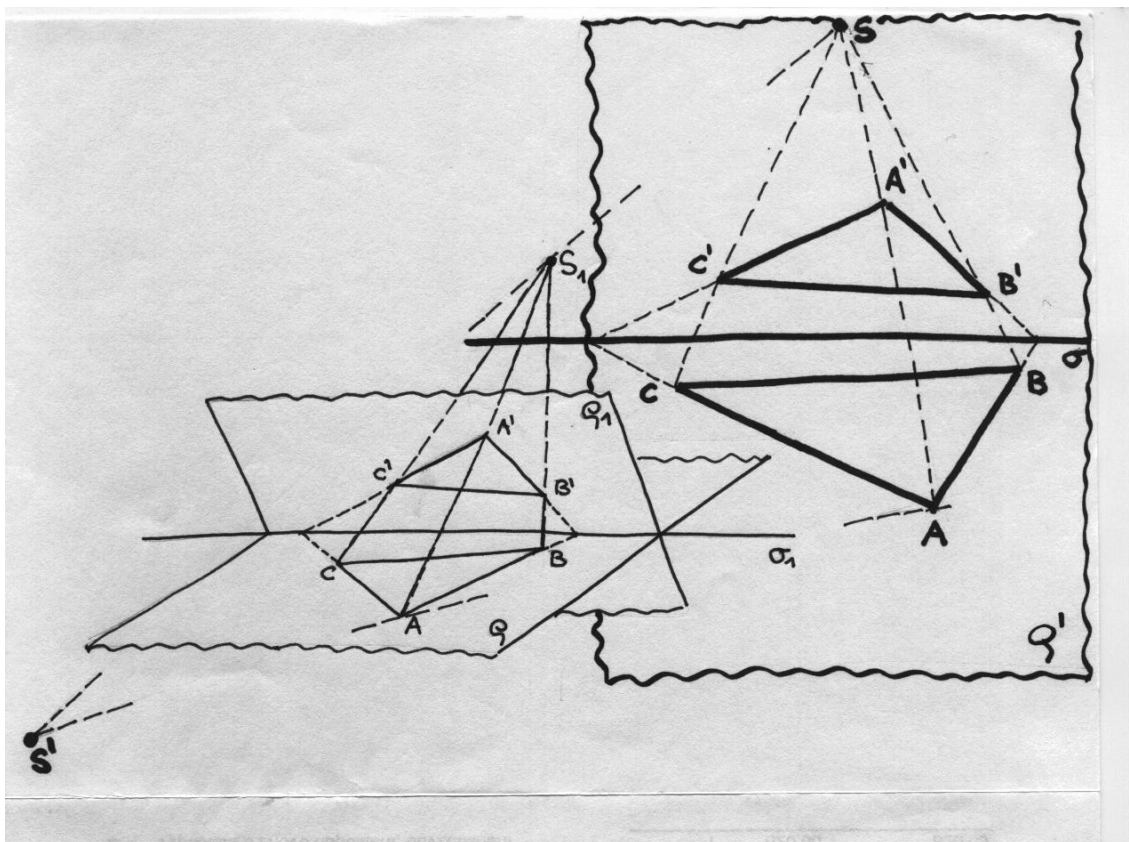


6 Středová kolineace

Jak naznačuje Obr. 34, středová kolineace (se středem S), jako vzájemně jednoznačné zobrazení \bar{E}_2 na sebe, je výsledkem středového průmětu (se středem S') středového promítání (se středem S_1) mezi dvěma různoběžnými rovinami v prostoru E_3 .



Obrázek 34: Vznik středové kolineace

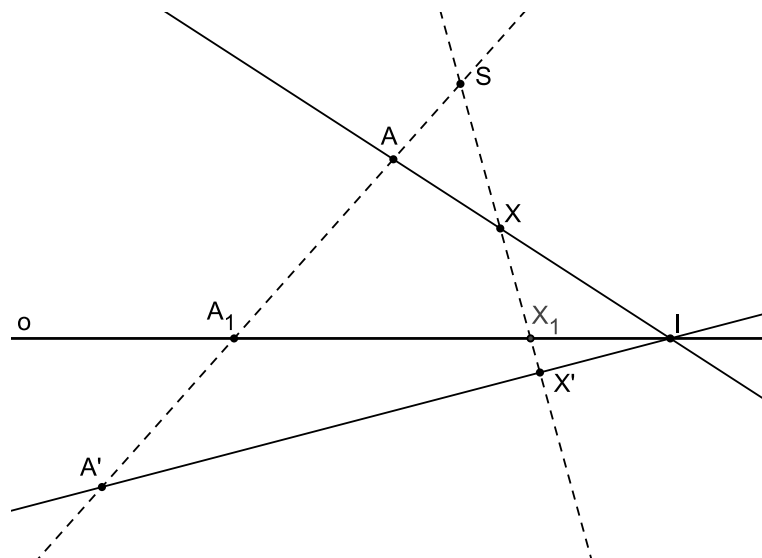
Definice 9 (Středová kolineace). *Středovou kolineací (též perspektivní kolineací, osovou kolineací či homologií) rozumíme vzájemně jednoznačné zobrazení roviny \bar{E}_2 těchto vlastností (viz Obr. 35):*

1. *Spojnice odpovídajících si bodů procházejí pevným bodem - středem kolineace.*
2. *Průsečík odpovídajících si přímek leží na pevné přímce - ose kolineace.*
3. *Incidence se zachovává.*

Poznámka. Tři kolineární body (tj. tři body na přímce) přejdou tímto zobrazením opět v body kolineární - proto KOLINEACE.

Poznámka. Středová kolineace je určena:

- osou o (samodružná přímka)
- středem S (samodružný bod)
- dvojicí odpovídajících si bodů A, A' ; $S \in AA'$ nebo přímek p, p' ; $S \notin p, p'$.



Obrázek 35: Zobrazení bodu ve středové kolineaci se středem S a s osou o

PŘÍKLAD 6.1. Ve středové kolineaci určené osou o , středem S a dvojicí bodů A, A' sestrojte:

- obraz bodu X ,
- obraz přímky p .

PŘÍKLAD 6.2. Ve středové kolineaci určené středem, osou a jedním párem odpovídajících si přímek sestrojte:

- obraz bodu B ,
- obraz přímky m .

Věta 15. Střed a každý bod osy kolineace jsou jejími samodružnými body. Osa kolineace a každá přímka procházející jejím středem jsou samodružné přímky.

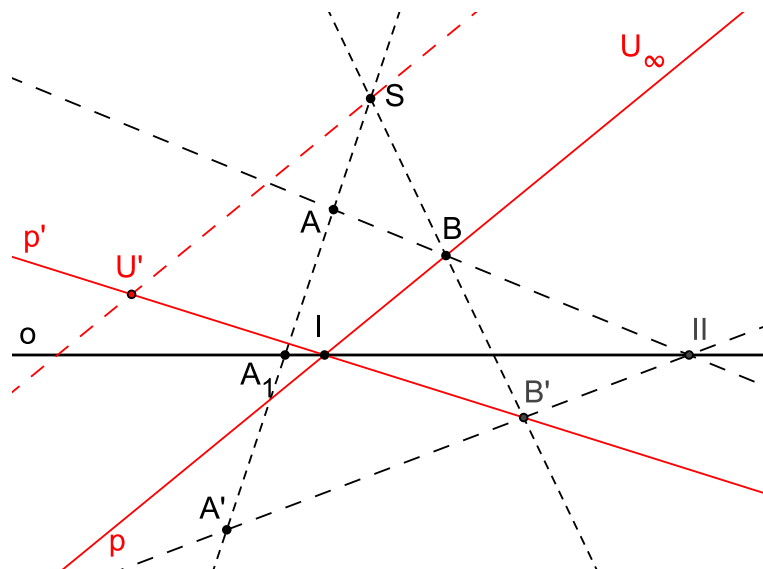
Věta 16. Kolineace je určena, je-li dán její střed, osa a jeden pár odpovídajících si bodů nebo přímek, jež nejsou incidentní ani se středem, ani s osou kolineace.

Charakteristika kolineace

$$(SA_1AA') = (SB_1BB') = \lambda$$

PŘÍKLAD 6.3. Středová kolineace je určena středem, osou a dvojicí sobě odpovídajících bodů. Sestrojte obraz nevlastního bodu U_∞ přímky p .

Řešení: Viz Obr. 36.



Obrázek 36: Zobrazení nevlastního bodu přímky p ve středové kolineaci se středem S a s osou o

Úběžník a úběžnice

- Úběžník je bod, který je v dané kolineaci obrazem nevlastního bodu (viz bod U' na Obr. 36).
- Úběžnice je přímka, která je obrazem nevlastní přímky.

PŘÍKLAD 6.4. *Úběžnice je rovnoběžná s osou kolineace. Dokažte.*

Řešení: Důkaz založíme na skutečnosti, že osa kolineace je přímkou samodružných bodů. Protože úběžnice je obrazem nevlastní přímky, nemůže mít s osou kolineace jiný společný bod než bod nevlastní.

PŘÍKLAD 6.5. *Sestrojte úběžnici v kolineaci dané středem, osou a*

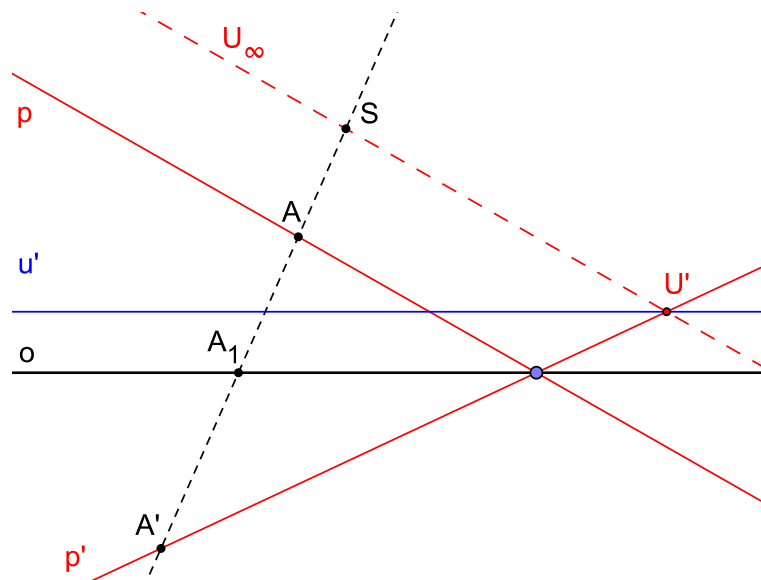
- párem odpovídajících si bodů,*
- párem odpovídajících si přímek.*

Řešení: Řešení ad a) viz Obr. 37

PŘÍKLAD 6.6. *Ve středové kolineaci najděte alespoň jeden bod V , jehož obrazem je nevlastní bod.*

Věta 17. *V kolineaci existují dvě úběžnice (1. a 2. úběžnice nebo úběžnice a protiúběžnice). Vzdálenost středu kolineace od jedné z nich je rovna vzdálenosti osy kolineace od druhé z nich; přitom buď obě tyto úběžnice leží mezi středem a osou kolineace, nebo střed a osa kolineace leží mezi těmito úběžnicemi.*

Věta 18. *Kolineace je určena středem, osou a jednou úběžnicí.*



Obrázek 37: Zobrazení úběžnice u' ve středové kolineaci se středem S a s osou o

PŘÍKLAD 6.7. *Ve středové kolineaci určené středem S , osou o a úběžnicí u sestrojte obraz bodu A .*

Věta 19. *Dvojpoměr se kolineací zachovává.*

PŘÍKLAD 6.8. *Střed úsečky se kolineací většinou nezachovává. Ukažte.*

PŘÍKLAD 6.9. *Středová kolineace je dána středem S , osou o a dvojicí bodů B, B_∞ . Najděte obraz bodu A .*

6.1 Kolineace kružnice a kuželosečky

Kuželosečce odpovídá v kolineaci zase kuželosečka. Obrazem kružnice v kolineaci tak může být elipsa, parabola nebo hyperbola. Na čem to závisí?

PŘÍKLAD 6.10. *Sestrojte elipsu, která odpovídá kružnici k v kolineaci dané osou, středem a úběžnicí.*

Při konstrukci obrazu kuželosečky v kolineaci využíváme následující vlastnosti:

1. Tečna kuželosečky k přejde kolineací v tečnu kuželosečky k' .
2. Dvojpoměr se kolineací zachovává.
3. Přímkám rovnoběžným s osou kolineace odpovídají přímky téhož směru.
4. Kuželosečky k, k' odpovídající si v kolineaci mají společné průsečíky s osou kolineace a společné tečny vedené k nim ze středu kolineace.

5. Polární vlastnosti kuželoseček:

- Je-li přímka p polárou bodu P vzhledem ke kuželosečce k , pak body dotyku T_1, T_2 tečen kuželosečky k z bodu P jsou průsečíky p s k .
- Bod P indukuje na kuželosečce involuci.
- Dva body, z nichž každý leží na poláře toho druhého vzhledem k téže kuželosečce, se nazývají sdužené póly.

6. Průměr kuželosečky

- každá vlastní přímka, jejíž pól je bod nevlastní
- spojnice bodu dotyku dvou rovnoběžných tečen kuželosečky (kromě paraboly)
- spojnice průsečíku dvou tečen kuželosečky se středem úsečky určené body dotyku těchto tečen s kuželosečkou
- spojnice středu dvou rovnoběžných tětiv
- každá přímka procházející středem kuželosečky (středové)

7. Střed kuželosečky

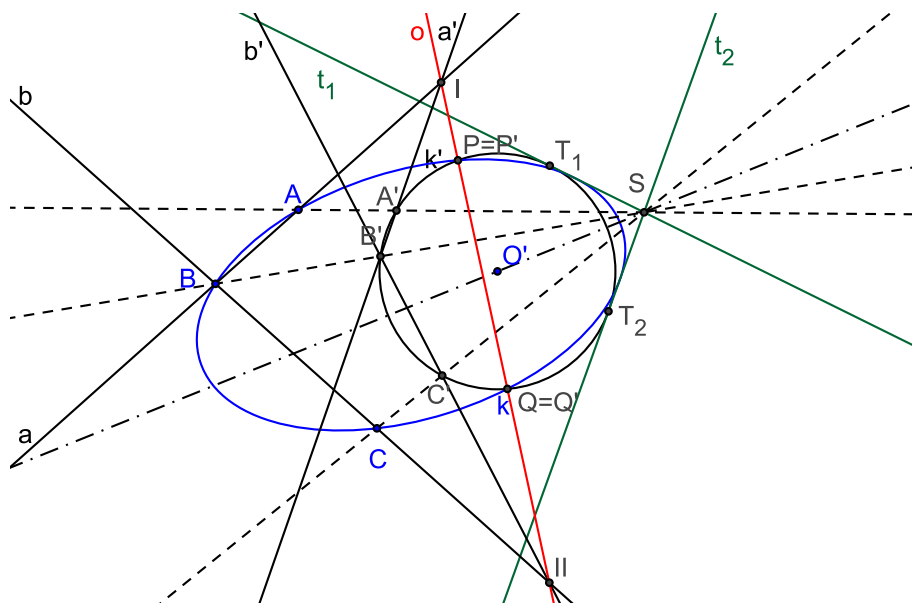
- Pro středové kuželosečky (elipsa, hyperbola) je to pól nevlastní přímky. Pól nevlastní přímky vzhledem k parabole je bod dotyku nevlastní přímky s parabolou.

PŘÍKLAD 6.11. Sestrojte parabolou, která odpovídá kružnici k v dané kolíneaci.

PŘÍKLAD 6.12. Sestrojte hyperbolu, která odpovídá kružnici k v dané kolíneaci.

PŘÍKLAD 6.13. Sestrojte kuželosečku, znáte-li tři její body a dvě tečny.

Řešení: Viz Obr. 38



Obrázek 38: Konstrukce kuželosečky (elipsy) z daných 3 bodů a 2 tečen

PŘÍKLAD 6.14. Středová kolíneace v \overline{E}_2 je dána osou $o: y = 0$, středem $S = \langle 1, 0, a \rangle$ a dvojicí bodů $B = \langle 1, 0, b \rangle$, $B'_\infty = \langle 0, 0, b' \rangle$. Volte hodnoty parametrů a, b, r tak, aby obrazem kružnice $x^2 + y^2 = r^2$ byla postupně **parabola, hyperbola a elipsa**. Sestrojte.