11 Analytické vyjádření shodnosti

11.1 Přehled analytických vyjádření shodných zobrazení v E_2

11.1.1 OSOVÁ SOUMĚRNOST

Osová souměrnost $\mathbf{O}(o)$ podle osy o s obecnou rovnicí $o : ax + by + c = 0$:

$$x' = x - \frac{2a}{a^2 + b^2}(ax + by + c)$$
$$y' = y - \frac{2b}{a^2 + b^2}(ax + by + c)$$

PŘÍKLAD 11.1. *V eukleidovské rovině je dána souměrnost podle přímky $p : 3x - 4y + 1 = 0$. Napište rovnice této souměrnosti.*

PŘÍKLAD 11.2. *Napište rovnice souměrnosti podle přímky $o : 2x - 3y + 1 = 0$.*

PŘÍKLAD 11.3. *Napište rovnice osové souměrnosti, zobrazující počátek na bod $[1, 5]$.*

11.1.2 OTOČENÍ (ROTACE)

Otočení (rotace) $\mathbf{R}(S, \alpha)$ se středem $S = [s_1, s_2]$:

$$x' = (x - s_1)\cos\alpha - (y - s_2)\sin\alpha + s_1$$
$$y' = (x - s_1)\sin\alpha + (y - s_2)\cos\alpha + s_2$$

Po úpravě:

$$x' = x\cos\alpha - y\sin\alpha + s_1 - s_1\cos\alpha + s_2\sin\alpha$$
$$y' = x\sin\alpha + y\cos\alpha + s_2 - s_1\sin\alpha - s_2\cos\alpha$$

PŘÍKLAD 11.4. *Napište rovnice otočení se středem $S[1, -2]$ o úhel $\alpha = 60°$.*

11.1.3 STŘEDOVÁ SOUMĚRNOST

Středová souměrnost $\mathbf{S}(S)$ se středem $S = [s_1, s_2]$:

$$x' = -x + 2s_1$$
$$y' = -y + 2s_2$$

PŘÍKLAD 11.5. *Napište rovnice středové souměrnosti $\mathbf{S}(S)$ se středem $S[-2, 3]$.*

11.1.4 POSUNUTÍ (TRANSLACE)

Posunutí (translace) $\mathbf{T}(\vec{p})$ určené vektorem $\vec{p} = [p_1, p_2]$:

$$\begin{aligned} x' &= x + p_1 \\ y' &= y + p_2 \end{aligned}$$

PŘÍKLAD 11.6. *Napište rovnice posunutí, které je určeno vzorem* $A = [-1, 3]$ *a jeho obrazem* $A' = [4, 2]$.

11.1.5 POSUNUTÉ ZRCADLENÍ

Posunuté zrcadlení s osou v souřadnicové ose x:

$$\begin{aligned} x' &= x + p \\ y' &= -y \end{aligned}$$

11.2 Analytická vyjádření vybraných shodných zobrazení v E_3

Některá shodná zobrazení v prostoru:

11.2.1 POSUNUTÍ (TRANSLACE)

Posunutí určené vektorem $\vec{p} = (p_1, p_2, p_3)$:

$$\begin{aligned} x' &= x + p_1 \\ y' &= y + p_2 \\ z' &= z + p_3. \end{aligned}$$

11.2.2 OTOČENÍ (ROTACE)

Otočení o úhel α kolem osy z:

$$\begin{aligned} x' &= x\cos\alpha - y\sin\alpha \\ y' &= x\sin\alpha + y\cos\alpha \\ z' &= z. \end{aligned}$$

11.2.3 STŘEDOVÁ SOUMĚRNOST

Souměrnost podle počátku $O = (0, 0, 0)$:

$$\begin{aligned} x' &= -x \\ y' &= -y \\ z' &= -z. \end{aligned}$$

11.2.4 OSOVÁ SOUMĚRNOST

Souměrnost podle osy z:

$$\begin{aligned} x' &= -x \\ y' &= -y \\ z' &= z. \end{aligned}$$

11.2.5 ROVINOVÁ SOUMĚRNOST

Souměrnost podle roviny (x, y):

$$\begin{aligned} x' &= x \\ y' &= y \\ z' &= -z. \end{aligned}$$

11.2.6 ŠROUBOVÝ POHYB

Šroubový pohyb (torze) s parametrem (redukovanou výškou závitu) v_0 a s osou v ose z:

$$\begin{aligned} x' &= x \cos\alpha - y \sin\alpha \\ y' &= x \sin\alpha + y \cos\alpha \\ z' &= z + v_0\alpha. \end{aligned}$$

11.3 Rovnice shodnosti v rovině

Každou afinitu f v rovině můžeme zapsat soustavou rovnic

$$f: \begin{array}{rcrcrcr} x' &=& a_{11}x &+& a_{12}y &+& b_1 \\ y' &=& a_{21}x &+& a_{22}y &+& b_2, \end{array} \tag{72}$$

kterou přepíšeme užitím matic do tvaru

$$f: \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \tag{73}$$

a stručně vyjádříme rovnicí

$$f: X' = A \cdot X + B. \tag{74}$$

Jak poznáme, že afinita (72) **je shodností?**

Je-li tato afinita shodností, platí pro všechny dvojice bodů $X[x_1, x_2], Y[y_1, y_2]$ a jejich obrazy $X'[x_1', x_2'], Y'[y_1', y_2']$ vztah $|X'Y'| = |XY|$, z něhož po dosazení souřadnic uvedených bodů dostaneme

$$\sqrt{(y_1' - x_1')^2 + (y_2' - x_2')^2} = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2}, \tag{75}$$

po umocnění obou stran na druhou

$$(y_1' - x_1')^2 + (y_2' - x_2')^2 = (y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2. \tag{76}$$

Nyní do levé strany (76) dosadíme z (72) (protože se body $X[x_1, x_2], Y[y_1, y_2]$ zobrazují v daném pořadí na body $X'[x_1', x_2'], Y'[y_1', y_2']$, dosazujeme takto: $x_1' = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + b_1,\ x_2' = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + b_2;\ y_1' = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + b_1,\ y_2' = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + b_2$). Dostaneme rovnost

$$\begin{aligned} (a_{11}y_1 + a_{12}y_2 - a_{11}x_1 - a_{12}x_2)^2 + (a_{21}y_1 + a_{22}y_2 - a_{21}x_1 + a_{22}x_2)^2 \\ = (y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2, \end{aligned} \tag{77}$$

kterou postupně upravíme na tvar obsahující výrazy $(y_1 - x_1)$ a $(y_2 - x_2)$. Nejprve vytkneme společné koeficienty

$$\begin{aligned} [a_{11}(y_1 - x_1) + a_{12}(y_2 - x_2)]^2 + [a_{21}(y_1 - x_1) + a_{22}(y_2 - x_2)]^2 \\ = (y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2, \end{aligned} \tag{78}$$

potom umocníme závorky na levé straně a zjednodušíme ji na tvar polynomu s proměnnými $(y_1 - x_1)$ a $(y_2 - x_2)$

$$(a_{11}^2 + a_{21}^2)(y_1 - x_1)^2 + 2(a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22})(y_1 - x_1)(y_2 - x_2) + (a_{12}^2 + a_{22}^2)(y_2 - x_2)^2 \\ = (y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2. \quad (79)$$

Nyní diskutujeme, za jakých podmínek je v (79) splněna rovnost levé strany s pravou stranou (využijeme toho, že dva polynomy jsou si rovny pro všechny hodnoty z příslušného oboru právě tehdy, když se rovnají koeficienty u sobě odpovídajících členů). Zjistíme tak, že rovnost $|X'Y'| = |XY|$ nastává právě tehdy, když jsou pro prvky matice A (tj. koeficienty soustavy (72)) splněny vztahy

$$\begin{aligned} a_{11}^2 + a_{21}^2 &= 1, \\ a_{12}^2 + a_{22}^2 &= 1, \\ a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22} &= 0, \end{aligned} \qquad (80)$$

které lze stručně vyjádřit rovností

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \qquad (81)$$

Odpověď na výše uvedenou otázku je tedy taková, že **rovnice** (72) **je rovnicí shodnosti, právě když platí**

$$A^T \cdot A = E, \qquad (82)$$

kde E je jednotková matice, jinak řečeno, když je matice A **ortonormální**.

Podobu rovnic shodnosti v rovině lze díky podmínce (81) podstatně zjednodušit. Říká nám, že afinní zobrazení určené rovnicemi

$$\begin{aligned} x' &= a_{11}x + a_{12}y + b_1 \\ y' &= a_{21}x + a_{22}y + b_2, \end{aligned}$$

je shodností právě tehdy, když platí následující rovnosti:

$$\begin{aligned} a_{11}^2 + a_{21}^2 = a_{12}^2 + a_{22}^2 &= 1 \\ a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22} = a_{12}a_{11} + a_{22}a_{21} &= 0 \end{aligned}$$

Potom je ale zřejmé, že existuje úhel $\alpha \in \langle 0^\circ; 360^\circ)$ takový, že lze napsat

$$\begin{aligned} a_{11} &= \cos\alpha, \\ a_{21} &= \sin\alpha, \\ a_{12}\cos\alpha + a_{22}\sin\alpha &= 0, \\ a_{22} &= \varepsilon\cos\alpha, \\ a_{12} &= -\varepsilon\sin\alpha, \text{kde } \varepsilon = \pm 1. \end{aligned}$$

Hodnota ε určuje, zda se jedná o shodnost přímou ($\varepsilon = 1$) nebo nepřímou ($\varepsilon = -1$). Každou přímou shodnost v rovině potom můžeme vyjádřit rovnicemi ve tvaru

$$\begin{aligned} x_1' &= x_1 \cos\alpha - x_2 \sin\alpha + b_1 \\ x_2' &= x_1 \sin\alpha + x_2 \cos\alpha + b_2 \end{aligned}$$

a každou nepřímou shodnost v rovině rovnicemi ve tvaru

$$\begin{aligned} x_1' &= x_1 \cos\alpha + x_2 \sin\alpha + b_1 \\ x_2' &= x_1 \sin\alpha - x_2 \cos\alpha + b_2. \end{aligned}$$

Poznámky.

1. Platí $A^T \cdot A = E$. Potom je ale $A^T = A^{-1}$ a platí tedy i rovnost $A \cdot A^T = E$.

2. Zobrazení, pro která platí $|\det A| = 1$ nazýváme ekviafinní zobrazení, stručně **ekviafinity**. Je zřejmé, že každá shodnost je ekviafinita. Platí toto tvrzení i obráceně? Můžeme říci, že každá ekviafinita je shodností?

3. Je třeba si uvědomit, že při shodném zobrazení mezi eukleidovskými prostory různých dimenzí není matice A čtvercová. Potom výše uvedené úvahy o inverzní matici nemají smysl a v platnosti zůstává pouze původní podmínka $A^T \cdot A = E$.