

8 Afinita

Afinita je stručný název pro *afinní transformaci prostoru*, tj. *vzájemně jednoznačné afinní zobrazení bodového prostoru A_n na sebe*.

Poznámka. „Vzájemně jednoznačným zobrazením“ rozumíme zobrazení, které je zároveň „prosté“ a „na množinu“.

Afinita má stejné analytické vyjádření jako obecné afinní zobrazení, viz (16), (17) nebo (18). Vzhledem k tomu, že se jedná o vzájemně jednoznačné zobrazení, je akorát matice afinity čtvercová a regulární. Afinitu tak lze zapsat maticovou rovnicí

$$\mathbf{X}' = A \cdot \mathbf{X} + B, \quad (24)$$

kde A je regulární čtvercová matice n -tého řádu a X, B a X' jsou matice typu $(n, 1)$. Jako příklady si uveďme afinity prostorů A_2 a A_3 .

Každé afinní zobrazení f afinní roviny A_2 do sebe je vzhledem k libovolně zvolené lineární soustavě souřadnic dáno rovnicemi:

$$\begin{aligned} f : x' &= a_{11}x + a_{12}y + b_1 \\ y' &= a_{21}x + a_{22}y + b_2 \end{aligned} \quad (25)$$

které můžeme zapsat jednou maticovou rovnicí ve tvaru

$$f : \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}. \quad (26)$$

Každé afinní zobrazení f v prostoru A_3 můžeme zapsat soustavou rovnic

$$\begin{aligned} g : x'_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + b_1 \\ x'_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + b_2, \\ x'_3 &= a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + b_3 \end{aligned} \quad (27)$$

nebo jednou maticovou rovnicí

$$g : \begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}. \quad (28)$$

PŘÍKLAD 8.1. *Zdůvodněte, proč ze skutečnosti, že afinita je vzájemně jednoznačným zobrazením, vyplývá, že její matice je regulární.*

8.1 Afinita v rovině

Budeme uvažovat speciální případ afinního zobrazení, kdy prostory A_n a A'_m splynou. Půjde nám tak o vzájemně jednoznačné zobrazení prostoru A_n (v našem případě E_2) na sebe.

Definice 21. *Vzájemně jednoznačné afinní zobrazení afinního prostoru E_2 na sebe nazýváme „afinitou“ prostoru E_2 nebo „afinní transformací prostoru E_2 .“*

Poznámka. Množina afinit v rovině spolu s operací skládání geometrických zobrazení tvoří grupu, tzv. „afinní grupu roviny“. Obecné formulaci této skutečnosti je věnována věta 42 na str. 54.

8.2 Rovnice afinity v rovině

Každé afinní zobrazení f v rovině E_2 , které bodu $X = [x, y]$ přiřazuje obraz $X' = [x', y']$, je možné zapsat rovnicemi

$$\begin{aligned} f : x' &= a_{11}x + a_{12}y + b_1 \\ y' &= a_{21}x + a_{22}y + b_2 \end{aligned} \quad (29)$$

a naopak, každé zobrazení v rovině, které je dáno soustavou rovnic (29), je afinitou v rovině. Soustavu (29) můžeme zapsat také pomocí matic

$$\begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}. \quad (30)$$

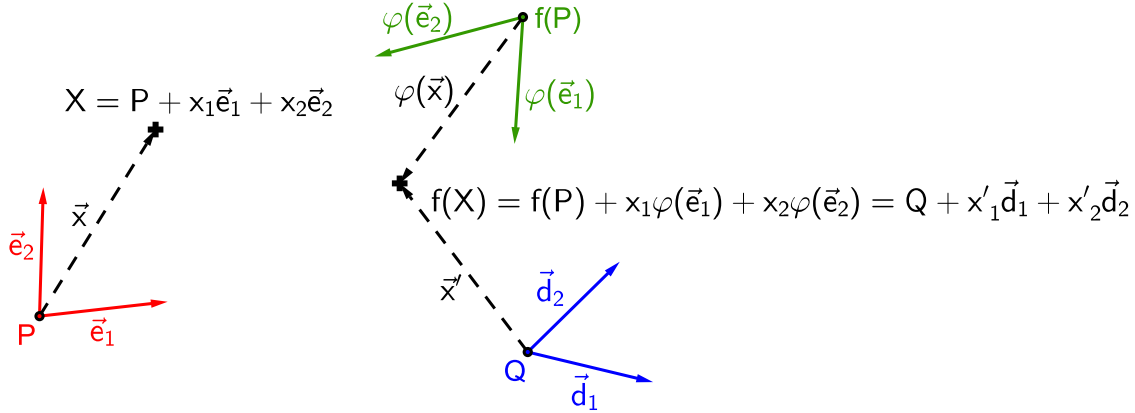
Potom řekneme, že afinitou je každé zobrazení, které lze zapsat maticovou rovnicí

$$\mathbf{X}' = A \cdot \mathbf{X} + B,$$

kde $X' = \begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ a $B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$.

Odvodíme si výše uvedené analytické vyjádření (29) afinního zobrazení f roviny na sebe (zkráceně „afinity“ v rovině). Základní myšlenka tohoto odvození je ilustrována Obr. 28. V rovině A_2 máme dvě afinní soustavy souřadnic (repéry), „soustavu vzorů“ $\alpha = \{P; \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ (je určena počátkem P a bází $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ vektorového zaměření prostoru A_2) a „soustavu obrazů“ $\omega = \{Q; \vec{d}_1, \vec{d}_2\}$ (určena počátkem Q a bází $\{\vec{d}_1, \vec{d}_2\}$ vektorového zaměření prostoru A_2). Přitom repér $\{P; \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ se působením uvažované

afinity f zobrazí na repér $\{f(P); \varphi(\vec{e}_1), \varphi(\vec{e}_2)\}$, kde φ homomorfismus (lineární zobrazení) asociovaný k f . Obrazem bodu $X = [x_1, x_2]$ je bod $f(X) = X' = [x'_1, x'_2]$. Vztah mezi souřadnicemi $f(X)$ a X najdeme tak, že bod $f(X)$ vyjádříme vzhledem k oběma repérům $\{Q; \vec{d}_1, \vec{d}_2\}$ a $\{f(P); \varphi(\vec{e}_1), \varphi(\vec{e}_2)\}$ (viz Obr. 28) a tato vyjádření porovnáme.



Obrázek 28: Zobrazení bodu X v afinitě f v rovině

Nechť f je afinní zobrazení prostoru A_2 na sebe a φ je homomorfismus asociovaný k f . Potom obrazy $\varphi(\vec{e}_1), \varphi(\vec{e}_2)$ vektorů báze $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ můžeme vyjádřit rovnicemi

$$\varphi(\vec{e}_1) = a_{11}\vec{d}_1 + a_{21}\vec{d}_2, \quad (31)$$

$$\varphi(\vec{e}_2) = a_{12}\vec{d}_1 + a_{22}\vec{d}_2, \quad (32)$$

kde koeficienty a_{ij} jsou souřadnice vektorů $\varphi(\vec{e}_1), \varphi(\vec{e}_2)$ vzhledem k bázi $\{\vec{d}_1, \vec{d}_2\}$ a pro obraz $f(P)$ počátku P repéru α můžeme psát

$$f(P) = Q + b_1\vec{d}_1 + b_2\vec{d}_2, \quad (33)$$

kde $[b_1, b_2]$ jsou jeho souřadnice vzhledem k repéru ω .

Nyní určíme vztah mezi souřadnicemi libovolného bodu $X \in A_2$ a jeho obrazu $X' = f(X) \in A_2$. Nejprve každý z těchto bodů zapíšeme v příslušném repéru, bod X v repéru α , bod $f(X)$ pak v repéru ω ,

$$X = P + x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2, \quad (34)$$

$$f(X) = Q + x'_1\vec{d}_1 + x'_2\vec{d}_2. \quad (35)$$

Potom, s využitím vlastností zobrazení f a φ , zapíšeme obraz bodu X ve tvaru

$$f(X) = f(P + x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2) = f(P) + \varphi(x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2) = f(P) + x_1\varphi(\vec{e}_1) + x_2\varphi(\vec{e}_2).$$

Po dosazení z (31), (32) a (33) dostáváme

$$f(X) = Q + b_1\vec{d}_1 + b_2\vec{d}_2 + x_1(a_{11}\vec{d}_1 + a_{21}\vec{d}_2) + x_2(a_{12}\vec{d}_1 + a_{22}\vec{d}_2).$$

Po úpravě a porovnání koeficientů při \vec{d}_i s vyjádřením (35) dostáváme hledané rovnice afinity f v rovině

$$\begin{aligned} f : x'_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + b_1, \\ x'_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + b_2. \end{aligned} \quad (36)$$

Nyní ještě určíme rovnice asociovaného zobrazení φ . Nechť vektor $\vec{u} \in V_2$ se zobrazí do vektoru $\varphi(\vec{u}) \in V_2$. Pro souřadnice vektoru \vec{u} a obrazu $\varphi(\vec{u})$ platí

$$\vec{u} = u_1\vec{e}_1 + u_2\vec{e}_2, \quad (37)$$

$$\varphi(\vec{u}) = u'_1\vec{d}_1 + u'_2\vec{d}_2. \quad (38)$$

Na (37) aplikujeme zobrazení φ a upravíme dle (31) a (32). Dostaneme

$$\varphi(\vec{u}) = u_1\varphi(\vec{e}_1) + u_2\varphi(\vec{e}_2) = u_1(a_{11}\vec{d}_1 + a_{21}\vec{d}_2) + u_2(a_{12}\vec{d}_1 + a_{22}\vec{d}_2).$$

Po úpravě a srovnání s (38) dostaneme hledané rovnice asociovaného zobrazení φ :

$$\begin{aligned} \varphi : u'_1 &= a_{11}u_1 + a_{12}u_2, \\ u'_2 &= a_{21}u_1 + a_{22}u_2. \end{aligned} \quad (39)$$

Soustavu rovnic afinity v rovině (36) můžeme zapsat také pomocí matic, takto

$$\begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix},$$

stručněji pak ve tvaru

$$\mathbf{X}' = A \cdot \mathbf{X} + B.$$

8.3 Věta o určenosti afinity v rovině

Věta 36 (O určenosti afinity v rovině). *Nechť K, L, M a K', L', M' jsou dvě skupiny nekolineárních bodů v rovině. Pak existuje jediná afinita f této roviny, která body K, L, M zobrazuje v daném pořadí na body K', L', M' .*

Důkaz. Využijeme (29). Afinita f musí být dána takovýmito rovnicemi. Ukážeme, že za podmínek uvedených ve větě je tato afinita určena jednoznačně, tj. existuje jediná šestice $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, b_1, b_2$, která tuto afinitu specifikuje.

Pro jednotlivé dvojice bodů „vzor \rightarrow obraz“ dostaneme následující rovnice:

$K[k_1, k_2] \rightarrow K'[k'_1, k'_2]$:

$$a_{11}k_1 + a_{12}k_2 + b_1 = k'_1, \quad (40)$$

$$a_{21}k_1 + a_{22}k_2 + b_2 = k'_2. \quad (41)$$

$L[l_1, l_2] \rightarrow L'[l'_1, l'_2]$:

$$a_{11}l_1 + a_{12}l_2 + b_1 = l'_1, \quad (42)$$

$$a_{21}l_1 + a_{22}l_2 + b_2 = l'_2. \quad (43)$$

$M[m_1, m_2] \rightarrow M'[m'_1, m'_2]$:

$$a_{11}m_1 + a_{12}m_2 + b_1 = m'_1, \quad (44)$$

$$a_{21}m_1 + a_{22}m_2 + b_2 = m'_2. \quad (45)$$

Pro známé souřadnice bodů K, L, M, K', L', M' tak máme soustavu 6 rovnic o 6 neznámých $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, b_1, b_2$. Zajímá nás, za jakých podmínek má jediné řešení. Tyto podmínky by se měly shodovat s obsahem věty 36. Po detailním prozkoumání rovnic (40)–(45) je patrné, že jejich soustava se dá rozdělit na dvě vzájemně nezávislé soustavy 3 rovnic o 3 neznámých: soustavu rovnic (40), (42) a (44) o neznámých a_{11}, a_{12}, b_1 a soustavu rovnic (41), (43) a (45) o neznámých a_{21}, a_{22}, b_2 . Přitom první z těchto soustav má rozšířenou matici

$$\left[\begin{array}{ccc|c} k_1 & k_2 & 1 & k'_1 \\ l_1 & l_2 & 1 & l'_1 \\ m_1 & m_2 & 1 & m'_1 \end{array} \right], \quad (46)$$

druhá má potom rozšířenou matici

$$\left[\begin{array}{ccc|c} k_1 & k_2 & 1 & k'_2 \\ l_1 & l_2 & 1 & l'_2 \\ m_1 & m_2 & 1 & m'_2 \end{array} \right]. \quad (47)$$

Soustavy se tedy shodují v matici soustavy (liší se pouze vektory pravých stran). Aby měly obě soustavy jediné řešení, musí být determinant této matice různý od nuly, tj.

$$\left| \begin{array}{ccc} k_1 & k_2 & 1 \\ l_1 & l_2 & 1 \\ m_1 & m_2 & 1 \end{array} \right| \neq 0. \quad (48)$$

Determinant v (48) snadno spočítáme eliminací jedniček na pozicích (2, 3) a (3, 3) postupným odečtením prvního řádku od druhého a třetího řádku a následným rozvojem takto upraveného determinantu podle třetího sloupce. Dostaneme tak podmínku

$$\begin{vmatrix} l_1 - k_1 & l_2 - k_2 \\ m_1 - k_1 & m_2 - k_2 \end{vmatrix} \neq 0, \quad (49)$$

kteřá je splněna právě tehdy, když jsou vektory $L - K$ a $M - K$ nezávislé, tj. body K, L, M neleží v přímce.

Teď zbývá dokázat, že když body K, L, M neleží v přímce, ani body K', L', M' nemohou ležet v přímce. Tentokrát využijeme maticovou rovnici afinity $X' = A \cdot X + B$. Pro uvedené dvojice bodů platí:

$$K' = A \cdot K + B, \quad (50)$$

$$L' = A \cdot L + B, \quad (51)$$

$$M' = A \cdot M + B. \quad (52)$$

Důkaz provedeme sporem. Předpokládáme, že K, L, M neleží v přímce a zároveň body K', L', M' leží v přímce. Potom existuje $j \in R$ takové, že $L' - K' = j(M' - K')$. Po dosazení z (50)–(52) a vynásobení obou stran rovnice zleva maticí inverzní k A dostaneme $L - K = j(M - K)$, což je spor s předpokladem nekolineárnosti bodů K, L, M . Body K', L', M' tedy také nemohou ležet v přímce. □

8.4 Afinita prostoru A_n

Definice 22. *Vzájemně jednoznačné afinní zobrazení afinního prostoru A_n na sebe nazýváme „afinitou“ prostoru A_n nebo „afinní transformací prostoru A_n “.*

Věta 37 (O určenosti). *Nechť $M_0, M_1, M_2, \dots, M_n$ a $M'_0, M'_1, M'_2, \dots, M'_n$ jsou dvě skupiny $(n + 1)$ lineárně nezávislých bodů afinního prostoru A_n . Pak existuje jediná afinita f prostoru A_n , pro kterou*

$$f(M_i) = M'_i, \quad i = 0, 1, \dots, n.$$

Jestliže v uvedené větě určíme pomocí dvou jmenovaných skupin lineárně nezávislých bodů dvě afinní souřadnicové soustavy prostoru A , pak tyto soustavy určují příslušnou afinitu f uvažovaného prostoru.

Věta 38. *Nechť v afinním bodovém prostoru A_n jsou dány dvě afinní souřadnicové soustavy $A_n = \{P; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$; $A_n = \{Q; \vec{d}_1, \vec{d}_2, \dots, \vec{d}_n\}$. Pak existuje jediná afinita prostoru A_n , pro kterou*

$$f(P) = Q$$

a asociované zobrazení φ

$$\varphi(\vec{e}_i) = \vec{d}_i, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

8.5 Rovnice afinity prostoru A_n

Afinitu prostoru A_n chápeme jako speciální případ afinního zobrazení z A_n do A'_m , kde $m = n$. Potom je tato afinita určena rovnicemi

$$x'_i = \sum_j^n a_{ij}x_j + b_i, \quad i = 1, \dots, n \quad (53)$$

zobrazujícími bod $X = (x_1, \dots, x_n)$ do bodu $X' = (x'_1, \dots, x'_n)$. Zobrazení asociované

$$u'_i = \sum_j^n a_{ij}u_j, \quad i = 1, \dots, n \quad (54)$$

zobrazuje vektor $\vec{u}(u_1, \dots, u_n)$ do $\vec{u}'(u'_1, \dots, u'_n)$.

PŘÍKLAD 8.2. *Určete afinitu v rovině A_2 , ve které při dané soustavě souřadné se bod $B = [0, 0]$ zobrazuje do bodu $B' = [1, 0]$, bod $C = [1, 0]$ do bodu $C' = [0, 1]$ a bod $D = [0, 1]$ do bodu $D' = [0, 0]$.*

8.6 Modul afinity

Protože afinita prostoru A_n je zobrazení vzájemně jednoznačné, pro determinant afinity dané rovnicemi (53) platí

$$\delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Tento determinant se nazývá **modulem afinity**. Dá se ukázat, že modul afinity nezávisí na volbě báze uvažovaného prostoru.

Nyní se budeme zabývat vlastností modulu afinity, která je metrická, tj. závislá na existenci skalárního součinu. Proto se v dalším omezíme ve svých úvahách na eukleidovské prostory, přesněji na E_3 a E_2 .

PŘÍKLAD 8.3. Určete afinitu v A_2 , je-li obrazem bodu $B = [6; -2]$ bod $B' = [1; 1]$, obrazem vektoru $\vec{u} = (2; 1)$ vektor $\vec{u}' = (4; 2)$ a vektoru $\vec{v} = (-1; 2)$ vektor $\vec{v}' = (-3; 6)$. Porovnejte obsahy trojúhelníků BCD a $B'C'D'$, kde $C = B + \vec{u}$, $D = B + \vec{v}$ a $C' = B' + \vec{u}'$, $D' = B' + \vec{v}'$.

Věta 39. Nechť f je afinita v prostoru E_3 (resp. E_2), která má modul δ . Nechť U je měřitelný útvar v E_3 (resp. E_2), který má objem V (resp. obsah V). Nechť obrazem útvaru U v afinitě f je útvar U' , který má objem V' (resp. obsah V'). Potom platí

$$V' = |\delta| \cdot V. \quad (55)$$

Důkaz. Míra měřitelných útvarů v E_3 (resp. E_2) je definována pomocí rovnoběžnostěn (resp. rovnoběžníků). Proto se v důkazu omezíme na afinní zobrazení rovnoběžnostěn v E_3 a rovnoběžníků v E_2 . Nechť v E_3 je rovnoběžnostěn určen trojicí nezávislých vektorů $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$, které mají ve zvolené bázi souřadnice $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$, $\vec{w} = (w_1, w_2, w_3)$. Obrazy těchto vektorů v zobrazení φ asociovaném k afinitě f označme $\vec{u}' = \varphi(\vec{u})$, $\vec{v}' = \varphi(\vec{v})$, $\vec{w}' = \varphi(\vec{w})$ a jejich souřadnice $\vec{u}' = (u'_1, u'_2, u'_3)$, $\vec{v}' = (v'_1, v'_2, v'_3)$, $\vec{w}' = (w'_1, w'_2, w'_3)$. V afinitě f a zobrazení φ platí dle vztahu (54)

$$u'_i = \sum_{j=1}^3 a_{ij}u_j, \quad v'_i = \sum_{j=1}^3 a_{ij}v_j, \quad w'_i = \sum_{j=1}^3 a_{ij}w_j; \quad i = 1, 2, 3. \quad (56)$$

Objem V' zobrazeného rovnoběžnostěnu U' určíme známým vztahem smíšeného součinu, stejně tak objem V rovnoběžnostěnu U :

$$V' = \begin{vmatrix} u'_1 & u'_2 & u'_3 \\ v'_1 & v'_2 & v'_3 \\ w'_1 & w'_2 & w'_3 \end{vmatrix}, \quad V = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}. \quad (57)$$

Dosazením (56) dostaneme

$$V' = \begin{vmatrix} \sum_{j=1}^3 a_{1j}u_j & \sum_{j=1}^3 a_{2j}u_j & \sum_{j=1}^3 a_{3j}u_j \\ \sum_{j=1}^3 a_{1j}v_j & \sum_{j=1}^3 a_{2j}v_j & \sum_{j=1}^3 a_{3j}v_j \\ \sum_{j=1}^3 a_{1j}w_j & \sum_{j=1}^3 a_{2j}w_j & \sum_{j=1}^3 a_{3j}w_j \end{vmatrix}, \quad (58)$$

což lze zapsat součinem

$$V' = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} \quad (59)$$

a tedy

$$V' = \delta \cdot V. \quad (60)$$

Pokud je $\delta < 0$, pak lze znaménko minus vytknout, tj. $V' = -\delta \cdot (-V)$. Ve druhém determinantu pak zaměníme pořadí sousedních řádků, např. prvního a druhého. Pro obsahy vzoru a obrazu měřitelného útvaru v E_2 zřejmě stačí, uvážíme-li obsah V libovolně zvoleného rovnoběžníka určeného lineárně nezávislými body M, N, P a jeho obrazu v dané afinitě určeného body M', N', P' . \square

8.7 Afinita přímá a nepřímá, ekviafinita

Definice 23. Je-li modul afinity kladný, nazývá se „afinita přímá“. Afinita se záporným modulem se nazývá „nepřímá“. Afinita, jejíž modul se rovná v absolutní hodnotě jedné, se nazývá ekviafinita, stručně „ekviafinita“.

PŘÍKLAD 8.4. Určete rovnice a modul afinity $f : E_3 \rightarrow E_3$, v níž se body $K[0, 0, 0]$, $L[1, 4, 0]$, $M[-1, 0, 6]$, $N[4, 5, 8]$ zobrazí na body $K'[1, 1, 1]$, $L'[-2, 9, 6]$, $M'[0, -5, 12]$, $N'[0, 3, 26]$. Rozhodněte, zda se jedná o afinitu přímou či nepřímou a zda je to ekviafinita.

Řešení v programu wxMaxima:

```
(%i25) r1:b1=1; r2:b2=1; r3:b3=1; r4:a11+4*a12+b1=-2; r5:a21+4*a22+b2=9;
r6:a31+4*a32+b3=6; r7:-a11+6*a13+b1=0; r8:-a21+6*a23+b2=-5;
r9:-a31+6*a33+b3=12; r10:4*a11+5*a12+8*a13+b1=0;
r11:4*a21+5*a22+8*a23+b2=3; r12:4*a31+5*a32+8*a33+b3=26;
```

```
(%o25) b1 = 1
```

```
(%o26) b2 = 1
```

```
(%o27) b3 = 1
```

```
(%o28) b1 + 4 a12 + a11 = -2
```

```
(%o29) b2 + 4 a22 + a21 = 9
```

```
(%o30) b3 + 4 a32 + a31 = 6
```

```
(%o31) b1 + 6 a13 - a11 = 0
```

$$(\%o32) \quad b_2 + 6a_{23} - a_{21} = -5$$

$$(\%o33) \quad b_3 + 6a_{33} - a_{31} = 12$$

$$(\%o34) \quad b_1 + 8a_{13} + 5a_{12} + 4a_{11} = 0$$

$$(\%o35) \quad b_2 + 8a_{23} + 5a_{22} + 4a_{21} = 3$$

$$(\%o36) \quad b_3 + 8a_{33} + 5a_{32} + 4a_{31} = 26$$

```
(%i37) res:solve([r1,r2,r3,r4,r5,r6,r7,r8,r9,r10,r11,r12],  
[a11,a12,a13,a21,a22,a23,a31,a32,a33,b1,b2,b3])[1];
```

$$(\%o37) \quad [a_{11} = 1, a_{12} = -1, a_{13} = 0, a_{21} = 0, a_{22} = 2, a_{23} = -1, a_{31} = 1, a_{32} = 1, a_{33} = 2, b_1 = 1, b_2 = 1, b_3 = 1]$$

```
(%i38) ev([x1=a11*x+a12*y+a13*z+b1,y1=a21*x+a22*y+a23*z+b2,  
z1=a31*x+a32*y+a33*z+b3],res);
```

$$(\%o38) \quad [x_1 = -y + x + 1, y_1 = -z + 2y + 1, z_1 = 2z + y + x + 1]$$

```
(%i40) A:ev(matrix([a11,a12,a13],[a21,a22,a23],[a31,a32,a33]),res);
```

$$(\%o40) \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

```
(%i42) determinant(A);
```

$$(\%o42) \quad 6$$

8.8 Cvičení – Afnita

65. Uveďte maticové zápisy následujících transformací:

a) středová souměrnost se středem v počátku,

b) středová souměrnost se středem v bodě $[5, 10]$,

c) osová souměrnost podle souřadnicové osy x ,

d) stejnolehlost se středem v počátku soustavy souřadnic a s koeficientem $\kappa = 2$,

e) stejnolehlost se středem v počátku soustavy souřadnic a s koeficientem $\kappa = \frac{-1}{2}$.

Využijte applet na GeoGebraTube: tube.geogebra.org/student/mUcqV9uT