2 Afinní zobrazení

Afinní zobrazení v rovině (prostoru) je příkladem transformace roviny (prostoru) na sebe. Každému bodu X roviny E_2 (prostoru E_3) přiřadí bod $X' = f(X)$ téže roviny při zachování určitých vlastností. Důležitým pojmem při zavedení afinního zobrazení je dělicí poměr.

2.1 Dělicí poměr

Dělicím poměrem zde rozumíme číslo, které jednoznačně udává polohu bodu na přímce vzhledem ke dvěma pevně daným bodům této přímky.

Obrázek 8: Tři kolineární body

Definice 11 (Dělicí poměr)**.** *Nechť A, B, C; $A \neq B$, $C \neq B$, jsou tři body ležící na přímce (tj. tři kolineární body). Dělicím poměrem bodu C vzhledem k bodům A, B rozumíme reálné číslo λ, které zapisujeme (ABC), a pro jehož absolutní hodnotu platí*

$$|(ABC)| = \frac{|AC|}{|BC|}, \tag{1}$$

přitom pro bod C ležící vně úsečky AB je $(ABC) > 0$ a pro bod C ležící uvnitř AB je $(ABC) < 0$. Pro $C = A$ je zřejmě $(ABC) = 0$.

Poznámka. Uvedená definice zavádí dělicí poměr pomocí podílu vzdáleností bodu C od daných bodů A, B. Protože vzdálenosti jsou kladné, nepřináší jejich podíl žádnou informaci o znaménku dělicího poměru, kterému pak musí být věnována zvláštní část definice. Tomu se vyhneme, pokud použijeme k zavedení pojmu dělicí poměr odpovídající vektory definované příslušnou trojicí bodů, viz Obr.9.

Obrázek 9: Dělicí poměr bodu C vzhledem k bodům A, B

Definice 12 (Dělicí poměr 2)**.** *Nechť A, B, C; $A \neq B$, $C \neq B$, jsou tři body ležící na přímce (tj. tři kolineární body). Potom číslo λ definované rovnicí*

$$C - A = \lambda(C - B) \tag{2}$$

značíme (ABC) a nazýváme dělicím poměrem bodu C vzhledem k bodům A, B.

Poznámka. Ve vztahu (2) je obsažena kompletní informace o čísle λ, tj. o jeho absolutní hodnotě i o znaménku. Pro snazší zapamatování si můžeme (2) přepsat do tvaru

$$\lambda = \frac{C - A}{C - B},$$

který sice není formálně správně, ale jasně koresponduje se vztahem (1). Smysl získá až dosazením souřadnic bodů $A = [a_1; a_2]$, $B = [b_1; b_2]$, $C = [c_1; c_2]$:

$$\lambda = \frac{c_1 - a_1}{c_1 - b_1} = \frac{c_2 - a_2}{c_2 - b_2}.$$

PŘÍKLAD 2.1. *Určete dělicí poměr (ABS) středu S úsečky AB vzhledem k jejím krajním bodům A, B.*

PŘÍKLAD 2.2. *Pro body A, B, C platí $(ABC) = \lambda$. Zapište pomocí λ dělicí poměry $(BAC), (CBA), (ACB), (CAB)$ a (BCA).*

Řešení: Vztah (2) pro $(ABC) = \lambda$ přepíšeme do tvaru $A = \lambda B + (1 - \lambda)C$. Odtud po vydělení λ dostaneme $B = \frac{1}{\lambda}A + (1 - \frac{1}{\lambda})C$. Odtud je zřejmé, že $(BAC) = \frac{1}{\lambda}$. Poznamenejme ještě, že ke stejnému výsledku vede také toto odvození: $(BAC) = \frac{C - B}{C - A} = \frac{1}{\frac{C-A}{C-B}} = \frac{1}{\lambda}$.

Analogicky odvodíme vyjádření dalších dělicích poměrů v rámci dané trojice bodů: $(CBA) = \frac{\lambda}{\lambda - 1}, (ACB) = 1 - \lambda, (CAB) = \frac{1}{1 - \lambda}$ a $(BCA) = 1 - \frac{1}{\lambda}$.

PŘÍKLAD 2.3. *V rovině jsou dány dva pevné body A, B. Určete množinu všech bodů X této roviny, pro které platí*

$$\frac{|AX|}{|BX|} = k,$$

kde k je reálná konstanta.

Řešení: Hledanou množinou je kružnice, které je známá jako „Apolloniova kružnice“. Nalezení její rovnice si usnadníme vhodným umístěním bodů A, B vzhledem k souřadnicovým osám. Konkrétně je umístíme na osu x tak, že $A = [-a, 0]$ a $B = [a, 0]$, kde $a \in R$. Potom má vyšetřovaná množina bodů $X = [x, y]$ rovnici

$$\left(x - \frac{a(k^2 + 1)}{k^2 - 1}\right)^2 + y^2 = \frac{4a^2k^2}{(k^2 - 1)^2},$$

která skutečně odpovídá kružnici.

2.2 Barycentrické souřadnice

Výše uvedené skutečnosti nás mohou přivést k možnosti vyjádření polohy bodu nezávisle na volbě soustavy souřadnic. Bod C můžeme, při zvolených bodech A, B, zapsat takto:

$$C = \frac{1}{1-\lambda}A - \frac{\lambda}{1-\lambda}B.$$

Jedná se o příklad tzv. barycentrických[1] souřadnic.

Barycentrické souřadnice vzhledem ke dvěma bodům

Bod X leží na přímce AB právě tehdy, když existují dvě čísla $\alpha, \beta \in R$ taková, že platí

$$X = \alpha A + \beta B, \quad \alpha + \beta = 1.$$

Tato čísla nazýváme **barycentrickými souřadnicemi** bodu X vzhledem k bodům A, B. Rovnice $X = \alpha A + \beta B$, kde $\alpha + \beta = 1$ se nazývá **bodová rovnice přímky**.

Poznámka. Analogicky můžeme zavést barycentrické souřadnice bodu X vzhledem ke třem, čtyřem, obecně pak k bodům. Proveďte pro $k = 3, 4$.

PŘÍKLAD 2.4. *Napište barycentrické souřadnice středu úsečky AB vzhledem k jejím krajním bodům.*

PŘÍKLAD 2.5. *Napište barycentrické souřadnice těžiště trojúhelníku ABC vzhledem k jeho vrcholům.*

Věta 1. *V prostoru E_k zvolme $k+1$ bodů A_i, $k+1$ čísel α_i a $k+1$ čísel β_i, kde $i \in \{1, 2, ..., k+1\}$. Potom platí:*

a) Bod X definovaný vztahem

$$X = \alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + ... + \alpha_{k+1} A_{k+1}$$

je definován nezávisle na volbě soustavy souřadnic právě tehdy, když

$$\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_{k+1} = 1.$$

b) Vektor $\vec{u}$ definovaný vztahem

$$\vec{u} = \beta_1 A_1 + \beta_2 A_2 + ... + \beta_{k+1} A_{k+1}$$

je definován nezávisle na volbě soustavy souřadnic právě tehdy, když

$$\beta_1 + \beta_2 + ... + \beta_{k+1} = 0.$$

[1] *Barus* znamená řecky *těžký*. Slovem *barycentrum* se označuje *hmotný střed* soustavy těles, většinou kosmických. Použití barycentrických souřadnic má analogii ve výpočtu polohy těžiště soustavy těles. Uvažujme například dvě bodová tělesa o hmotnostech m_1 a m_2, která jsou umístěna v daném pořadí v bodech X a Y. Potom pro souřadnice těžiště T této soustvy dvou těles platí: $T = \frac{m_1 X + m_2 Y}{m_1 + m_2} = \frac{m_1}{m_1 + m_2}X + \frac{m_2}{m_1 + m_2}Y$, kde $\frac{m_1}{m_1 + m_2} + \frac{m_2}{m_1 + m_2} = 1$.

2.3 Afinní zobrazení

Definice 13 (Afinní zobrazení)**.** *Zobrazení f afinního prostoru A do afinního prostoru A' se nazývá afinní, jestliže má tuto vlastnost: Leží-li navzájem různé body B, C, D z prostoru A na přímce, pak jejich obrazy $f(B), f(C), f(D)$ buď splývají, nebo jsou navzájem různé, leží na jedné přímce a jejich dělící poměr se rovná dělícímu poměru jejich vzorů, tj.:*

$$(f(B), f(C); f(D)) = (B, C; D).$$

Každé afinní zobrazení f afinní roviny A_2 do sebe je vzhledem k libovolně zvolené lineární soustavě souřadnic dáno rovnicemi:

$$\begin{array}{rcccccl} f:\ x' & = & a_{11}x & + & a_{12}y & + & b_1 \\ y' & = & a_{21}x & + & a_{22}y & + & b_2 \end{array}, \tag{3}$$

které můžeme zapsat jednou maticovou rovnicí ve tvaru

$$f:\ \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}. \tag{4}$$

Každé afinní zobrazení f v prostoru A_3 můžeme zapsat soustavou rovnic

$$\begin{array}{rcccccccl} g:\ x_1' & = & a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & a_{13}x_3 & + & b_1 \\ x_2' & = & a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & a_{23}x_3 & + & b_2 \\ x_3' & = & a_{31}x_1 & + & a_{32}x_2 & + & a_{33}x_3 & + & b_3 \end{array}, \tag{5}$$

nebo jednou maticovou rovnicí

$$g:\ \begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}. \tag{6}$$

Můžeme říci, že afinním zobrazením prostrou A_n na sebe (hovoříme o afinní transformací prostoru A_n, stručně o afinitě) je každé zobrazení, které lze zapsat maticovou rovnicí

$$\mathbf{X}' = A \cdot \mathbf{X} + B, \tag{7}$$

kde A je čtvercová matice $n-$tého řádu a X, B a X' jsou matice typu $(n, 1)$.

2.4 Souvislost mezi skládáním afinních zobrazení a násobením matic

Pro zjednodušení budme uvažovat pouze *lineární zobrazení.* To jsou afinní transformace s nulovým vektorem posunutí, tj. v rovnicích (3) mají $b_1 = b_2 = 0$.

PŘÍKLAD 2.6. *Jsou dána lineární zobrazení $f, g :$*

$$f : \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \quad g : \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Určete matici M složeného zobrazení

$$g \circ f : \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = M \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Řešení: Pro matici M platí:

$$M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Aa + Bc & Ab + Bd \\ Ca + Dc & Cb + Dd \end{bmatrix}.$$