Eukleidův algoritmus. Rozklady polynomů v $C[x], R[x], Z[x]$.

1. Dokažte, že zlomek $\dfrac{n^3+2n}{n^4+3n^2+1}$ nelze krátit pro žádné přirozené číslo n.

2. Najděte polynom $P(x)$ tak, aby $P(x)$ byl dělitelný výrazem x^2+1 a $P(x)+1$ byl dělitelný výrazem x^3+x^2+1.

3. Najděte v $Q[x]$ největšího společného dělitele polynomů $f(x)=x^4-2x^3-2x^2+7x-6$ a $g(x)=2x^3-4x^2-x+2$.

4. Za jakých podmínek je polynom x^3+px+q dělitelný polynomem x^2+mx-1?

5. Určete největšího společného dělitele polynomů $f(x)$, $g(x)$ v $Q[x]$: $f(x)=x^4+x^3-3x^2-x+2$, $g(x)=2x^4+5x^3+2x^2+x+2$.

6. Najděte polynomy $Fx)$, $G(x)$ tak, aby $(x^8-1)F(x)+(x^5-1)G(x)=x-1$.

7. Rozložte na součin ireducibilních činitelů v $Z[x]$ polynom $x^4-2x^3-11x^2+12x+36$.

8. Polynom x^8-1 rozložte v součin ireducibilních činitelů postupně v $Z[x]$, $Q[x]$, $R[x]$ a $C[x]$.

9. Polynom x^3-1 rozložte v součin ireducibilních činitelů postupně v $Z[x]$, $Q[x]$, $R[x]$ a $C[x]$.

10. Rozložte kvadratický trojčlen ax^2+bx+c v součin ireducibilních polynomů v $C[x]$.

Cvičení

C-1 Rozložte polynom $4x^3+4x^2-13x+5$ postupně v $Z[x]$, $Q[x]$, $R[x]$ a $C[x]$.

C-2 Řešte v R nerovnici $(x-1)^4(x-2)^3(x-3)^2(x-4)\geq 0$.

C-3 Rozložte polynom $4x^5+12x^4+11x^3+11x^2+12x+4$ postupně v $Z[x]$, $Q[x]$, $R[x]$ a $C[x]$.

C-4 Následující polynomy rozložte postupně v $Z[x]$, $Q[x]$, $R[x]$ a $C[x]$:
a) $x^4-x^3-x^2-x-2$,
b) x^4-x^2-2,
c) x^4+1,
d) x^8+x^4+1,
e) x^4+4,
f) x^6-1,
g) $x^3-6x^2+11x-6$,
h) x^3-4x^2+4x-3,
i) $16x^4+64$.

C-5 Vytvořte polynom $h(x)$, který má různé rozklady v $Q[x]$, $R[x]$ a $C[x]$.

C-6 Eukleidovým algoritmem určete největšího společného dělitele polynomů $f(x)$ a $g(x)$:
a) $f(x)=x^2-5x+6$, $g(x)=x^2-4x+4$,
b) $f(x)=x^3+2x^2+3x+6$, $g(x)=3x^5+7x^2-4$,
c) $f(x)=x^4-2x^2+1$, $g(x)=x^3+3x^2-x-3$,
d) $f(x)=x^5-2x^3+x^2-3x+2$, $g(x)=2x^2-1$,
e) $f(x)=x^4+9x^3+27x^2+39x+20$, $g(x)=x^3+8x^2+18x+15$.

C-7 Stanovte Eukleidovým algoritmem největšího společného dělitele polynomů $f(x)$ a $g(x)$ z oboru integrity $Q[x]$ a vyjádřete jej ve tvaru $p(x)\cdot f(x)+q(x)\cdot g(x)$:
a) $f(x)=x^5+2x^4-6x^3-16x^2-7x+14$, $g(x)=x^4+3x^3-4x^2-21x-21$,
b) $f(x)=x^5-3x^4-3x^3+16x^2-x-10$, $g(x)=x^4-4x^3+17x-14$.