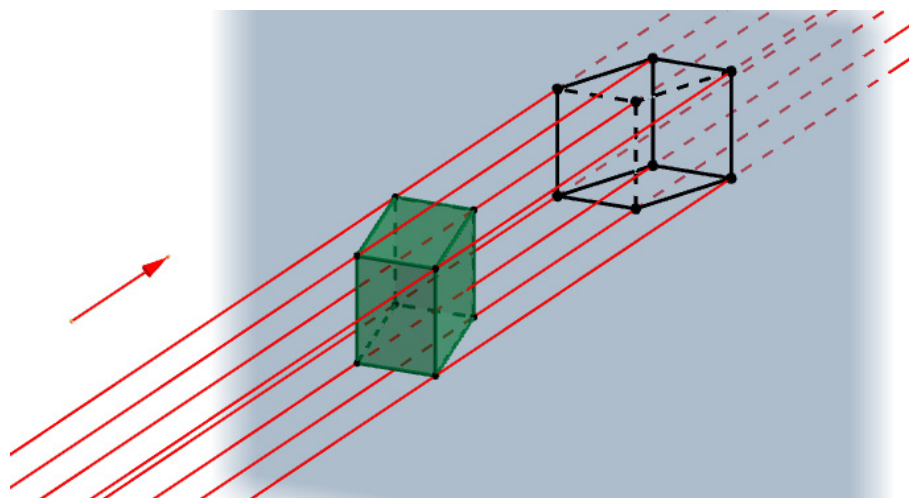


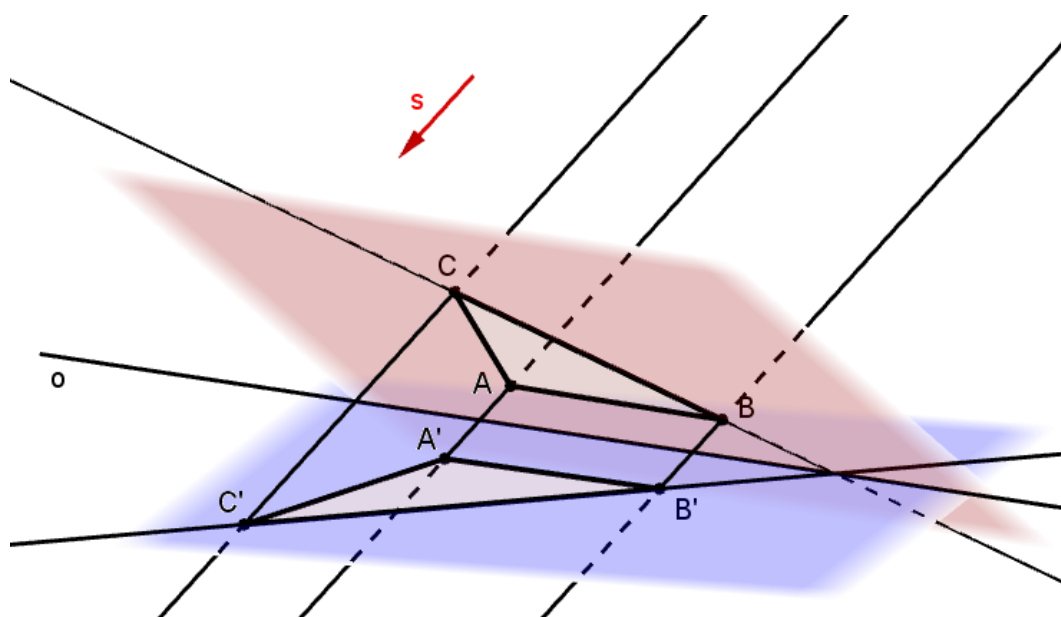
4 Afinní zobrazení

Afinní zobrazení (viz níže uvedená Def. 13) se obecně uskutečňuje mezi dvěma afinními bodovými prostory, jejichž dimenze nemusejí být stejné. Příkladem afinního zobrazení z prostoru A_3 do prostoru A_2 je rovnoběžné promítání (z trojrozměrného prostoru do roviny) na Obr. 19.



Obrázek 19: Rovnoběžné promítání mezi dvěma různoběžnými rovinami (dalo vznik *osové afinity*)

Příkladem afinního zobrazení mezi různými prostory téže dimenze je pak rovnoběžné promítání mezi dvěma různoběžnými rovinami (tj. podprostory dimenze 2 prostoru A_3) na Obr. 20.



Obrázek 20: Rovnoběžné promítání mezi dvěma různoběžnými rovinami (dalo vznik *osové afinity*)

Častěji se však budeme setkávat s afinním zobrazením, které se uskutečňuje v rámci jednoho afinního bodového prostoru (většinou se bude jednat o rovinu, konkrétně o *eukleidovský prostor* E_2 , nebo o trojrozměrný prostor, konkrétně o *eukleidovský prostor* E_3). Je-li takové afinní zobrazení afinního bodového prostoru na sebe vzájemně jednoznačné, nazýváme ho *afinní transformace* daného bodového prostoru, zkráceně *afinita*.

Mezi afinity roviny E_2 patří např. *shodnosti v rovině* nebo *stejnolehlost*, které se vyučují v matematice na základních a středních školách. Z deskriptivní geometrie potom známe *osovou afinitu*.

4.1 Definice afinního zobrazení

Definice 13 (Afinní zobrazení). *Zobrazení f afinního prostoru A do afinního prostoru A' se nazývá afinní, jestliže má tuto vlastnost: Leží-li navzájem různé body B, C, D z prostoru A na přímce, pak jejich obrazy $f(B), f(C), f(D)$ buď splývají, nebo jsou navzájem různé, leží na jedné přímce a jejich dělicí poměr se rovná dělicímu poměru jejich vzorů, tj.:*

$$(f(B), f(C); f(D)) = (B, C; D).$$

PŘÍKLAD 4.1. *Pomocí konkrétního příkladu afinního zobrazení (např. rovnoběžného promítání krychle do roviny) ilustруйте obě situace týkající se obrazů $f(B), f(C), f(D)$, které definice zmiňuje.*

4.2 Asociovaný homomorfismus afinního zobrazení

Důsledkem vztahu mezi afinním bodovým prostorem a vektorovým prostorem (říkáme mu *zaměření afinního bodového prostoru*), který je popsán v definici 4, je existence lineárního zobrazení přidruženého ke každému afinnímu zobrazení. Hovoříme o tzv. *asociovaném homomorfismu*⁴. Zatímco *afinní zobrazení* působí mezi *afinními bodovými prostory*, *asociovaný homomorfismus* působí mezi jejich *zaměřeními*.

⁴Zobrazení φ vektorového prostoru V do vektorového prostoru V' se nazývá *homomorfismus* (též „lineární zobrazení“), jestliže pro všechna $\vec{u}, \vec{v} \in V, k \in \mathbb{T}$ (místo obecného tělesa \mathbb{T} můžeme uvažovat \mathbb{R}) platí:

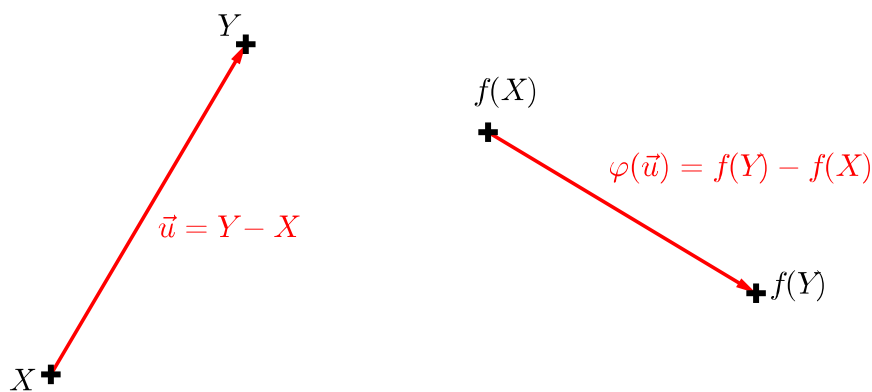
- (1) $\varphi(\vec{u} + \vec{v}) = \varphi(\vec{u}) + \varphi(\vec{v})$,
- (2) $\varphi(k\vec{u}) = k\varphi(\vec{u})$.

Definice 14 (Asociovaný homomorfismus zobrazení f). Uvažujme afinní zobrazení f prostoru A do prostoru A' , např. $f : E_2 \rightarrow E_2$. Potom **asociovaným** (tj. jednoznačně přiřazeným) **homomorfismem** afinního zobrazení f rozumíme lineární zobrazení φ , které zobrazuje zaměření V prostoru A do zaměření V' prostoru A' takto:

$$\vec{u} = Y - X \Rightarrow \varphi(\vec{u}) = f(Y) - f(X), \quad (6)$$

kde X, Y jsou body z A , $\vec{u} \in V$; $f(X), f(Y)$ body z A' , $\varphi(\vec{u}) \in V'$.

Role asociovaného homomorfismu φ afinního zobrazení f je patrná z Obr. 21. Afinní zobrazení f se uskutečňuje mezi body, tj. zobrazuje body X, Y po řadě na body $f(X), f(Y)$. Homomorfismus φ asociovaný s f potom „operuje“ na vektorech příslušejících dvojicím těchto bodů, tj. vektor $\vec{u} = Y - X$ zobrazuje na vektor $\varphi(\vec{u}) = f(Y) - f(X)$.



Obrázek 21: Asociovaný homomorfismus φ afinního zobrazení f

4.3 Rovnice afinního zobrazení z A_n do A_m

Jestliže afinní zobrazení $f : A_n \rightarrow A_m$ přiřazuje bodu $X[x_1, x_2, \dots, x_n] \in A_n$ obraz $X'[x'_1, x'_2, \dots, x'_m] \in A_m$, platí

$$\begin{aligned} x'_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n + b_1 \\ x'_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n + b_2 \\ &\vdots \\ x'_m &= a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n + b_m, \end{aligned} \quad (7)$$

kde a_{ij}, b_i ; $i \in \{1, \dots, m\}, j \in \{1, \dots, n\}$, jsou reálné koeficienty charakterizující zobrazení f .

Soustavu (7) můžeme zapsat zkráceně ve tvaru

$$x'_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j + b_i, \quad i = 1, 2, \dots, m. \quad (8)$$

Často se pro geometrická zobrazení volí maticový zápis soustavy

$$\begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}, \quad (9)$$

případně forma maticové rovnice

$$\mathbf{X}' = A \cdot \mathbf{X} + B, \quad (10)$$

kde matici A typu $m \times n$ nazýváme *maticí příslušné lineární transformace* (pro lineární transformaci je $B = O$, tj. $b_1 = b_2 = \dots = b_m = 0$, viz např. (28), (29)).

4.4 Rovnice homomorfismu asociovaného s afinním zobrazením

Jestliže vektoru $\vec{u} = Y - X$, $\vec{u} = (u_1, \dots, u_n)$, ze zaměření V_n prostoru A_n je homomorfismem φ asociovaným s afinním zobrazením f přiřazen vektor $\vec{u}' = \varphi(\vec{u}) = f(Y) - f(X)$, $\vec{u}' = (u'_1, \dots, u'_m)$, ze zaměření V_m prostoru A_m , platí

$$\begin{aligned} u'_1 &= a_{11}u_1 + a_{12}u_2 + \dots + a_{1n}u_n \\ u'_2 &= a_{21}u_1 + a_{22}u_2 + \dots + a_{2n}u_n \\ &\vdots \\ u'_m &= a_{m1}u_1 + a_{m2}u_2 + \dots + a_{mn}u_n. \end{aligned} \quad (11)$$

Zkráceně zapíšeme ve tvaru

$$u'_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}u_j, \quad i = 1, \dots, m, \quad (12)$$

nebo, analogicky s (9), zvolíme maticový zápis

$$\begin{bmatrix} u'_1 \\ u'_2 \\ \vdots \\ u'_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}, \quad (13)$$

případně formu maticové rovnice

$$\mathbf{U}' = A \cdot \mathbf{U}, \quad (14)$$

kde $\mathbf{U} = \vec{u}^T$, $\mathbf{U}' = \vec{u}'^T$ a A je matice typu $m \times n$ identická s maticí A v (10).

PŘÍKLAD 4.2. Porovnejte algebraické vyjádření afinního zobrazení (9) s algebraickým vyjádřením asociovaného homomorfismu (28), popište jejich rozdíl a pokuste se uvést jeho příčinu.

PŘÍKLAD 4.3. Jak již bylo uvedeno, pro lineární zobrazení je $B = O$. Uveďte nějaké příklady lineárního afinního zobrazení. Můžete si vzít na pomoc aplet <https://www.geogebra.org/m/UcqvE9uT>.

4.5 Odvození rovnic afinního zobrazení a asociovaného homomorfismu

V této kapitole je detailně popsán postup odvození rovnic (7) a (26).

4.5.1 Afinní zobrazení z A_n do A_m

Nechť afinní bodový prostor A_n je určen počátkem P a bází $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$, tzn. $A_n = \{P; \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$. Podobně nechť $A'_m = \{Q; \vec{d}_1, \vec{d}_2, \dots, \vec{d}_m\}$. Nechť f je afinní zobrazení A_n do A'_m a φ asociované zobrazení k f tak, že

$$\varphi(\vec{e}_j) = \sum_{i=1}^m a_{ij} \vec{d}_i; \quad j = 1, \dots, n, \quad (15)$$

tzn. koeficienty a_{ij} jsou souřadnice vektorů $\varphi(\vec{e}_j)$ v bázi zaměření prostoru A_m ,

$$f(P) = Q + \sum_{i=1}^m b_i \vec{d}_i, \quad (16)$$

tzn. počátek $P \in A_n$ se zobrazuje do bodu $f(P) \in A'_m$, který má při počátku Q souřadnice b_i .

S ohledem na výše uvedené úmluvy nyní určíme vztah mezi souřadnicemi libovolného bodu $X \in A_n$ a jeho obrazu $f(X) \in A'_m$. Vyjádříme souřadnice X , $f(X)$:

$$X = P + \sum_{j=1}^n x_j \vec{e}_j, \quad (17)$$

$$f(X) = Q + \sum_{i=1}^m x'_i \vec{d}_i. \quad (18)$$

Zobrazíme-li bod X v afinitě f , můžeme dle uvedených vlastností zobrazení f a φ psát:

$$f(X) = f(P) + \sum_{j=1}^n x_j \varphi(\vec{e}_j).$$

Po dosazení z (15) a (16) dostáváme

$$f(X) = Q + \sum_{i=1}^m b_i \vec{d}_i + \sum_{j=1}^n x_j \sum_{i=1}^m a_{ij} \vec{d}_i,$$

po úpravě

$$f(X) = Q + \sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j + b_i \right) \vec{d}_i. \quad (19)$$

Porovnáme-li koeficienty při \vec{d}_i ve vyjádřeních (18) a (19), dostáváme hledané rovnice

$$x'_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j + b_i, \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (20)$$

Jinou formou zápisu (??) je soustava rovnic

$$\begin{aligned} x'_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n + b_1 \\ x'_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n + b_2 \\ &\vdots \\ x'_n &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n + b_n, \end{aligned}$$

maticový zápis soustavy

$$\begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}, \quad (21)$$

případně maticová rovnice

$$\mathbf{X}' = A \cdot \mathbf{X} + B. \quad (22)$$

4.5.2 Homomorfismus asociovaný s afinním zobrazením

Nyní ještě určíme rovnice asociovaného zobrazení φ . Nechť vektor $\vec{u} \in V_n$ se zobrazí do vektoru $\varphi(\vec{u}) \in V'_m$. Pro souřadnice vzoru \vec{u} a obrazu $\varphi(\vec{u})$ platí

$$\vec{u} = \sum_{j=1}^n u_j \vec{e}_j; \quad (23)$$

$$\varphi(\vec{u}) = \sum_{i=1}^m u'_i \vec{d}_i \quad (24)$$

Na (23) aplikujeme zobrazení φ a upravíme dle (15). Dostaneme

$$\varphi(\vec{u}) = \sum_{j=1}^n u_j \varphi(\vec{e}_j) = \sum_{j=1}^n u_j \sum_{i=1}^m a_{ij} \vec{d}_i.$$

Po úpravě

$$\varphi(\vec{u}) = \sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} u_j \right) \vec{d}_i. \quad (25)$$

Srovnáním (25) s (24) dostaneme hledané rovnice asociovaného zobrazení

$$\begin{aligned} u'_1 &= a_{11}u_1 + a_{12}u_2 + \dots + a_{1n}u_n \\ u'_2 &= a_{21}u_1 + a_{22}u_2 + \dots + a_{2n}u_n \\ &\vdots \\ u'_m &= a_{m1}u_1 + a_{m2}u_2 + \dots + a_{mn}u_n, \end{aligned} \quad (26)$$

zkráceně ve tvaru

$$u'_i = \sum_j^n a_{ij} u_j, \quad i = 1, \dots, m. \quad (27)$$

Analogicky s (9) možno zapsat i maticově

$$\begin{bmatrix} u'_1 \\ u'_2 \\ \vdots \\ u'_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}, \quad (28)$$

případně formu maticové rovnice

$$\mathbf{U}' = A \cdot \mathbf{U}, \quad (29)$$

kde $\mathbf{U} = \vec{u}^T$, $\mathbf{U}' = \vec{u}'^T$ a A je matice typu $m \times n$ identická s maticí A v (22).

4.6 Věta o určenosti afinního zobrazení

Z planimetrie známe věty o určenosti shodnosti (viz <https://www.geogebra.org/m/RYaK>) a podobnosti v rovině. Následující věta je jejich zobecněním jak z hlediska zobrazení (uvažujeme libovolné afinní zobrazení), tak i z hlediska dimenzí prostorů vzorů a obrazů (místo roviny uvažujeme dva různé bodové prostory obecně odlišných dimenzí).

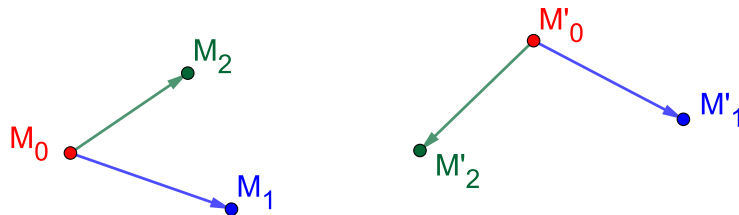
Věta 2 (O určenosti afinního zobrazení). *Mějme dva afinní bodové prostory A_n, A'_m . Nechť $M_0, M_1, M_2, \dots, M_n$ je $n+1$ lineárně nezávislých bodů v A_n , M'_0, M'_1, \dots, M'_n $n+1$ libovolně zvolených bodů v A'_m . Pak existuje právě jedno afinní zobrazení f prostoru A_n do A'_m , které přiřazuje bodům M_j body M'_j tak, že*

$$M'_j = f(M_j); \quad j = 0, 1, \dots, n.$$

Důkaz. Ze Def. 14 asociovaného homomorfismu φ plyne, že jeho vztah k afinnímu zobrazení f lze vyjádřit vztahem $\varphi(X - P) = f(X) - f(P)$, který můžeme psát ve tvaru

$$f(X) = f(P) + \varphi(X - P). \quad (30)$$

Odtud je zřejmé, že afinní zobrazení f lze určit (zadat) jednou dvojicí bodů ve vztahu „vzor \rightarrow obraz“, v případě (30) je to dvojice $P \rightarrow f(P)$, a asociovaným homomorfismem φ . Z toho plyne důkaz věty 2: Afinní zobrazení je určeno dvojicí bodů „vzor \rightarrow obraz“ $M_0 \rightarrow M'_0$ a asociovaným homomorfismem φ jednoznačně určeným n nezávislými vektory $M_1 - M_0, M_2 - M_0, \dots, M_n - M_0$ a jejich obrazy (které mohou být závislé) $M'_1 - M'_0, M'_2 - M'_0, \dots, M'_n - M'_0$.



Obrázek 22: Věta o určenosti afinního zobrazení pro $n = m = 2$ (tj. pro rovinu)

□

PŘÍKLAD 4.4. Zjistěte, zda existuje afinní zobrazení $f : A_2 \rightarrow A_3$, při kterém se body $k[1, 0]$, $l[0, 1]$, $m[2, p]$ zobrazí po řadě na body $K[2, 1, -1]$, $L[3, 2, 0]$, $M[1, 0, 2]$.

Řešení:

Hledáme matice $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$, pro které platí

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}.$$

Pro řešení této úlohy použijeme program *wxMaxima*⁵

```
(%i1) k:[1,0]$ l:[0,1]$ m:[2,p]$ K:[2,1,-1]$ L:[3,2,0]$ M:[1,0,2]$
```

```
(%i7) A:matrix([a11,a12],[a21,a22],[a31,a32]); B:matrix([b1],[b2],[b3]);
```

```
(%o7) (a11 a12)
      (a21 a22)
      (a31 a32)
```

```
(%o8) (b1)
      (b2)
      (b3)
```

```
(%i9) transpose(K)=A.transpose(k)+B; transpose(L)=A.transpose(l)+B;
      transpose(M)=A.transpose(m)+B;
```

```
(%o9) ( 2 )
      ( 1 ) = ( b1 + a11 )
      (-1)   ( b2 + a21 )
              ( b3 + a31 )
```

⁵*wxMaxima* je bezplatně šířený program počítačové algebry (CAS, *Computer Algebra System*), jehož instalační soubor je dostupný na adrese <http://andrejv.github.io/wxmaxima/>.

$$(\%o10) \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b1 + a12 \\ b2 + a22 \\ b3 + a32 \end{pmatrix}$$

$$(\%o11) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a12 p + b1 + 2 a11 \\ a22 p + b2 + 2 a21 \\ a32 p + b3 + 2 a31 \end{pmatrix}$$

(%i12) L1:transpose(K)\$ P1:A.transpose(k)+B\$ L2:transpose(L)\$
P2:A.transpose(1)+B\$ L3:transpose(M)\$ P3:A.transpose(m)+B\$

(%i18) r1:P1[1,1]=L1[1,1]; r2:P1[2,1]=L1[2,1]; r3:P1[3,1]=L1[3,1];
r4:P2[1,1]=L2[1,1]; r5:P2[2,1]=L2[2,1]; r6:P2[3,1]=L2[3,1];
r7:P3[1,1]=L3[1,1]; r8:P3[2,1]=L3[2,1]; r9:P3[3,1]=L3[3,1];

$$(\%o18) b1 + a11 = 2$$

$$(\%o19) b2 + a21 = 1$$

$$(\%o20) b3 + a31 = -1$$

$$(\%o21) b1 + a12 = 3$$

$$(\%o22) b2 + a22 = 2$$

$$(\%o23) b3 + a32 = 0$$

$$(\%o24) a12 p + b1 + 2 a11 = 1$$

$$(\%o25) a22 p + b2 + 2 a21 = 0$$

$$(\%o26) a32 p + b3 + 2 a31 = 2$$

Získanou soustavu devíti rovnic o devíti neznámých $a11, a12, a21, a22, a31, a32, b1, b2, b3$ nyní vyřešíme:

(%i27) res:solve([r1,r2,r3,r4,r5,r6,r7,r8,r9],
[a11,a12,a21,a22,a31,a32,b1,b2,b3])[1];

$$(\%o27) [a11 = -1, a12 = 0, a21 = -1, a22 = 0, a31 = -\frac{p-3}{p+1}, a32 = \frac{4}{p+1}, \\ b1 = 3, b2 = 2, b3 = -\frac{4}{p+1}]$$

Vidíme, že úloha má řešení pro všechny reálné hodnoty parametru p s výjimkou -1 , tj. pro $p \in \mathbb{R} - \{0\}$. Hledané matice A, B potom můžeme psát následujícím způsobem:

```
(%i28) subst(res,A); subst(res,B);
```

$$(\%o28) \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 0 \\ -\frac{p-3}{p+1} & \frac{4}{p+1} \end{pmatrix}$$

$$(\%o29) \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -\frac{4}{p+1} \end{pmatrix}$$

Při pohledu na matici A můžeme konstatovat, že uvažované afinní zobrazení f existuje pro všechna $p \neq -1$. Jeho rovnice získáme dosazením vypočítaných koeficientů do obecného zápisu rovnic afinního zobrazení (7):

```
(%i30) ev([x1=a11*x+a12*y+b1, y1=a21*x+a22*y+b2, z1=a31*x+a32*y+b3],res);
```

$$(\%o30) [x1 = 3 - x, y1 = 2 - x, z1 = \frac{4y}{p+1} - \frac{(p-3)x}{p+1} - \frac{4}{p+1}]$$

Po přepsání zápisu řešení v kódu wxMaximy do obvyklého tvaru soustavy dle (7) dostáváme konečný zápis řešení:

$$\begin{aligned} x' &= -x + 3, \\ y' &= -x + 2, \\ z' &= -\frac{p-3}{p+1}x + \frac{4}{p+1}y - \frac{4}{p+1}. \end{aligned}$$

Zbývá otázka, jak lze geometricky interpretovat situaci, kdy je $p = -1$. Po dosazení do $m[2, p]$ dostáváme jako trojici vzorů body $k[1, 0]$, $l[0, 1]$ a $m[2, -1]$. Uvažujme nyní dva vektory jimi určené, např. $\vec{u} = l - k = (-1, 1)$ a $\vec{v} = m - k = (1, -1)$. Protože se jedná o lineárně závislé vektory, $\vec{u} = -\vec{v}$, body k, l, m leží v jedné přímce. Není tak splněn předpoklad věty 2 a proto pro $p = -1$ uvažované afinní zobrazení neexistuje.

PŘÍKLAD 4.5. *Určete rovnici afinního zobrazení $f : A_2 \rightarrow A_1$, při kterém se body $[2, 1]$, $[3, 2]$, $[0, 1]$ zobrazí po řadě na body $[2]$, $[0]$, $[8]$.*

Řešení: Opět použijeme program wxMaxima. Protože program nedovoluje použití apostrofu ve jménu proměnné, označíme tři výchozí body symboly $A1, B1, C1$, jejich obrazy v uvedeném pořadí pak $A2, B2, C2$.

```
(%i1) A1:[2,1]$ B1:[3,2]$ C1:[0,1]$ A2:[2]$ B2:[0]$ C2:[8]$
```

```
(%i7) A:matrix([a11,a12]); B:matrix([b1]);
```

```
(%o7) (a11 a12)
```

```
(%o8) (b1)
```

```
(%i9) transpose(A2)=A.transpose(A1)+B; transpose(B2)=A.transpose(B1)+B;  
transpose(C2)=A.transpose(C1)+B;
```

```
(%o9) (2) = (b1 + a12 + 2 a11)
```

```
(%o10) (0) = (b1 + 2 a12 + 3 a11)
```

```
(%o11) (8) = (b1 + a12)
```

```
(%i12) L1:transpose(A2)$ P1:A.transpose(A1)+B$ L2:transpose(B2)$  
P2:A.transpose(B1)+B$ L3:transpose(C2)$ P3:A.transpose(C1)+B$
```

```
(%i18) r1:P1[1,1]=L1[1,1]; r2:P2[1,1]=L2[1,1]; r3:P3[1,1]=L3[1,1];
```

```
(%o18) b1 + a12 + 2 a11 = 2
```

```
(%o19) b1 + 2 a12 + 3 a11 = 0
```

```
(%o20) b1 + a12 = 8
```

```
(%i21) res:solve([r1,r2,r3],[a11,a12,b1])[1];
```

```
(%o21) [a11 = -3, a12 = 1, b1 = 7]
```

```
(%i22) subst(res,A); subst(res,B);
```

```
(%o22) (-3 1)
```

```
(%o23) (7)
```

```
(%i24) ev([x1=a11*x+a12*y+b1],res);
```

```
(%o24) [x1 = y - 3 x + 7]
```

Hledané afinní zobrazení existuje a je dáno rovnicí $x' = -3x + y + 7$.

PŘÍKLAD 4.6. Určete rovnice rovnoběžného promítání prostoru A_3 do průmětny $\pi \subset A_3$, vzhledem k pevné lineární soustavě souřadnic prostoru A_3 , je-li dána průmětna π rovnicí $2x + y - z + 2 = 0$ a směr promítání je určen vektorem $\vec{s} = (-2; -1; 3)$.

Řešení:

(%i1) `pi:2*x+y-z+2=0$ s: [-2,-1,3]$`

(%i3) `r:[x,y,z]+t*s;`

(%o3) $[x - 2t, y - t, z + 3t]$

(%i4) `rov:substitute([x=r[1],y=r[2],z=r[3]],pi);`

(%o4) $-z + y + 2(x - 2t) - 4t + 2 = 0$

(%i5) `to:solve(rov,t);`

(%o5) $[t = -\frac{z - y - 2x - 2}{8}]$

(%i6) `Xo:expand(substitute(to,r));`

(%o6) $[\frac{z}{4} - \frac{y}{4} + \frac{x}{2} - \frac{1}{2}, \frac{z}{8} + \frac{7y}{8} - \frac{x}{4} - \frac{1}{4}, \frac{5z}{8} + \frac{3y}{8} + \frac{3x}{4} + \frac{3}{4}]$

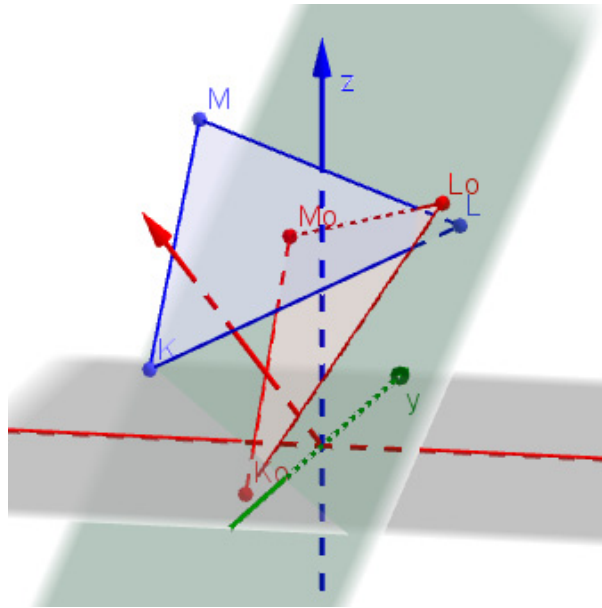
(%i7) `A:coefmatrix(Xo,[x,y,z]); B:col(augcoefmatrix(Xo,[x,y,z]),4);`

(%o7) $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{7}{8} & \frac{1}{8} \\ \frac{3}{4} & \frac{3}{8} & \frac{5}{8} \end{pmatrix}$

(%o8) $\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4} \\ \frac{3}{4} \end{pmatrix}$

Dané zobrazení, jehož působení ilustruje Obr. 23, je definováno rovnicemi

$$\begin{aligned} x' &= \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}y + \frac{1}{4}z - \frac{1}{2}, \\ y' &= -\frac{1}{4}x + \frac{7}{8}y + \frac{1}{8}z - \frac{1}{4}, \\ z' &= \frac{3}{4}x + \frac{3}{8}y + \frac{5}{8}z + \frac{3}{4}. \end{aligned}$$



Obrázek 23: Rovnoběžné promítání do roviny $\pi : 2x + y - z + 2 = 0$ ve směru $\vec{s} = (-2, -1, 3)$

PŘÍKLAD 4.7. Určete rovnice afinního zobrazení $f : A_3 \rightarrow A_2$, které bodům $A = [1, 2, 3]$, $B = [0, 1, 1]$, $C = [1, -1, 2]$, $D = [3, 0, 1]$ přiřazuje v daném pořadí body $A' = [-1, 3]$, $B = [0, 2]$, $C = [0, 0]$, $D = [3, 1]$.

Řešení: Postupujeme stejně jako u příkladů 4.4 a 4.5.

```
(%i1) A1:[1,2,3]$ B1:[0,1,1]$ C1:[1,-1,2]$ D1:[3,0,1]$ A2:[-1,3]$
      B2:[0,2]$ C2:[0,0]$ D2:[3,1]$
```

```
(%i9) A:matrix([a11,a12,a13],[a21,a22,a23]); B:matrix([b1],[b2]);
```

```
(%o9) (a11 a12 a13)
      (a21 a22 a23)
```

```
(%o10) (b1)
       (b2)
```

```
(%i11) transpose(A2)=A.transpose(A1)+B; transpose(B2)=A.transpose(B1)+B;
      transpose(C2)=A.transpose(C1)+B; transpose(D2)=A.transpose(D1)+B;
```

```
(%o11) (-1) = (b1 + 3 a13 + 2 a12 + a11)
       (3)   (b2 + 3 a23 + 2 a22 + a21)
```

```
(%o12) (0) = (b1 + a13 + a12)
       (2)   (b2 + a23 + a22)
```

```
(%o13) (0) = (b1 + 2 a13 - a12 + a11)
       (0)   (b2 + 2 a23 - a22 + a21)
```

$$(\%o14) \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b1 + a13 + 3 a11 \\ b2 + a23 + 3 a21 \end{pmatrix}$$

(%i15) L1:transpose(A2)\$ P1:A.transpose(A1)+B\$ L2:transpose(B2)\$
 P2:A.transpose(B1)+B\$ L3:transpose(C2)\$ P3:A.transpose(C1)+B\$
 L4:transpose(D2)\$ P4:A.transpose(D1)+B\$

(%i23) r1:P1[1,1]=L1[1,1]; r2:P1[2,1]=L1[2,1]; r3:P2[1,1]=L2[1,1];
 r4:P2[2,1]=L2[2,1]; r5:P3[1,1]=L3[1,1]; r6:P3[2,1]=L3[2,1];
 r7:P4[1,1]=L4[1,1]; r8:P4[2,1]=L4[2,1];

$$(\%o23) b1 + 3 a13 + 2 a12 + a11 = -1$$

$$(\%o24) b2 + 3 a23 + 2 a22 + a21 = 3$$

$$(\%o25) b1 + a13 + a12 = 0$$

$$(\%o26) b2 + a23 + a22 = 2$$

$$(\%o27) b1 + 2 a13 - a12 + a11 = 0$$

$$(\%o28) b2 + 2 a23 - a22 + a21 = 0$$

$$(\%o29) b1 + a13 + 3 a11 = 3$$

$$(\%o30) b2 + a23 + 3 a21 = 1$$

(%i31) res:solve([r1,r2,r3,r4,r5,r6,r7,r8],
 [a11,a12,a13,a21,a22,a23,b1,b2])[1];

$$(\%o31) [a11 = 1, a12 = 0, a13 = -1, a21 = 0, a22 = 1, a23 = 0, b1 = 1, b2 = 1]$$

(%i32) subst(res,A); subst(res,B);

$$(\%o32) \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(\%o33) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(%i34) ev([x1=a11*x+a12*y+a13*z+b1, y1=a21*x+a22*y+a23*z+b2],res);

$$(\%o34) [x1 = -z + x + 1, y1 = y + 1]$$

Řešením je afinní zobrazení f dané rovnicemi

$$\begin{aligned} x' &= x - z + 1, \\ y' &= y + 1. \end{aligned}$$

4.7 Cvičení – Afinity zobrazení

1. Určete rovnici afinity zobrazení $f : A_2 \rightarrow A_1$, při kterém se body $[2, 1]$, $[3, 2]$, $[0, 1]$ zobrazí po řadě na body $[2]$, $[4]$, $[10]$.
2. Pro jaké hodnoty parametrů p , q existuje afinity zobrazení $f : A_2 \rightarrow A'_2$, při kterém se body $[2, 1]$, $[-2, 3]$, $[4, 0]$ zobrazí po řadě na body $[p, 3]$, $[0, q]$, $[1, 1]$.