5 Afinita

Afinita je stručný název pro *afinní transformaci prostoru* A_n.

Definice 15. *Vzájemně jednoznačné*[6] *afinní zobrazení afinního prostoru* A_n *na sebe nazýváme „afinitou" prostoru* A_n *nebo „afinní transformací prostoru* A_n*".*

Afinita se tedy afinní zobrazení, které se uskutečňuje v rámci jednoho bodového prostoru A_n, do něhož patří obrazy i vzory.

Afinita má stejné analytické vyjádření jako obecné afinní zobrazení, viz (7), (8), (9)[7]. Vzhledem k tomu, že se jedná o vzájemně jednoznačné zobrazení, je akorát matice afinity *čtvercová* a *regulární*. Afinitu tak lze zapsat maticovou rovnicí

$$\mathbf{X}' = A \cdot \mathbf{X} + B, \tag{33}$$

kde A je regulární čtvercová matice $n-$tého řádu a X, B a X' jsou matice typu $(n, 1)$.

PŘÍKLAD 5.1. *Zdůvodněte výše uvedené tvrzení, že matice A afinity je regulární. Vyjděte z toho, že afinita je vzájemně jednoznačným zobrazením.*

Jako příklady si uveďme afinity prostorů A_2 (E_2) a A_3 (E_3).

Každé afinní zobrazení f v rovině A_2, které bodu $X = [x, y]$ přiřazuje obraz $X' = [x', y']$, je možné zapsat rovnicemi

$$\begin{array}{rrcrcrcl} f: & x' & = & a_{11}x & + & a_{12}y & + & b_1 \\ & y' & = & a_{21}x & + & a_{22}y & + & b_2 \end{array} \tag{34}$$

a naopak, každé zobrazení v rovině, které je dáno soustavou rovnic (34), je afinitou v rovině. Soustavu (34) můžeme zapsat také pomocí matic

$$f: \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}. \tag{35}$$

[6]Připomeňme si, že *vzájemně jednoznačným zobrazením* rozumíme zobrazení, které je zároveň *prosté* a *na množinu*.

[7]Afinitu f prostoru A_n chápeme jako speciální případ afinního zobrazení z A_n do A'_m, kde $m = n$. Potom je tato afinita určena rovnicemi

$$f: x'_i = \sum_j^n a_{ij}x_j + b_i, \quad i = 1, ..., n \tag{31}$$

zobrazujícími bod $X = (x_1, ..., x_n)$ do bodu $X' = (x'_1, ..., x'_n)$. Zobrazení φ asociované k f

$$\varphi: u'_i = \sum_j^n a_{ij}u_j, \quad i = 1, ..., n \tag{32}$$

zobrazuje vektor $\vec{u}(u_1, ..., u_n)$ do $\vec{u'}(u'_1, ..., u'_n)$.

A platí to i naopak, afinitou je každé zobrazení, které lze zapsat maticovou rovnicí

$$\mathbf{X}' = A \cdot \mathbf{X} + B,$$

kde $X' = \begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ a $B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$.

Analogické vztahy platí pro afinity v A_3 $(A_4, \ldots, A_n)$. Každé afinní zobrazení f v prostoru A_3 můžeme zapsat soustavou rovnic

$$\begin{aligned} g:\ x_1' &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + b_1 \\ x_2' &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + b_2\ , \\ x_3' &= a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + b_3 \end{aligned} \tag{36}$$

nebo jednou maticovou rovnicí

$$g:\ \begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}. \tag{37}$$

PŘÍKLAD 5.2. *Určete afinitu v rovině A_2, ve které při dané soustavě souřadné se bod $B = [0, 0]$ zobrazuje do bodu $B' = [1, 0]$, bod $C = [1, 0]$ do bodu $C' = [0, 1]$ a bod $D = [0, 1]$ do bodu $D' = [0, 0]$.*

Stejně jako v případě obecného afinního zobrazení, i u afinity řešíme otázku, jakým minimálním počtem bodů, vzorů i obrazů, je v prostoru dané dimenze jednoznačně určena. Zabývá se tím následující věta o určenosti afinity.

Věta 3 (O určenosti afinity prostoru A_n)**.** *Nechť $M_0, M_1, M_2, ..., M_n$ a $M_0', M_1', M_2', ..., M_n'$ jsou dvě skupiny $(n+1)$ lineárně nezávislých bodů afinního prostoru A_n. Pak existuje jediná afinita f prostoru A_n, pro kterou*

$$f(M_i) = M_i', \quad i = 0, 1, ..., n.$$

Jestliže v uvedené větě určíme pomocí dvou jmenovaných skupin lineárně nezávislých bodů dvě afinní souřadnicové soustavy prostoru A, pak tyto soustavy určují příslušnou afinitu f uvažovaného prostoru[8].

[8] Děje se tak v souladu s následující větou:

Věta 4. *Nechť v afinním bodovém prostoru A_n jsou dány dvě afinní souřadnicové soustavy $A_n = \{P; \vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n\}$; $A_n = \{Q; \vec{d}_1, \vec{d}_2, ..., \vec{d}_n\}$. Pak existuje jediná afinita prostoru A_n, pro kterou*

$$f(P) = Q$$

a asociované zobrazení φ

$$\varphi(\vec{e}_i) = \vec{d}_i, \quad i = 1, 2, ..., n.$$

5.1 Příklady afinit

Příkladem afinit, které již známe jsou shodná a podobná zobrazení v rovině[9]. Zde si jenom stručně připomeneme analytická vyjádření těchto zobrazení, abychom si je dali do souvislosti s tím, co jsme si uváděli o rovnicích afinity. Navíc uvedeme ještě rovnice několika vybraných shodností trojrozměrného prostoru.

5.1.1 Shodná zobrazení v E_2

Osová souměrnost

Osová souměrnost $\mathbf{O}(o)$ podle osy o s obecnou rovnicí $o : ax + by + c = 0$:

$$x' = x - \frac{2a}{a^2 + b^2}(ax + by + c)$$
$$y' = y - \frac{2b}{a^2 + b^2}(ax + by + c)$$

PŘÍKLAD 5.3. *Napište rovnice osové souměrnosti v E_2 s osou o totožnou se souřadnicovou osou x (y).*

PŘÍKLAD 5.4. *Napište rovnice souměrnosti podle přímky $o : 2x - 3y + 1 = 0$.*

PŘÍKLAD 5.5. *Napište rovnice osové souměrnosti, zobrazující počátek na bod* $[1, 5]$.

Otočení (rotace)

Otočení (rotace) $\mathbf{R}(S, \alpha)$ se středem $S = [s_1, s_2]$:

$$x' = (x - s_1)\cos\alpha - (y - s_2)\sin\alpha + s_1$$
$$y' = (x - s_1)\sin\alpha + (y - s_2)\cos\alpha + s_2$$

Po úpravě:

$$x' = x\cos\alpha - y\sin\alpha + s_1 - s_1\cos\alpha + s_2\sin\alpha$$
$$y' = x\sin\alpha + y\cos\alpha + s_2 - s_1\sin\alpha - s_2\cos\alpha$$

PŘÍKLAD 5.6. *Napište rovnice otočení kolem počátku o úhel $\alpha = -135°$.*

PŘÍKLAD 5.7. *Napište rovnice otočení se středem $S[1, -2]$ o úhel $\alpha = 60°$.*

[9] Shodnostem a podobnostem v rovině se věnuje předmět *Planimetrie*, viz `http://home.pf.jcu.cz/~hasek/PLA_2017.htm`

Středová souměrnost

Středová souměrnost $\mathbf{S}(S)$ se středem $S = [s_1, s_2]$:

$$x' = -x + 2s_1$$
$$y' = -y + 2s_2$$

PŘÍKLAD 5.8. *Napište rovnice středové souměrnosti* $\mathbf{S}(S)$ *se středem* $S[-2, 3]$.

Posunutí (translace)

Posunutí (translace) $\mathbf{T}(\vec{p})$ určené vektorem $\vec{p} = [p_1, p_2]$:

$$x' = x + p_1$$
$$y' = y + p_2$$

PŘÍKLAD 5.9. *Napište rovnice posunutí, které je určeno vzorem* $A = [-1, 3]$ *a jeho obrazem* $A' = [4, 2]$.

Posunuté zrcadlení

Posunuté zrcadlení s osou v souřadnicové ose x:

$$x' = x + p$$
$$y' = -y$$

5.1.2 Vybrané shodnosti v E_3

Posunutí (translace)

Posunutí určené vektorem $\vec{p} = (p_1, p_2, p_3)$:

$$x' = x + p_1$$
$$y' = y + p_2$$
$$z' = z + p_3.$$

Otočení (rotace)

Otočení o úhel α kolem osy z:

$$x' = x\cos\alpha - y\sin\alpha$$
$$y' = x\sin\alpha + y\cos\alpha$$
$$z' = z.$$

Středová souměrnost

Souměrnost podle počátku $O = (0, 0, 0)$:

$$
\begin{aligned}
x' &= -x \\
y' &= -y \\
z' &= -z.
\end{aligned}
$$

Osová souměrnost

Souměrnost podle osy z:

$$
\begin{aligned}
x' &= -x \\
y' &= -y \\
z' &= z.
\end{aligned}
$$

Rovinová souměrnost

Souměrnost podle roviny (x, y):

$$
\begin{aligned}
x' &= x \\
y' &= y \\
z' &= -z.
\end{aligned}
$$

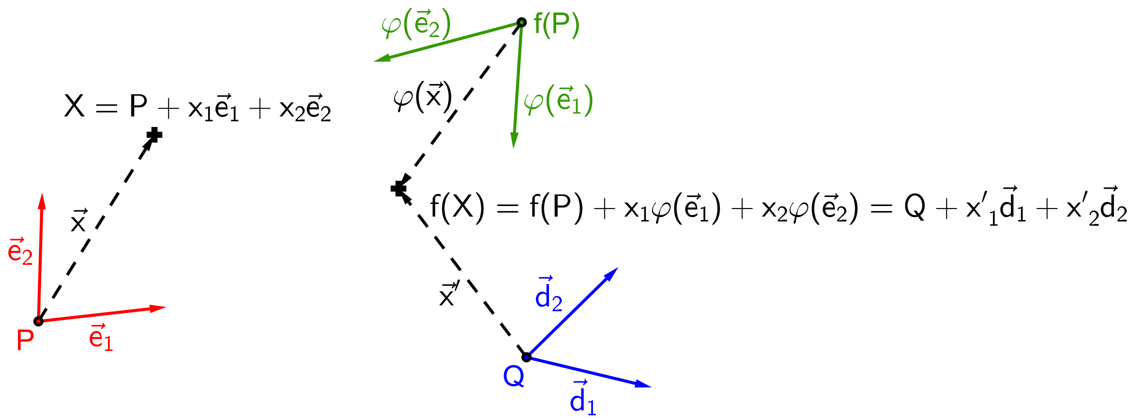
Šroubový pohyb

Šroubový pohyb (torze) s parametrem (redukovanou výškou závitu) v_0 a s osou v ose z:

$$
\begin{aligned}
x' &= x\cos\alpha - y\sin\alpha \\
y' &= x\sin\alpha + y\cos\alpha \\
z' &= z + v_0\alpha.
\end{aligned}
$$

5.2 Odvození rovnic afinity v rovině

Odvodíme si výše uvedené analytické vyjádření (34) afinního zobrazení f roviny na sebe (zkráceně „afinity“ v rovině). Základní myšlenka tohoto odvození je ilustrována Obr. 24. V rovině A_2 máme dvě afinní soustavy souřadnic (repéry), „soustavu vzorů“ $\alpha = \{P; \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ (je určena počátkem P a bází $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ vektorového zaměření prostoru A_2) a „soustavu obrazů“ $\omega = \{Q; \vec{d}_1, \vec{d}_2\}$ (určena počátkem Q a bází $\{\vec{d}_1, \vec{d}_2\}$ vektorového zaměření prostoru A_2). Přitom repér $\{P; \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ se působením uvažované afinity f zobrazí na repér $\{f(P); \varphi(\vec{e}_1), \varphi(\vec{e}_2)\}$, kde φ homomorfismus (lineární zobrazení) asociovaný k f. Obrazem bodu $X = [x_1, x_2]$ je bod $f(X) = X' = [x'_1, x'_2]$. Vztah mezi souřadnicemi $f(X)$ a X najdeme tak, že bod $f(X)$ vyjádříme vzhledem k oběma repérům $\{Q; \vec{d}_1, \vec{d}_2\}$ a $\{f(P); \varphi(\vec{e}_1), \varphi(\vec{e}_2)\}$ (viz Obr. 24) a tato vyjádření porovnáme.



Obrázek 24: Zobrazení bodu X v afinitě f v rovině

Nechť f je afinní zobrazení prostoru A_2 na sebe a φ je homomorfismus asociovaný k f. Potom obrazy $\varphi(\vec{e}_1), \varphi(\vec{e}_2)$ vektorů báze $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ můžeme vyjádřit rovnicemi

$$\varphi(\vec{e}_1) = a_{11}\vec{d}_1 + a_{21}\vec{d}_2, \tag{38}$$

$$\varphi(\vec{e}_2) = a_{12}\vec{d}_1 + a_{22}\vec{d}_2, \tag{39}$$

kde koeficienty a_{ij} jsou souřadnice vektorů $\varphi(\vec{e}_1)$, $\varphi(\vec{e}_2)$ vzhledem k bázi $\{\vec{d}_1, \vec{d}_2\}$ a pro obraz $f(P)$ počátku P repéru α můžeme psát

$$f(P) = Q + b_1\vec{d}_1 + b_2\vec{d}_2, \tag{40}$$

kde $[b_1, b_2]$ jsou jeho souřadnice vzhledem k repéru ω.

Nyní určíme vztah mezi souřadnicemi libovolného bodu $X \in A_2$ a jeho obrazu $X' = f(X) \in A_2$. Nejprve každý z těchto bodů zapíšeme v příslušném repéru, bod

X v repéru α, bod $f(X)$ pak v repéru ω,

$$X = P + x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2, \tag{41}$$

$$f(X) = Q + x'_1\vec{d}_1 + x'_2\vec{d}_2. \tag{42}$$

Potom, s využitím vlastností zobrazení f a φ, zapíšeme obraz bodu X ve tvaru

$$f(X) = f(P + x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2) = f(P) + \varphi(x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2) = f(P) + x_1\varphi(\vec{e}_1) + x_2\varphi(\vec{e}_2).$$

Po dosazení z (38), (39) a (40) dostáváme

$$f(X) = Q + b_1\vec{d}_1 + b_2\vec{d}_2 + x_1(a_{11}\vec{d}_1 + a_{21}\vec{d}_2) + x_2(a_{12}\vec{d}_1 + a_{22}\vec{d}_2).$$

Po úpravě a porovnání koeficientů při $\vec{d}_i$ s vyjádřením (42) dostáváme hledané rovnice afinity f v rovině

$$\begin{aligned} f:\ x'_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + b_1,\\ x'_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + b_2. \end{aligned} \tag{43}$$

Nyní ještě určíme rovnice asociovaného zobrazení φ. Nechť vektor $\vec{u} \in V_2$ se zobrazí do vektoru $\varphi(\vec{u}) \in V_2$. Pro souřadnice vzoru $\vec{u}$ a obrazu $\varphi(\vec{u})$ platí

$$\vec{u} \ = \ u_1\vec{e}_1 + u_2\vec{e}_2, \tag{44}$$

$$\varphi(\vec{u}) \ = \ u'_1\vec{d}_1 + u'_2\vec{d}_2. \tag{45}$$

Na (44) aplikujeme zobrazení φ a upravíme dle (38) a (39). Dostaneme

$$\varphi(\vec{u}) = u_1\varphi(\vec{e}_1) + u_2\varphi(\vec{e}_2) = u_1(a_{11}\vec{d}_1 + a_{21}\vec{d}_2) + u_2(a_{12}\vec{d}_1 + a_{22}\vec{d}_2).$$

Po úpravě a srovnání s (45) dostaneme hledané rovnice asociovaného zobrazení φ:

$$\begin{aligned} \varphi:\ u'_1 &= a_{11}u_1 + a_{12}u_2,\\ u'_2 &= a_{21}u_1 + a_{22}u_2. \end{aligned} \tag{46}$$

Soustavu rovnic afinity v rovině (43) můžeme zapsat také pomocí matic, takto

$$\begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix},$$

stručněji pak ve tvaru

$$\mathbf{X}' = A \cdot \mathbf{X} + B.$$

5.3 Důkaz věty o určenosti afinity v rovině

Věta 5 (O určenosti afinity v rovině)**.** *Nechť K, L, M a K', L', M' jsou dvě skupiny nekolineárních bodů v rovině. Pak existuje jediná afinita f této roviny, která body K, L, M zobrazuje v daném pořadí na body K', L', M'.*

Důkaz. Využijeme (34). Afinita f musí být dána takovýmito rovnicemi. Ukážeme, že za podmínek uvedených ve větě je tato afinita určena jednoznačně, tj. existuje jediná šestice $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, b_1, b_2$, která tuto afinitu specifikuje.

Pro jednotlivé dvojice bodů „vzor → obraz“ dostaneme následující rovnice:

$K[k_1, k_2] \rightarrow K'[k_1', k_2']$:

$$a_{11}k_1 + a_{12}k_2 + b_1 = k_1', \tag{47}$$
$$a_{21}k_1 + a_{22}k_2 + b_2 = k_2'. \tag{48}$$

$L[l_1, l_2] \rightarrow L'[l_1', l_2']$:

$$a_{11}l_1 + a_{12}l_2 + b_1 = l_1', \tag{49}$$
$$a_{21}l_1 + a_{22}l_2 + b_2 = l_2'. \tag{50}$$

$M[m_1, m_2] \rightarrow M'[m_1', m_2']$:

$$a_{11}m_1 + a_{12}m_2 + b_1 = m_1', \tag{51}$$
$$a_{21}m_1 + a_{22}m_2 + b_2 = m_2'. \tag{52}$$

Pro známé souřadnice bodů K, L, M, K', L', M' tak máme soustavu 6 rovnic o 6 neznámých $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, b_1, b_2$. Zajímá nás, za jakých podmínek má jediné řešení. Tyto podmínky by se měly shodovat s obsahem věty 5. Po detailním prozkoumání rovnic (47)–(52) je patrné, že jejich soustava se dá rozdělit na dvě vzájemně nezávislé soustavy 3 rovnic o 3 neznámých: soustavu rovnic (47), (49) a (51) o neznámých a_{11}, a_{12}, b_1 a soustavu rovnic (48), (50) a (52) o neznámých a_{21}, a_{22}, b_2. Přitom první z těchto soustav má rozšířenou matici

$$\left[\begin{array}{ccc|c} k_1 & k_2 & 1 & k_1' \\ l_1 & l_2 & 1 & l_1' \\ m_1 & m_2 & 1 & m_1' \end{array}\right], \tag{53}$$

druhá má potom rozšířenou matici

$$\left[\begin{array}{ccc|c} k_1 & k_2 & 1 & k_2' \\ l_1 & l_2 & 1 & l_2' \\ m_1 & m_2 & 1 & m_2' \end{array}\right]. \tag{54}$$

Soustavy se tedy shodují v matici soustavy (liší se pouze vektory pravých stran). Aby měly obě soustavy jediné řešení, musí být determinant této matice různý od nuly, tj.

$$\begin{vmatrix} k_1 & k_2 & 1 \\ l_1 & l_2 & 1 \\ m_1 & m_2 & 1 \end{vmatrix} \neq 0. \tag{55}$$

Determinant v (55) snadno spočítáme eliminací jedniček na pozicích $(2,3)$ a $(3,3)$ postupným odečtením prvního řádku od druhého a třetího řádku a následným rozvojem takto upraveného determinantu podle třetího sloupce. Dostaneme tak podmínku

$$\begin{vmatrix} l_1 - k_1 & l_2 - k_2 \\ m_1 - k_1 & m_2 - k_2 \end{vmatrix} \neq 0, \tag{56}$$

která je splněna právě tehdy, když jsou vektory $L - K$ a $M - K$ nezávislé, tj. body K, L, M neleží v přímce.

Teď zbývá dokázat, že když body K, L, M neleží v přímce, ani body K', L', M' nemohou ležet v přímce. Tentokrát využijeme maticovou rovnici afinity $X' = A \cdot X + B$. Pro uvedené dvojice bodů platí:

$$K' = A \cdot K + B, \tag{57}$$

$$L' = A \cdot L + B, \tag{58}$$

$$M' = A \cdot M + B. \tag{59}$$

Důkaz provedeme sporem. Předpokládáme, že K, L, M neleží v přímce a zároveň body K', L', M' leží v přímce. Potom existuje $j \in R$ takové, že $L' - K' = j(M' - K')$. Po dosazení z (57)–(59) a vynásobení obou stran rovnice zleva maticí inverzní k A dostaneme $L - K = j(M - K)$, což je spor s předpokladem nekolineárnosti bodů K, L, M. Body K', L', M' tedy také nemohou ležet v přímce.

□

5.4 Modul afinity

Protože afinita prostoru A_n je zobrazení vzájemně jednoznačné, pro determinant afinity dané rovnicemi (31) platí

$$\delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Tento determinant se nazývá **modulem afinity**. Dá se ukázat, že modul afinity nezávisí na volbě báze uvažovaného prostoru.

Nyní se budeme zabývat vlastností modulu afinity, která je metrická, tj. závislá na existenci skalárního součinu. Proto se v dalším omezíme ve svých úvahách na eukleidovské prostory, přesněji na E_3 a E_2.

PŘÍKLAD 5.10. *Určete afinitu v A_2, je-li obrazem bodu $B = [6; -2]$ bod $B' = [1; 1]$, obrazem vektoru $\vec{u} = (2; 1)$ vektor $\vec{u}' = (4; 2)$ a vektoru $\vec{v} = (-1; 2)$ vektor $\vec{v}' = (-3; 6)$. Porovnejte obsahy trojúhelníků BCD a $B'C'D'$, kde $C = B + \vec{u}$, $D = B + \vec{v}$ a $C' = B' + \vec{u}'$, $D' = B' + \vec{v}'$.*

Věta 6. *Nechť f je afinita v prostoru E_3 (resp. E_2), která má modul δ. Nechť U je měřitelný útvar v E_3 (resp. E_2), který má objem V (resp. obsah V). Nechť obrazem útvaru U v afinitě f je útvar U', který má objem V' (resp. obsah V'). Potom platí*

$$V' = |\delta| \cdot V. \tag{60}$$

Důkaz. Míra měřitelných útvarů v E_3 (resp. E_2) je definována pomocí rovnoběžnostěnů (resp. rovnoběžníků). Proto se v důkazu omezíme na afinní zobrazení rovnoběžnostěnů v E_3 a rovnoběžníků v E_2. Nechť v E_3 je rovnoběžnostěn určen trojicí nezávislých vektorů $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$, které mají ve zvolené bázi souřadnice $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$, $\vec{w} = (w_1, w_2, w_3)$. Obrazy těchto vektorů v zobrazení φ asociovaném k afinitě f označme $\vec{u}' = \varphi(\vec{v})$, $\vec{v}' = \varphi(\vec{v})$, $\vec{w}' = \varphi(\vec{w})$ a jejich souřadnice $\vec{u}' = (u_1', u_2', u_3')$, $\vec{v}' = (v_1', v_2', v_3')$, $\vec{w}' = (w_1', w_2', w_3')$. V afinitě f a zobrazení φ platí dle vztahu (32)

$$u_i' = \sum_{j=1}^{3} a_{ij} u_j, \quad v_i' = \sum_{j=1}^{3} a_{ij} v_j, \quad w_i' = \sum_{j=1}^{3} a_{ij} w_j; \quad i = 1, 2, 3. \tag{61}$$

Objem V' zobrazeného rovnoběžnostěnu U' určíme známým vztahem smíšeného součinu, stejně tak objem V rovnoběžnostěnu U:

$$V' = \begin{vmatrix} u_1' & u_2' & u_3' \\ v_1' & v_2' & v_3' \\ w_1' & w_2' & w_3' \end{vmatrix}, \qquad V = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}. \tag{62}$$

Dosazením (61) dostaneme

$$V' = \begin{vmatrix} \sum\limits_{j=1}^{3} a_{1j} u_j, & \sum\limits_{j=1}^{3} a_{2j} u_j, & \sum\limits_{j=1}^{3} a_{3j} u_j \\ \sum\limits_{j=1}^{3} a_{1j} v_j, & \sum\limits_{j=1}^{3} a_{2j} v_j, & \sum\limits_{j=1}^{3} a_{3j} v_j \\ \sum\limits_{j=1}^{3} a_{1j} w_j, & \sum\limits_{j=1}^{3} a_{2j} w_j, & \sum\limits_{j=1}^{3} a_{3j} w_j \end{vmatrix}, \tag{63}$$

což lze zapsat součinem

$$V' = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} \tag{64}$$

a tedy

$$V' = \delta \cdot V. \tag{65}$$

Pokud je $\delta < 0$, pak lze znaménko minus vytknout, tj. $V' = -\delta \cdot (-V)$. Ve druhém determinantu pak zaměníme pořadí sousedních řádků, např. prvního a druhého. Pro obsahy vzoru a obrazu měřitelného útvaru v E_2 zřejmě stačí, uvážíme-li obsah V libovolně zvoleného rovnoběžníka určeného lineárně nezávislými body M, N, P a jeho obrazu v dané afinitě určeného body M', N', P'. □

5.5 Afinita přímá a nepřímá, ekviafinita

Definice 16. *Je-li modul afinity kladný, nazývá se „afinita přímá“. Afinita se záporným modulem se nazývá „nepřímá“. Afinita, jejíž modul se rovná v absolutní hodnotě jedné, se nazývá ekviafinní afinita, stručně „ekviafinita“.*

PŘÍKLAD 5.11. *Určete rovnice a modul afinity $f : E_3 \to E_3$, v níž se body $K[0,0,0]$, $L[1,4,0]$, $M[-1,0,6]$, $N[4,5,8]$ zobrazí na body $K'[1,1,1]$, $L'[-2,9,6]$, $M'[0,-5,12]$, $N'[0,3,26]$. Rozhodněte, zda se jedná o afinitu přímou či nepřímou a zda je to ekviafinita.*

Řešení v programu wxMaxima:

```
(%i25) r1:b1=1; r2:b2=1; r3:b3=1; r4:a11+4*a12+b1=-2; r5:a21+4*a22+b2=9;
       r6:a31+4*a32+b3=6; r7:-a11+6*a13+b1=0; r8:-a21+6*a23+b2=-5;
       r9:-a31+6*a33+b3=12; r10:4*a11+5*a12+8*a13+b1=0;
       r11:4*a21+5*a22+8*a23+b2=3; r12:4*a31+5*a32+8*a33+b3=26;
```

(%o25) $b1 = 1$

(%o26) $b2 = 1$

(%o27) $b3 = 1$

(%o28) $b1 + 4\,a12 + a11 = -2$

(%o29) $b2 + 4\,a22 + a21 = 9$

(%o30) $b3 + 4\,a32 + a31 = 6$

(%o31) $b1 + 6\,a13 - a11 = 0$

(%o32) $b2+6\,a23-a21=-5$

(%o33) $b3+6\,a33-a31=12$

(%o34) $b1+8\,a13+5\,a12+4\,a11=0$

(%o35) $b2+8\,a23+5\,a22+4\,a21=3$

(%o36) $b3+8\,a33+5\,a32+4\,a31=26$

```
(%i37) res:solve([r1,r2,r3,r4,r5,r6,r7,r8,r9,r10,r11,r12],
       [a11,a12,a13,a21,a22,a23,a31,a32,a33,b1,b2,b3])[1];
```

(%o37) $[a11=1, a12=-1, a13=0, a21=0, a22=2, a23=-1, a31=1, a32=1, a33=2, b1=1, b2=1, b3=1]$

```
(%i38) ev([x1=a11*x+a12*y+a13*z+b1,y1=a21*x+a22*y+a23*z+b2,
       z1=a31*x+a32*y+a33*z+b3],res);
```

(%o38) $[x1=-y+x+1, y1=-z+2\,y+1, z1=2\,z+y+x+1]$

```
(%i40) A:ev(matrix([a11,a12,a13],[a21,a22,a23],[a31,a32,a33]),res);
```

(%o40) $$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

```
(%i42) determinant(A);
```

(%o42) 6

5.6 Cvičení – Afinita

3. Uveďte maticové zápisy následujících transformací:
a) středová souměrnost se středem v počátku,
b) středová souměrnost se středem v bodě $[5, 10]$,
c) osová souměrnost podle souřadnicové osy x,
d) stejnolehlost se středem v počátku soustavy souřadnic a s koeficientem $\kappa = 2$,
e) stejnolehlost se středem v počátku soustavy souřadnic a s koeficientem $\kappa = \frac{-1}{2}$.

Využijte applet na GeoGebraTube: tube.geogebra.org/student/mUcqvE9uT