1 Připomenutí vybraných pojmů

1.1 Grupa

Definice 1 ((Komutativní) grupa)**.** *Grupou $(M, *)$ rozumíme množinu M spolu s operací $*$ na M, která má tyto vlastnosti:*

i) $\forall\, x, y \in M;\ \ x * y \in M,$
Operace $*$ je neomezeně definovaná na M.
(Množina M je uzavřená vzhledem k operaci $*$.)

ii) $\forall\, x, y, z \in M;\ \ x * (y * z) = (x * y) * z,$
Operace (struktura) je asociativní.

iii) $\exists\, e \in M, \forall\, x \in M;\ \ x * e = e * x = x,$
Existuje neutrální prvek vzhledem k $*$.
(Jedná se o strukturu s neutrálním prvkem.)

iv) $\forall\, x \in M, \exists y \in M;\ \ x * y = y * x = e.$
Ke každému prvku existuje prvek inverzní vzhledem k $*$.
(Jedná se o strukturu s inverzními prvky.)

Je-li struktura $(M, *)$ navíc komutativní, nazývá se komutativní grupa nebo též Abelova grupa.

Příklady grup

1. $(Z, +)$, $(Q, +)$, $(R, +)$, $(C, +)$,

2. $(Q - \{0\}, \cdot)$, $(R - \{0\}, \cdot)$, $(C - \{0\}, \cdot)$,

3. Množina povelů $\{$stát, vlevo vbok, vpravo vbok, čelem vzad$\}$ spolu s operací skládání.

$\circ$	pozor	vlevo v bok	vpravo v bok	čelem vzad
pozor	pozor	vlevo v bok	vpravo v bok	čelem vzad
vlevo v bok	vlevo v bok	čelem vzad	pozor	vpravo v bok
vpravo v bok	vpravo v bok	pozor	čelem vzad	vlevo v bok
čelem vzad	čelem vzad	vpravo v bok	vlevo v bok	pozor

4. Uvažujme rovnostranný trojúhelník ABC v rovině ρ. Grupou je potom množina všech transformací roviny, v nichž se trojúhelník zobrazí sám na sebe, spolu s operací skládání transformací (hovoříme o tzv. dihedrální grupě, viz též grupy symetrií).

1.2 Těleso

Tělesem jako algebraickou strukturou rozumíme strukturu jejíž vlastnosti jsou zobecněním vlastností množiny reálných čísel spolu s operacemi sčítání a násobení, tj. struktury $(R, +, \cdot)$.

Definice 2. *Struktura* $(T, +, \cdot)$ *se nazývá těleso, právě když je* $(+, \cdot)$*-distributivní, když struktura* $(T, +)$ *je komutativní grupa (tzv. aditivní grupa tělesa) a když struktura* $(T - \{0\}, \cdot)$*, kde* 0 *je nulový prvek grupy* $(T, +)$*, je grupa (tzv. multiplikativní grupa tělesa* T*). Je-li navíc grupa* $(T - \{0\}, \cdot)$ *komutativní, nazývá se* T *komutativní těleso.*

Příklady těles

1. $(Q, +, \cdot)$,
2. $(R, +, \cdot)$,
3. $(C, +, \cdot)$.

1.3 Vektorový prostor

Definice 3 (Vektorový prostor)**.** *Nechť* T *je komutativní těleso. Množinu* V *nazveme vektorovým prostorem nad tělesem* T*, právě když jsou na* V *definovány dvě operace:* (i) *sčítání: libovolné dvojici* $\vec{u} \in V$, $\vec{v} \in V$ *je jednoznačně přiřazen prvek* $\vec{u} + \vec{v} \in V$, (ii) *násobení prvkem z tělesa* T *(skalárem): výsledkem násobení vektoru* $\vec{u} \in V$ *skalárem* $a \in T$ *je vektor* $a\vec{u} \in V$*, které splňují následující vlastnosti:*

a) *Struktura* $(V, +)$ *je komutativní grupa.*

b) *Distributivnost:* $(a + b)\vec{u} = a\vec{u} + b\vec{u}, \quad a(\vec{u} + \vec{v}) = a\vec{u} + a\vec{v}$.

c) *Existence jednotkového prvku skalárního násobení:* $1 \cdot \vec{u} = \vec{u}$.

Příklady vektorových prostorů

1. Množina R^2 všech uspořádaných dvojic reálných čísel s operacemi sčítání uspořádaných dvojic a násobení reálným číslem definovanými následujícím způsobem: $(a_1, a_2) + (b_1, b_2) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2)$, $k \cdot (a_1, a_2) = (ka_1, ka_2)$ (jedná se o tzv. **aritmetický vektorový prostor** R^2 nad tělesem reálných čísel).

2. Množina geometrických vektorů v rovině (orientovaných úseček) spolu s operací skládání vektorů a násobení vektoru reálným číslem, jak jsou známy ze školské matematiky.

1.4 Afinní bodový prostor

Definice 4 (Afinní bodový prostor)**.** *Neprázdnou množinu A_n (její prvky jsou tzv. body) nazveme afinním bodovým prostorem dimenze n, jestliže je dán vektorový prostor V_n dimenze n a zobrazení*

$$g: \ A_n \times A_n \to V_n$$

těchto vlastností:

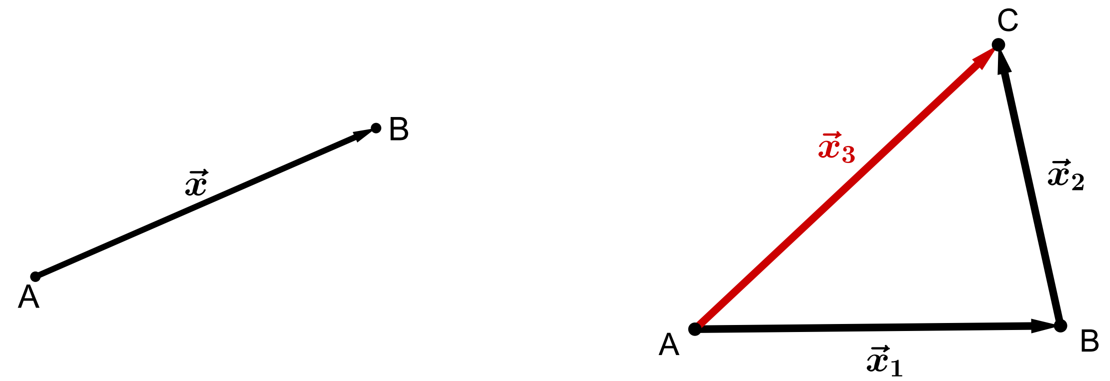
1. Pro každý bod $A \in A_n$ a pro každý vektor $\vec{x} \in V_n$ existuje jediný bod $B \in A_n$ tak, že

$$g(A, B) = \vec{x} \qquad \text{t.j.} \qquad B = A + \vec{x}.$$

2. Pro každé tři body $A, B, C \in A_n$ platí, že

$$g(A, C) = g(A, B) + g(B, C).$$

Vektorový prostor V_n nazýváme vektorovým zaměřením afinního prostoru A_n.



Příklady afinního bodového prostoru

1. Jednoprvková množina se zaměřením $V_0 = \{\vec{o}\}$ je afinní bodový prostor dimenze 0.

2. Eukleidovské prostory E_1 (přímka), E_2 (rovina), E_3 ((trojrozměrný) prostor).

3. Samotný vektorový prostor V_n splňuje definici afinního bodového prostoru (naopak to samozřejmě neplatí, nelze říci, že afinní bodový prostor je zároveň vektorovým prostorem). Platí

$$g(\vec{u}, \vec{v}) = \vec{v} - \vec{u}.$$

1.5 Afinní souřadnice bodů

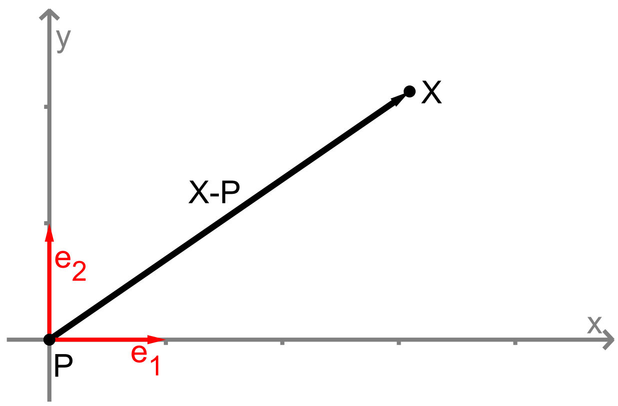
Definice 5 (Afinní soustava souřadnic - repér)**.** *Nechť P je libovolný bod z afinního prostoru A_n, $n > 0$. Nechť $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n)$ je báze vektorového zaměření V_n prostoru A_n. Potom uspořádanou $(n+1)$-tici*

$$\varphi = (P, \vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n)$$

nazýváme afinní soustavou souřadnic φ (též repérem φ) v prostoru A_n.

Souřadnicemi bodu $X \in A_n$ v soustavě souřadnic φ budeme rozumět souřadnice vektoru $X - P$ v bázi $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n)$.

Definice 6 (Kartézská soustava souřadnic)**.** *Kartézskou soustavou souřadnic rozumíme afinní soustavu souřadnic $(P; \vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n)$, kde $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n)$ je ortonormální báze.*



1.6 Eukleidovský bodový prostor

Definice 7 (Eukleidovský bodový prostor)**.** *Eukleidovským bodovým prostorem E_n rozumíme afinní bodový prostor, na jehož zaměření je definován* **skalární součin***.*

Definice 8 (Skalární součin)**.** *Skalárním součinem rozumíme operaci, která každé dvojici vektorů $\vec{u}, \vec{v} \in V$ přiřazuje reálné číslo (skalár) $\vec{u} \cdot \vec{v} \in R$ tak, že platí:*

1. $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$, *(SYMETRIE)*

2. $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$, *(BILINEARITA, vlastnosti 2 a 3)*

3. $(k\vec{u}) \cdot \vec{v} = k(\vec{u} \cdot \vec{v})$,

4. $\vec{u} \cdot \vec{u} \geq 0 \ \wedge [\vec{u} \cdot \vec{u} = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{o}]$. *(POZITIVITA)*

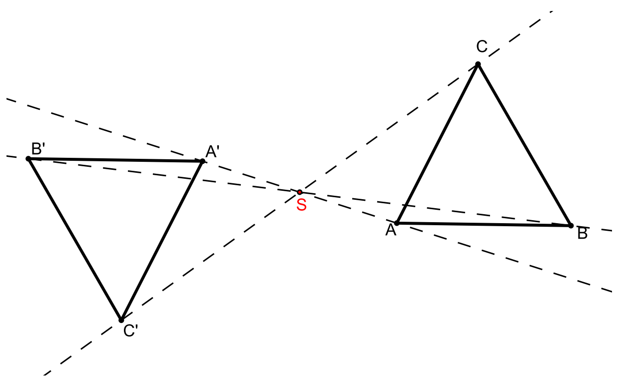
1.7 Zobrazení

Definice 9 (Geometrické zobrazení)**.** *Zobrazením (geometrickým zobrazením) rozumíme předpis, kterým je libovolnému bodu X (který je prvkem dané množiny, např. roviny) jako jeho obraz jednoznačně přiřazen bod $X' = f(X)$.*

Definice 10 (Vzájemně jednoznačné zobrazení)**.** *Vzájemně jednoznačným zobrazením rozumíme zobrazení, které je prosté a zároveň je zobrazením na množinu (tj. že dvěma různým bodům (vzorům) jsou přiřazeny dva různé obrazy a zároveň platí, že každý bod množiny, do níž zobrazujeme, je obrazem nějakého bodu z množiny vzorů).*

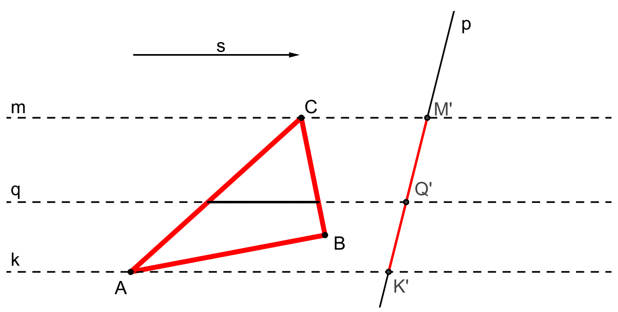
Příklady geometrických zobrazení

1. Příkladem vzájemně jednoznačného geometrického zobrazení je středová souměrnost (stejně jako všechna ostatní shodná zobrazení i stejnolehlost).



Obrázek 1: Středová souměrnost se středem S

2. Příkladem geometrického zobrazení v rovině, které není prosté, je rovnoběžné promítání do přímky, které je dáno směrem $\vec{s}$ a přímkou p, viz Obr. 2. Z obrázku

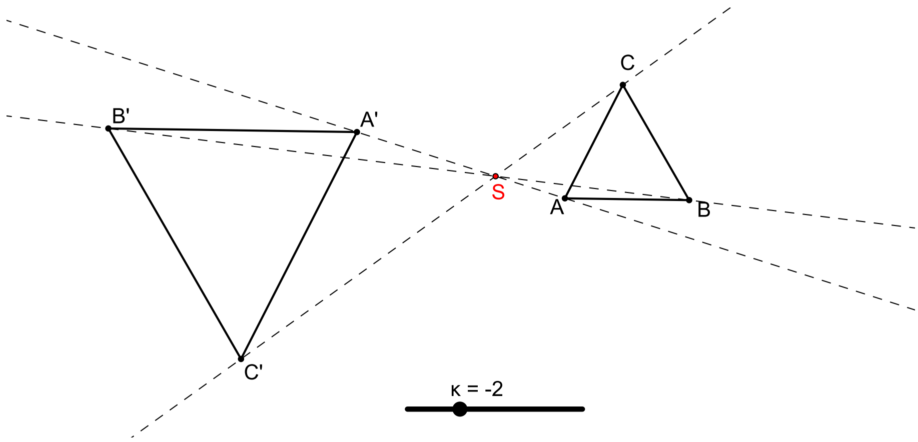


Obrázek 2: Rovnoběžné promítání ve směru $\vec{s}$ z roviny do přímky p

je patrné, že všechny body přímky rovnoběžné se směrem $\vec{s}$ se zobrazují do jednoho bodu. Například body přímek k, m, q se v uvedeném pořadí zobrazují do bodů K', M', Q'.

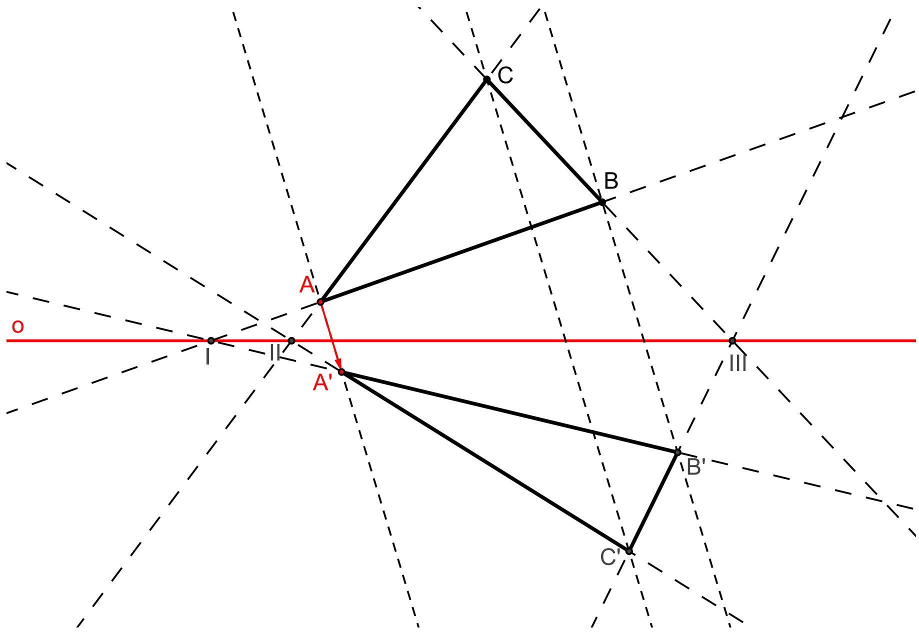
Další příklady geometrických zobrazení:

3. Stejnolehlost.



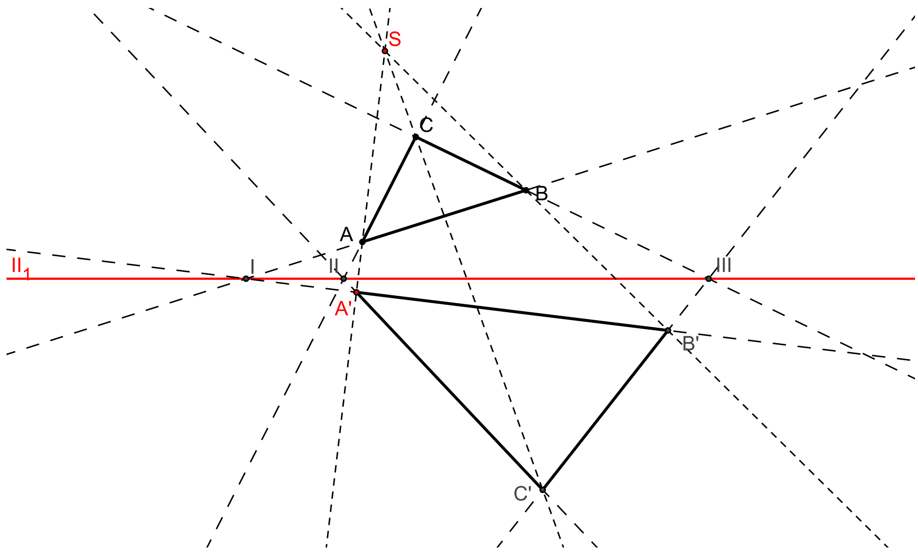
Obrázek 3: Stejnolehlost se středem S a s koeficientem $\kappa = -2$

4. Osová afinita.



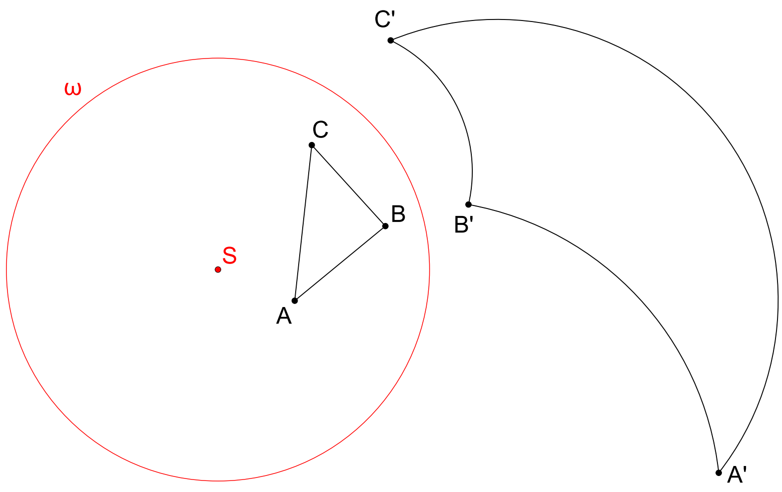
Obrázek 4: Osová afinita daná osou o a dvojicí bodů A, A'

5. Středová kolineace.



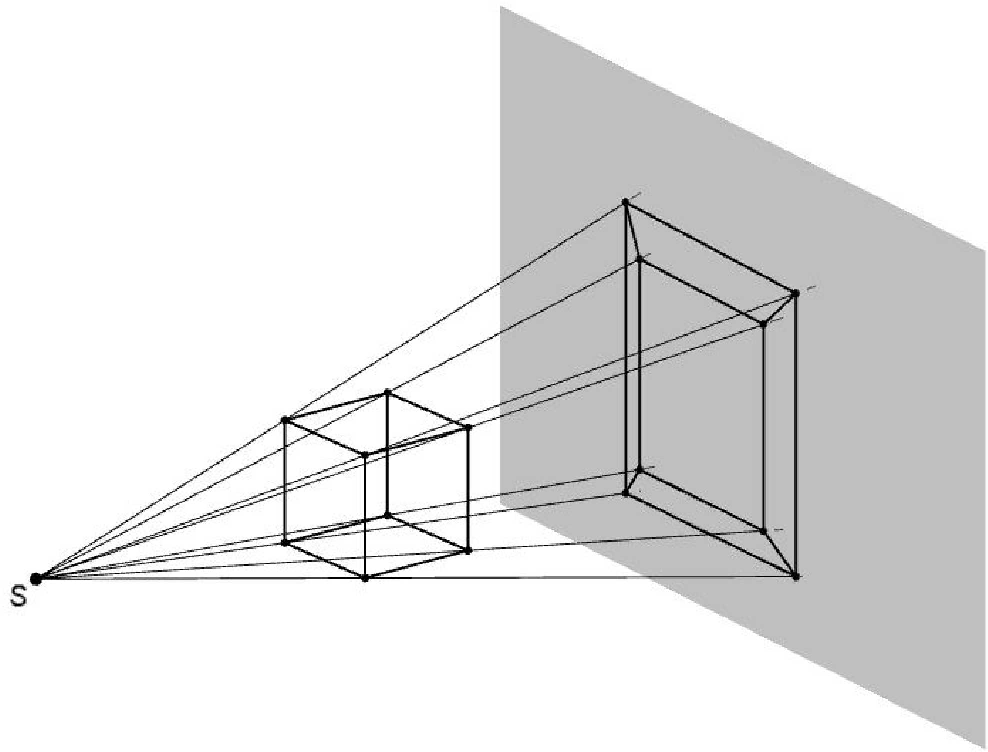
Obrázek 5: Středová kolineace daná středem S, osou o a dvojicí bodů A, A'

6. Kruhová inverze.



Obrázek 6: Kruhová inverze daná kružnicí ω

7. Středové promítání.



Obrázek 7: Středové promítání z trojrozměrného prostoru do roviny

PŘÍKLAD 1.1. *Pomocí programu GeoGebra vyzkoumejte, zda se v následujících zobrazeních zobrazí střed úsečky zase na střed úsečky: stejnolehlost, osová afinita, středová kolineace, kruhová inverze.*