)(x - 2.)(x^2 - 1.893289196\,x + 1.584543981)$$

$$2.\,(x + 0.7071067812)(x - 0.7071067812)(x - 2.)$$

PŘÍKLAD 7: Určete q(x) (tj. částečný podíl) a r(x) (tj. zbytek) při dělení polynomu $x^2 + \sqrt{2}\,x + \sqrt{2}$ polynomem $3x + 1$.

Poznámka: Těleso, v němž je úloha řešena je určeno povahou koeficientů. Jedná se tedy o těleso čísel ve tvaru $a + b\sqrt{2}$, kde a, b náleží Q.

```
> restart;
> f:=x^2+sqrt(2)*x+sqrt(2); g:=3*x+1;
```

$$f := x^2 + \sqrt{2}\,x + \sqrt{2}$$

$$g := 3x + 1$$

```
> quo(f,g,x);
```

$$\frac{x}{3} + \frac{\sqrt{2}}{3} - \frac{1}{9}$$

```
> rem(f,g,x);
```

$$\frac{2\sqrt{2}}{3} + \frac{1}{9}$$

```
> gcd(f,g);
```

$$1$$

```
>
```