5 Analytické vyjádření afinního zobrazení

5.1 Afinní zobrazení

Definice 21 (Afinní zobrazení). *Zobrazení f afinního prostoru A do afinního prostoru A' se nazývá afinní, jestliže má tuto vlastnost: Leží-li navzájem různé body B, C, D z prostoru A na přímce, pak jejich obrazy $f(B), f(C), f(D)$ buď splývají, nebo jsou navzájem různé, leží na jedné přímce a jejich dělící poměr se rovná dělícímu poměru jejich vzorů, tj.:*

$$(f(B), f(C); f(D)) = (B, C; D).$$

Každé afinní zobrazení f afinní roviny A_2 do sebe je vzhledem k libovolně zvolené lineární soustavě souřadnic dáno rovnicemi:

$$\begin{array}{rrcrcrcr} f: & x' & = & a_{11}x & + & a_{12}y & + & b_1 \\ & y' & = & a_{21}x & + & a_{22}y & + & b_2 \end{array}$$

Každé afinní zobrazení f v prostoru A_3 můžeme zapsat soustavou rovnic

$$\begin{array}{rrcrcrcrcr} f: & x_1' & = & a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & a_{13}x_3 & + & b_1 \\ & x_2' & = & a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & a_{23}x_3 & + & b_2 \\ & x_3' & = & a_{31}x_1 & + & a_{32}x_2 & + & a_{33}x_3 & + & b_3 \end{array}$$

5.2 Asociovaný homomorfismus

Místo homomorfismus říkáme též lineární zobrazení.

Definice 22 (Homomorfismus). *Zobrazení φ vektorového prostoru V do vektorového prostoru V' se nazývá homomorfismus (lineární zobrazení), jestliže pro všechna $\vec{u}, \vec{v} \in V$, $k \in \mathbb{T}$ (místo obecného tělesa $\mathbb{T}$ můžeme uvažovat $\mathbb{R}$) platí:*

$$\begin{array}{lrl} (1) & \varphi(\vec{u} + \vec{v}) & = \varphi(\vec{u}) + \varphi(\vec{v}), \\ (2) & \varphi(k\vec{u}) & = k\varphi(\vec{u}). \end{array}$$

Definice 23 (Asociovaný homomorfismus zobrazení f). *Uvažujme afinní zobrazení f prostoru A do prostoru A', např. $f: E_2 \to E_2$. Potom* **asociovaným** *(tj. jednoznačně přiřazeným)* **homomorfismem** *afinního zobrazení f rozumíme lineární zobrazení φ, které zobrazuje zaměření V prostoru A do zaměření V' prostoru A' takto:*

$$\vec{u} = Y - X \Rightarrow \varphi(\vec{u}) = f(Y) - f(X), \tag{3}$$

kde X, Y jsou body z A, $\vec{u} \in V$; $f(X), f(Y)$ body z A', $\varphi(\vec{u}) \in V'$.

PŘÍKLAD 5.1. *Ukažte, že se skutečně jedná o lineární zobrazeni dle definice 22.*

Věta 31 (O jednoznačném určení φ)**.** *Ke každému afinnímu zobrazení f prostoru A je jednoznačně přiřazen (asociován) homomorfismus φ zaměření V prostoru A do zaměření V' prostoru A' takový, že:*

$$\varphi(B - A) = f(B) - f(A).$$

Důkaz. Ukážeme, že výsledek tohoto homomorfismu nezávisí na umístění vektoru, pouze na zobrazení f. □

Věta 32 (O jednoznačném určení f)**.** *Zobrazení f je jednoznačně určeno, je-li dán homomorfismus φ a obraz $f(P)$ jednoho bodu P:*

$$f(X) = f(P) + \varphi(u).$$

Důkaz. $\varphi(X - P) = f(X) - f(P) \longrightarrow f(X) = f(P) + \varphi(X - P)$ □

Věta 33 (O určenosti afinního zobrazení)**.** *Mějme dva afinní bodové prostory A_n, A'_m. Nechť $M_0, M_1, M_2, ..., M_n$ je $n+1$ lineárně nezávislých bodů v A_n, $M'_0, M'_1, ..., M'_n$ $n + 1$ libovolně zvolených bodů v A'_m. Pak existuje právě jedno afinní zobrazení f prostoru A_n do A'_m, které přiřazuje bodům M_j body M'_j tak, že*

$$M'_j = f(M_j);\ \ j = 0, 1, ..., n.$$

5.3 Rovnice afinního zobrazení z A_2 do A'_2

Nechť afinní bodový prostor A_2 je určen počátkem P a bází $\vec{e}_1, \vec{e}_2$, tzn. $A_2 = \{P; \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$. Podobně nechť $A'_2 = \{Q; \vec{d}_1, \vec{d}_2\}$. Nechť f je afinní zobrazení A_2 do A'_2 a φ asociované zobrazení k f tak, že

$$\begin{aligned} \varphi(\vec{e}_1) &= a_{11}\vec{d}_1 + a_{21}\vec{d}_2 \\ \varphi(\vec{e}_2) &= a_{12}\vec{d}_1 + a_{22}\vec{d}_2. \end{aligned} \tag{4}$$

tzn. koeficienty a_{ij} jsou souřadnice vektorů $\varphi(\vec{e}_1)$, $\varphi(\vec{e}_2)$ v bázi zaměření prostoru A_2,

$$f(P) = Q + b_1\vec{d}_1 + b_2\vec{d}_2\,, \tag{5}$$

tzn. počátek $P \in A_2$ se zobrazuje do bodu $f(P) \in A'_2$, který má při počátku Q souřadnice $[b_1, b_2]$.

Nyní určíme vztah mezi souřadnicemi libovolného bodu $X \in A_2$ a jeho obrazu $f(X) \in A'_2$. Nejprve vyjádřeme souřadnice X, $f(X)$ takto

$$X = P + x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2\,, \tag{6}$$

$$f(X) = Q + x'_1\vec{d}_1 + x'_2\vec{d}_2\,. \tag{7}$$

Zobrazíme-li bod X v afinitě f, můžeme dle uvedených vlastností zobrazení f a φ psát:

$$f(X) = f(P) + x_1\varphi(\vec{e}_1) + x_2\varphi(\vec{e}_2).$$

Po dosazení z (4) a (5) dostáváme

$$f(X) = Q + b_1\vec{d}_1 + b_2\vec{d}_2 + x_1(a_{11}\vec{d}_1 + a_{21}\vec{d}_2) + x_2(a_{12}\vec{d}_1 + a_{22}\vec{d}_2).$$

Po úpravě a porovnání koeficientů při $\vec{d}_i$ s vyjádřením (7) dostáváme hledané rovnice

$$\begin{aligned} x'_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + b_1 \\ x'_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + b_2. \end{aligned} \tag{8}$$

Nyní ještě určíme rovnice asociovaného zobrazení φ. Nechť vektor $\vec{u} \in V_2$ se zobrazí do vektoru $\varphi(\vec{u}) \in V'_2$. Pro souřadnice vzoru $\vec{u}$ a obrazu $\varphi(\vec{u})$ platí

$$\vec{u} \;=\; u_1\vec{e}_1 + u_2\vec{e}_2; \tag{9}$$

$$\varphi(\vec{u}) \;=\; u'_1\vec{d}_1 + u'_2\vec{d}_2 \tag{10}$$

Na (9) aplikujeme zobrazení φ a upravíme dle (4). Dostaneme

$$\varphi(\vec{u}) = u_1\varphi(\vec{e}_1) + u_2\varphi(\vec{e}_2) = u_1(a_{11}\vec{d}_1 + a_{21}\vec{d}_2) + u_2(a_{12}\vec{d}_1 + a_{22}\vec{d}_2).$$

Po úpravě a srovnání s (10) dostaneme hledané rovnice asociovaného zobrazení:

$$\begin{aligned} u'_1 &= a_{11}u_1 + a_{12}u_2 \\ u'_2 &= a_{21}u_1 + a_{22}u_2 \end{aligned} \tag{11}$$

Jinou formou zápisu (8) je soustava rovnic

$$\begin{aligned} x'_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + b_1 \\ x'_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + b_2 \end{aligned}$$

maticový zápis soustavy

$$\begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix},$$

případně maticová rovnice

$$\mathbf{X}' = A \cdot \mathbf{X} + B.$$

5.4 Rovnice afinního zobrazení z A_n do A_m

Nechť afinní bodový prostor A_n je určen počátkem P a bází $\vec{e}_1, ..., \vec{e}_n$, tzn. $A_n = \{P; \vec{e}_1, ..., \vec{e}_n\}$. Podobně nechť $A'_m = \{Q; \vec{d}_1, \vec{d}_2, ..., \vec{d}_m\}$. Nechť f je afinní zobrazení A_n do A'_m a φ asociované zobrazení k f tak, že

$$\varphi(\vec{e}_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij}\vec{d}_i\,; \quad j = 1, ..., n, \tag{12}$$

tzn. koeficienty a_{ij} jsou souřadnice vektorů $\varphi(\vec{e}_j)$ v bázi zaměření prostoru A_m,

$$f(P) = Q + \sum_{i=1}^{m} b_i\vec{d}_i\,, \tag{13}$$

tzn. počátek $P \in A_m$ se zobrazuje do bodu $f(P) \in A'_m$, který má při počátku Q souřadnice b_i.

S ohledem na výše uvedené úmluvy nyní určíme vztah mezi souřadnicemi libovolného bodu $X \in A_n$ a jeho obrazu $f(X) \in A'_m$. Vyjádřeme souřadnice $X,\ f(X)$:

$$X = P + \sum_{j=1}^{n} x_j\vec{e}_j\,, \tag{14}$$

$$f(X) = Q + \sum_{i=1}^{m} x'_i\vec{d}_i\,. \tag{15}$$

Zobrazíme-li bod X v afinitě f, můžeme dle uvedených vlastností zobrazení f a φ psát:

$$f(X) = f(P) + \sum_{j=1}^{n} x_j\phi(\vec{e}_j).$$

Po dosazení z (12) a (13) dostáváme

$$f(X) = Q + \sum_{i=1}^{m} b_i\vec{d}_i + \sum_{j=1}^{n} x_j \sum_{i=1}^{m} a_{ij}\vec{d}_i,$$

po úpravě

$$f(X) = Q + \sum_{i=1}^{m}(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + b_i)\vec{d}_i. \tag{16}$$

Porovnáme-li koeficienty při $\vec{d}_i$ ve vyjádřeních (15) a (16), dostáváme hledané rovnice

$$x'_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + b_i, \quad i = 1, 2, ..., m \tag{17}$$

Nyní ještě určíme rovnice asociovaného zobrazení φ. Nechť vektor $\vec{u} \in V_n$ se zobrazí do vektoru $\varphi(\vec{u}) \in V'_m$. Pro souřadnice vzoru $\vec{u}$ a obrazu $\varphi(\vec{u})$ platí

$$\vec{u} = \sum_{j=1}^{n} u_j \vec{e}_j; \tag{18}$$

$$\varphi(\vec{u}) = \sum_{i=1}^{m} u'_i \vec{d}_i \tag{19}$$

Na (18) aplikujeme zobrazení φ a upravíme dle (12). Dostaneme

$$\varphi(\vec{u}) = \sum_{j=1}^{n} u_j \varphi(\vec{e}_j) = \sum_{j=1}^{n} u_j \sum_{i=1}^{m} a_{ij} \vec{d}_i.$$

Po úpravě

$$\varphi(\vec{u}) = \sum_{i=1}^{m} (\sum_{j=1}^{n} a_{ij} u_j) \vec{d}_i. \tag{20}$$

Srovnáním (20) s (19) dostaneme hledané rovnice asociovaného zobrazení:

$$u'_i = \sum_{j}^{n} a_{ij} u_j, \quad i = 1, ..., m \tag{21}$$

Jinou formou zápisu (17) je soustava rovnic

$$\begin{array}{ccl} x'_1 & = & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n + b_1 \\ x'_2 & = & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n + b_2 \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots & \\ x'_n & = & a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n + b_n, \end{array}$$

maticový zápis soustavy

$$\begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ . \\ . \\ . \\ x'_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ . & . & ... & . \\ . & . & ... & . \\ . & . & ... & . \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ . \\ . \\ b_n \end{bmatrix},$$

případně maticová rovnice

$$\mathbf{X}' = A \cdot \mathbf{X} + B.$$

PŘÍKLAD 5.2. *Rovnoběžné promítání prostoru* A_3 *do průmětny* $\pi \subset A_3$, *vzhledem k pevné lineární soustavě souřadnic prostoru* A_3, *je-li dána průmětna* π *rovnicí* $2x_1 + x_2 - x_3 + 2 = 0$ *a směr promítání je určen vektorem* $\vec{s} = (2; 1; 3)$.

PŘÍKLAD 5.3. *Určete rovnice afinního zobrazení* $f : A_3 \to A_2$, *které bodům* $A = [1, 2, 3]$, $B = [0, 1, 1]$, $C = [1, -1, 2]$, $D = [3, 0, 1]$ *přiřazuje v daném pořadí body* $A' = [-1, 3]$, $B = [0, 2]$, $C = [0, 0]$, $D = [3, 1]$.

5.5 Skládání afinních zobrazení

Nechť f_1 je afinní zobrazení prostoru A do A', f_2 afinní zobrazení prostoru A' do A''. Jestliže každému bodu $X \in A$ je v f_1 přiřazen bod $f_1(X) \in A'$ a bodu $f_1(X)$ přiřazen bod $f_2[f_1(X)] \in A''$, říkáme, že zobrazení f přiřazující bodu X bod $f_2[f_1(X)]$ vzniklo složením zobrazení f_1 a f_2. Zapisujeme $f = f_2 \cdot f_1$, $f = f_2 f_1$ nebo $f = f_2(f_1(X))$.

Věta 34. *Složením dvou afinních zobrazení* f_1, f_2 *vznikne afinní zobrazení* f. *Zobrazení* φ *asociované k* f *vznikne složením zobrazení* φ_1, φ_2 *asociovaných po řadě k* f_1, f_2.

PŘÍKLAD 5.4. *V prostoru* E_2 *jsou dány dvě středové souměrnosti* S *a* O. *Určete zobrazení* $Z_1 = SO$ *a* $Z_2 = OS$.

PŘÍKLAD 5.5. *V prostoru* E_n *je dáno posunutí* T *a středová souměrnost* S. *Určete zobrazení* $Z_1 = TS$ *a* $Z_2 = ST$.