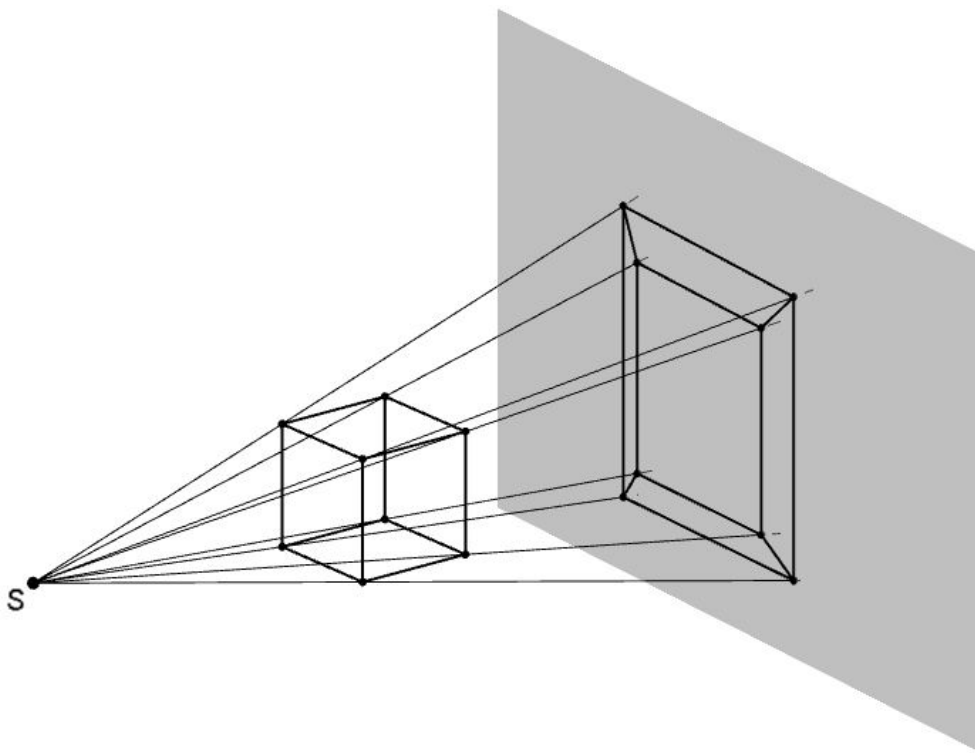


## 7 Afinity zobrazení

Afinní zobrazení (viz níže uvedená Def. 19) se obecně uskutečňuje mezi dvěma afinními bodovými prostory, jejichž dimenze nemusejí být stejné. Příkladem afinního zobrazení z prostoru  $A_3$  do prostoru  $A_2$  je středové promítání (z trojrozměrného prostoru do roviny) na Obr. 26.

Častěji se budeme setkávat s afinním zobrazením, které se uskutečňuje v rámci jednoho afinního bodového prostoru (většinou se bude jednat o rovinu, konkrétně o *eukleidovský prostor*  $E_2$  nebo trojrozměrný prostor, konkrétně o *eukleidovský prostor*  $E_3$ ). Je-li takové afinní zobrazení afinního bodového prostoru na sebe vzájemně jednoznačné, nazýváme ho *afinní transformace* daného bodového prostoru, zkráceně *afinita*.

Mezi afinity patří např. shodnosti v rovině nebo stejnoolehlost, které se vyučují v matematice na základních a středních školách.



Obrázek 26: Středové promítání z trojrozměrného prostoru do roviny

**Definice 19** (Afinní zobrazení). Zobrazení  $f$  afinního prostoru  $A$  do afinního prostoru  $A'$  se nazývá *afinní*, jestliže má tuto vlastnost: Leží-li navzájem různé body  $B, C, D$  z prostoru  $A$  na přímce, pak jejich obrazy  $f(B), f(C), f(D)$  buď splývají, nebo jsou navzájem různé, leží na jedné přímce a jejich dělicí poměr se rovná dělicímu poměru jejich vzorů, tj.:

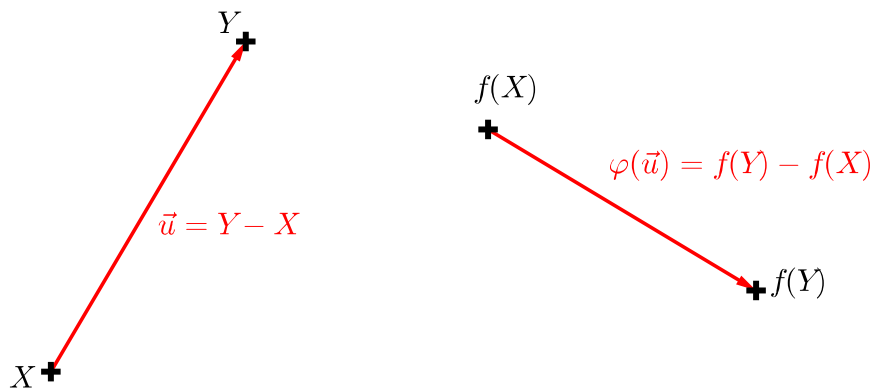
$$(f(B), f(C); f(D)) = (B, C; D).$$

**Definice 20** (Asociovaný homomorfismus<sup>1</sup> zobrazení  $f$ ). Uvažujme afinní zobrazení  $f$  prostoru  $A$  do prostoru  $A'$ , např.  $f : E_2 \rightarrow E_2$ . Potom **asociovaným** (tj. jednoznačně přiřazeným) **homomorfismem** afinního zobrazení  $f$  rozumíme lineární zobrazení  $\varphi$ , které zobrazuje zaměření  $V$  prostoru  $A$  do zaměření  $V'$  prostoru  $A'$  takto:

$$\vec{u} = Y - X \Rightarrow \varphi(\vec{u}) = f(Y) - f(X), \quad (10)$$

kde  $X, Y$  jsou body z  $A$ ,  $\vec{u} \in V$ ;  $f(X), f(Y)$  body z  $A'$ ,  $\varphi(\vec{u}) \in V'$ .

Role asociovaného homomorfismu  $\varphi$  afinního zobrazení  $f$  je patrná z Obr. 27. Afinní zobrazení  $f$  se uskutečňuje mezi body, tj. zobrazuje body  $X, Y$  po řadě na body  $f(X), f(Y)$ . Homomorfismus  $\varphi$  asociovaný s  $f$  potom „operuje“ na vektorech příslušejících dvojicím těchto bodů, tj. vektor  $\vec{u} = Y - X$  zobrazuje na vektor  $\varphi(\vec{u}) = f(Y) - f(X)$ .



Obrázek 27: Asociovaný homomorfismus  $\varphi$  afinního zobrazení  $f$

<sup>1</sup>Zobrazení  $\varphi$  vektorového prostoru  $V$  do vektorového prostoru  $V'$  se nazývá *homomorfismus* (též „lineární zobrazení“), jestliže pro všechna  $\vec{u}, \vec{v} \in V$ ,  $k \in \mathbb{T}$  (místo obecného tělesa  $\mathbb{T}$  můžeme uvažovat  $\mathbb{R}$ ) platí:

$$(1) \quad \varphi(\vec{u} + \vec{v}) = \varphi(\vec{u}) + \varphi(\vec{v}),$$

$$(2) \quad \varphi(k\vec{u}) = k\varphi(\vec{u}).$$

## 7.1 Rovnice afinního zobrazení z $A_n$ do $A_m$

Nechť afinní bodový prostor  $A_n$  je určen počátkem  $P$  a bází  $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$ , tzn.  $A_n = \{P; \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$ . Podobně nechť  $A'_m = \{Q; \vec{d}_1, \vec{d}_2, \dots, \vec{d}_m\}$ . Nechť  $f$  je afinní zobrazení  $A_n$  do  $A'_m$  a  $\varphi$  asociované zobrazení k  $f$  tak, že

$$\varphi(\vec{e}_j) = \sum_{i=1}^m a_{ij} \vec{d}_i; \quad j = 1, \dots, n, \quad (11)$$

tzn. koeficienty  $a_{ij}$  jsou souřadnice vektorů  $\varphi(\vec{e}_j)$  v bázi zaměření prostoru  $A_m$ ,

$$f(P) = Q + \sum_{i=1}^m b_i \vec{d}_i, \quad (12)$$

tzn. počátek  $P \in A_n$  se zobrazuje do bodu  $f(P) \in A'_m$ , který má při počátku  $Q$  souřadnice  $b_i$ .

S ohledem na výše uvedené úmluvy nyní určíme vztah mezi souřadnicemi libovolného bodu  $X \in A_n$  a jeho obrazu  $f(X) \in A'_m$ . Vyjádřeme souřadnice  $X$ ,  $f(X)$ :

$$X = P + \sum_{j=1}^n x_j \vec{e}_j, \quad (13)$$

$$f(X) = Q + \sum_{i=1}^m x'_i \vec{d}_i. \quad (14)$$

Zobrazíme-li bod  $X$  v afinitě  $f$ , můžeme dle uvedených vlastností zobrazení  $f$  a  $\varphi$  psát:

$$f(X) = f(P) + \sum_{j=1}^n x_j \varphi(\vec{e}_j).$$

Po dosazení z (11) a (12) dostáváme

$$f(X) = Q + \sum_{i=1}^m b_i \vec{d}_i + \sum_{j=1}^n x_j \sum_{i=1}^m a_{ij} \vec{d}_i,$$

po úpravě

$$f(X) = Q + \sum_{i=1}^m \left( \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j + b_i \right) \vec{d}_i. \quad (15)$$

Porovnáme-li koeficienty při  $\vec{d}_i$  ve vyjádřeních (14) a (15), dostáváme hledané rovnice

$$x'_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j + b_i, \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (16)$$

Jinou formou zápisu (16) je soustava rovnic

$$\begin{aligned} x'_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n + b_1 \\ x'_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n + b_2 \\ &\vdots \\ x'_n &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n + b_n, \end{aligned}$$

maticový zápis soustavy

$$\begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}, \quad (17)$$

případně maticová rovnice

$$\mathbf{X}' = A \cdot \mathbf{X} + B. \quad (18)$$

## 7.2 Rovnice homomorfismu asociovaného s afinním zobrazením

Nyní ještě určíme rovnice asociovaného zobrazení  $\varphi$ . Nechť vektor  $\vec{u} \in V_n$  se zobrazí do vektoru  $\varphi(\vec{u}) \in V'_m$ . Pro souřadnice vzoru  $\vec{u}$  a obrazu  $\varphi(\vec{u})$  platí

$$\vec{u} = \sum_{j=1}^n u_j \vec{e}_j; \quad (19)$$

$$\varphi(\vec{u}) = \sum_{i=1}^m u'_i \vec{d}_i \quad (20)$$

Na (19) aplikujeme zobrazení  $\varphi$  a upravíme dle (11). Dostaneme

$$\varphi(\vec{u}) = \sum_{j=1}^n u_j \varphi(\vec{e}_j) = \sum_{j=1}^n u_j \sum_{i=1}^m a_{ij} \vec{d}_i.$$

Po úpravě

$$\varphi(\vec{u}) = \sum_{i=1}^m \left( \sum_{j=1}^n a_{ij} u_j \right) \vec{d}_i. \quad (21)$$

Srovnáním (21) s (20) dostaneme hledané rovnice asociovaného zobrazení:

$$u'_i = \sum_j^n a_{ij} u_j, \quad i = 1, \dots, m. \quad (22)$$

### 7.3 Věta o určenosti afinního zobrazení

**Věta 35** (O určenosti afinního zobrazení). *Mějme dva afinní bodové prostory  $A_n$ ,  $A'_m$ . Necht'  $M_0, M_1, M_2, \dots, M_n$  je  $n+1$  lineárně nezávislých bodů v  $A_n$ ,  $M'_0, M'_1, \dots, M'_n$   $n+1$  libovolně zvolených bodů v  $A'_m$ . Pak existuje právě jedno afinní zobrazení  $f$  prostoru  $A_n$  do  $A'_m$ , které přiřazuje bodům  $M_j$  body  $M'_j$  tak, že*

$$M'_j = f(M_j); \quad j = 0, 1, \dots, n.$$

*Důkaz.* Ze Def. 20 asociovaného homomorfismu  $\varphi$  plyne, že jeho vztah k afinnímu zobrazení  $f$  lze vyjádřit vztahem  $\varphi(X - P) = f(X) - f(P)$ , který můžeme psát ve tvaru

$$f(X) = f(P) + \varphi(X - P). \quad (23)$$

Odtud je zřejmé, že afinní zobrazení  $f$  lze určit (zadat) jednou dvojicí bodů ve vztahu „vzor  $\rightarrow$  obraz“, v případě (23) je to dvojice  $P \rightarrow f(P)$ , a asociovaným homomorfismem  $\varphi$ . Z toho plyne důkaz věty 35: Afinní zobrazení je určeno dvojicí bodů „vzor  $\rightarrow$  obraz“  $M_0 \rightarrow M'_0$  a asociovaným homomorfismem  $\varphi$  jednoznačně určeným  $n$  nezávislými vektory  $M_1 - M_0, M_2 - M_0, \dots, M_n - M_0$  a jejich obrazy (které mohou být závislé)  $M'_1 - M'_0, M'_2 - M'_0, \dots, M'_n - M'_0$ .  $\square$

**PŘÍKLAD 7.1.** *Zjistěte, zda existuje afinní zobrazení  $f : A_2 \rightarrow A_3$ , při kterém se body  $B[1, 0], C[0, 1], D[2, p]$  zobrazí po řadě na body  $B'[2, 1, -1], C'[3, 2, 0], D'[1, 0, 2]$ .*

Řešení v programu wxMaxima:

```
(%i1) r1:a11+b1=2; r2:a21+b2=1; r3:a31+b3=-1; r4:a12+b1=3; r5:a22+b2=2;
      r6:a32+b3=0; r7:2*a11+p*a12+b1=1; r8:2*a21+p*a22+b2=0;
      r9:2*a31+p*a32+b3=2;
```

```
(%o1) b1 + a11 = 2
```

$$(\%o2) \quad b2 + a21 = 1$$

$$(\%o3) \quad b3 + a31 = -1$$

$$(\%o4) \quad b1 + a12 = 3$$

$$(\%o5) \quad b2 + a22 = 2$$

$$(\%o6) \quad b3 + a32 = 0$$

$$(\%o7) \quad a12p + b1 + 2a11 = 1$$

$$(\%o8) \quad a22p + b2 + 2a21 = 0$$

$$(\%o9) \quad a32p + b3 + 2a31 = 2$$

```
(%i10) res:solve([r1,r2,r3,r4,r5,r6,r7,r8,r9],  
[a11,a12,a21,a22,a31,a32,b1,b2,b3])[1];
```

$$(\%o10) \quad [a11 = -1, a12 = 0, a21 = -1, a22 = 0, a31 = -\frac{p-3}{p+1}, a32 = \frac{4}{p+1}, b1 = 3, b2 = 2, b3 = -\frac{4}{p+1}]$$

```
(%i11) ev([x1=a11*x+a12*y+b1,y1=a21*x+a22*y+b2,z1=a31*x+a32*y+b3],res);
```

$$(\%o11) \quad [x1 = 3 - x, y1 = 2 - x, z1 = \frac{4y}{p+1} - \frac{(p-3)x}{p+1} - \frac{4}{p+1}]$$

**PŘÍKLAD 7.2.** Určete rovnici afinního zobrazení  $f : A_2 \rightarrow A_1$ , při kterém se body  $[2, 1]$ ,  $[3, 2]$ ,  $[0, 1]$  zobrazí po řadě na body  $[2]$ ,  $[0]$ ,  $[8]$ .

**PŘÍKLAD 7.3.** Určete rovnice rovnoběžného promítání prostoru  $A_3$  do průmětny  $\pi \subset A_3$ , vzhledem k pevné lineární soustavě souřadnic prostoru  $A_3$ , je-li dána průmětna  $\pi$  rovnicí  $2x_1 + x_2 - x_3 + 2 = 0$  a směr promítání je určen vektorem  $\vec{s} = (2; 1; 3)$ .

**PŘÍKLAD 7.4.** Určete rovnice afinního zobrazení  $f : A_3 \rightarrow A_2$ , které bodům  $A = [1, 2, 3]$ ,  $B = [0, 1, 1]$ ,  $C = [1, -1, 2]$ ,  $D = [3, 0, 1]$  přiřazuje v daném pořadí body  $A' = [-1, 3]$ ,  $B = [0, 2]$ ,  $C = [0, 0]$ ,  $D = [3, 1]$ .

## 7.4 Cvičení – Afinní zobrazení

**63.** Určete rovnici afinního zobrazení  $f : A_2 \rightarrow A_1$ , při kterém se body  $[2, 1]$ ,  $[3, 2]$ ,  $[0, 1]$  zobrazí po řadě na body  $[2]$ ,  $[4]$ ,  $[10]$ .

**64.** Pro jaké hodnoty parametrů  $p, q$  existuje afinní zobrazení  $f : A_2 \rightarrow A'_2$ , při kterém se body  $[2, 1]$ ,  $[-2, 3]$ ,  $[4, 0]$  zobrazí po řadě na body  $[p, 3]$ ,  $[0, q]$ ,  $[1, 1]$ .