3 Dělicí poměr

Dělicím poměrem zde rozumíme číslo, které jednoznačně udává polohu bodu na přímce vzhledem ke dvěma pevně daným bodům této přímky.

Obrázek 15: Tři kolineární body

Definice 11 (Dělicí poměr)**.** *Nechť* A, B, C; $A \neq B$, $C \neq B$, *jsou tři body ležící na přímce (tj. tři kolineární body). Dělicím poměrem bodu* C *vzhledem k bodům* A, B *rozumíme reálné číslo* λ, *které zapisujeme* (ABC), *a pro jehož absolutní hodnotu platí*

$$|(ABC)| = \frac{|AC|}{|BC|}, \tag{1}$$

přitom pro bod C *ležící vně úsečky* AB *je* $(ABC) > 0$ *a pro bod* C *ležící uvnitř* AB *je* $(ABC) < 0$. *Pro* $C = A$ *je zřejmě* $(ABC) = 0$.

Poznámka. Uvedená definice zavádí dělicí poměr pomocí podílu vzdáleností bodu C od daných bodů A, B. Protože vzdálenosti jsou kladné, nepřináší jejich podíl žádnou informaci o znaménku dělicího poměru, kterému pak musí být věnována zvláštní část definice. Tomu se vyhneme, pokud použijeme k zavedení pojmu dělicí poměr odpovídající vektory definované příslušnou trojicí bodů, viz Obr.16.

Obrázek 16: Dělicí poměr bodu C vzhledem k bodům A, B

Definice 12 (Dělicí poměr 2)**.** *Nechť* A, B, C; $A \neq B$, $C \neq B$, *jsou tři body ležící na přímce (tj. tři kolineární body). Potom číslo* λ *definované rovnicí*

$$C - A = \lambda(C - B) \tag{2}$$

značíme (ABC) *a nazýváme dělicím poměrem bodu* C *vzhledem k bodům* A, B.

Poznámka. Ve vztahu (2) je obsažena kompletní informace o čísle λ, tj. o jeho absolutní hodnotě i o znaménku. Pro snazší zapamatování si můžeme (2) přepsat do tvaru

$$\lambda = \frac{C - A}{C - B},$$

který sice není formálně správně, ale jasně koresponduje se vztahem (1). Smysl získá až dosazením souřadnic bodů $A = [a_1; a_2]$, $B = [b_1; b_2]$, $C = [c_1; c_2]$:

$$\lambda = \frac{c_1 - a_1}{c_1 - b_1} = \frac{c_2 - a_2}{c_2 - b_2}.$$

PŘÍKLAD 3.1. *Určete dělicí poměr (ABS) středu S úsečky AB vzhledem k jejím krajním bodům A, B.*

PŘÍKLAD 3.2. *Pro body A, B, C platí $(ABC) = \lambda$. Zapište pomocí λ dělicí poměry $(BAC), (CBA), (ACB), (CAB)$ a (BCA).*

Řešení: Vztah (2) pro $(ABC) = \lambda$ přepíšeme do tvaru $A = \lambda B + (1-\lambda)C$. Odtud po vydělení λ dostaneme $B = \frac{1}{\lambda}A + (1 - \frac{1}{\lambda})C$. Odtud je zřejmé, že $(BAC) = \frac{1}{\lambda}$. Poznamenejme ještě, že ke stejnému výsledku vede také toto odvození: $(BAC) = \frac{C-B}{C-A} = \frac{1}{\frac{C-A}{C-B}} = \frac{1}{\lambda}$.

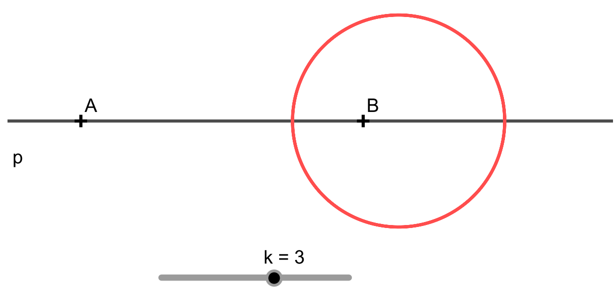
Analogicky odvodíme vyjádření dalších dělicích poměrů v rámci dané trojice bodů: $(CBA) = \frac{\lambda}{\lambda - 1}, (ACB) = 1 - \lambda, (CAB) = \frac{1}{1-\lambda}$ a $(BCA) = 1 - \frac{1}{\lambda}$.

PŘÍKLAD 3.3. *V rovině jsou dány dva pevné body A, B. Určete množinu všech bodů X této roviny, pro které platí*

$$\frac{|AX|}{|BX|} = k,$$

kde k je reálná konstanta.

Řešení: Hledanou množinou je kružnice, které je známá jako „Apolloniova kružnice“, viz Obr. 17. Nalezení její rovnice si usnadníme vhodným umístěním bodů A, B



Obrázek 17: Apolloniova kružnice jako množina bodů X, pro které platí $\frac{|AX|}{|BX|} = 3$

vzhledem k souřadnicovým osám. Konkrétně je umístíme na osu x tak, že $A = [-a, 0]$ a $B = [a, 0]$, kde $a \in R$. Vztah $\frac{|AX|}{|BX|} = k$ přepíšeme do tvaru

$$|AX| = k|BX|$$

a dosadíme uvedené souřadnice bodů A, B, X. Dostaneme

$$\sqrt{(x+a)^2 + y^2} = k\sqrt{(x-a)^2 + y^2}.$$

Po umocnění obou stran rovnosti na druhou a po několika úpravách, mimo jiné také použijeme doplnění na čtverec, dostáváme rovnici vyšetřované množiny bodů $X = [x, y]$ ve tvaru

$$\left(x - \frac{a(k^2+1)}{k^2-1}\right)^2 + y^2 = \frac{4a^2k^2}{(k^2-1)^2},$$

který odpovídá rovnici $(x - s_1)^2 + (y - s_2)^2 = r^2$ kružnice se středem $S = [s_1, s_2]$ a poloměrem r.

3.1 Barycentrické souřadnice

Výše uvedené skutečnosti nás mohou přivést k možnosti vyjádření polohy bodu nezávisle na volbě soustavy souřadnic. Bod C můžeme, při zvolených bodech A, B, zapsat takto:

$$C = \frac{1}{1-\lambda}A - \frac{\lambda}{1-\lambda}B. \tag{3}$$

Jedná se o příklad tzv. barycentrických[1] souřadnic.

Barycentrické souřadnice vzhledem ke dvěma bodům

Bod X leží na přímce AB právě tehdy, když existují dvě čísla $\alpha, \beta \in R$ taková, že platí

$$X = \alpha A + \beta B, \quad \alpha + \beta = 1.$$

Tato čísla nazýváme **barycentrickými souřadnicemi** bodu X vzhledem k bodům A, B. Rovnice $X = \alpha A + \beta B$, kde $\alpha + \beta = 1$ se nazývá **bodová rovnice přímky**.

Poznámka. Analogicky můžeme zavést barycentrické souřadnice bodu X vzhledem ke třem, čtyřem, obecně pak k bodům. Proveďte pro $k = 3, 4$.

PŘÍKLAD 3.4. *Napište barycentrické souřadnice středu úsečky AB vzhledem k jejím krajním bodům.*

Protože $(ABS) = -1$, dostáváme po dosazení do (3)

$$S = \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B. \tag{4}$$

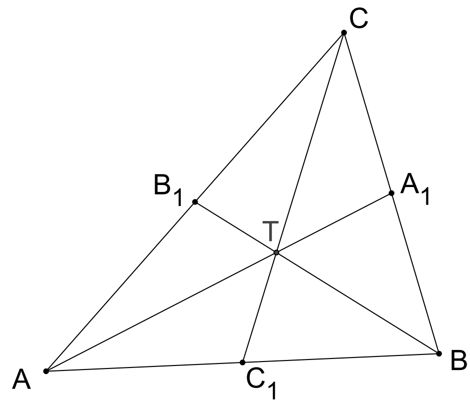
Tento výsledek koresponduje se vztahem $S = \dfrac{A+B}{2}$ pro výpočet souřadnic středu úsečky AB.

PŘÍKLAD 3.5. *Napište barycentrické souřadnice těžiště trojúhelníku ABC vzhledem k jeho vrcholům.*

Viz Obr. 18. Uvažujme těžnici $t_a = AA_1$. Pro T platí $(AA_1T) = -2$, tj. dle (3) je $T = \frac{1}{3}A + \frac{2}{3}A_1$, zároveň víme, že $A_1 = \frac{1}{2}B + \frac{1}{2}C$. Po dosazení druhého vztahu do prvního dostaneme $T = \frac{1}{3}A + \frac{2}{3}(\frac{1}{2}B + \frac{1}{2}C)$, po úpravě pak konečný vztah

$$T = \frac{1}{3}A + \frac{1}{3}B + \frac{1}{3}C. \tag{5}$$

[1] *Barus* znamená řecky *těžký*. Slovem *barycentrum* se označuje *hmotný střed* soustavy těles, většinou kosmických. Použití barycentrických souřadnic má analogii ve výpočtu polohy těžiště soustavy těles. Uvažujme například dvě bodová tělesa o hmotnostech m_1 a m_2, která jsou umístěna v daném pořadí v bodech X a Y. Potom pro souřadnice těžiště T této soustvy dvou těles platí: $T = \frac{m_1X + m_2Y}{m_1+m_2} = \frac{m_1}{m_1+m_2}X + \frac{m_2}{m_1+m_2}Y$, kde $\frac{m_1}{m_1+m_2} + \frac{m_2}{m_1+m_2} = 1$.



Obrázek 18: Barycentrické souřadnice těžiště T trojúhelníku; $T = \frac{1}{3}A + \frac{1}{3}B + \frac{1}{3}C$

Věta 1. *V prostoru* E_k *zvolme* $k+1$ *bodů* A_i, $k+1$ *čísel* α_i *a* $k+1$ *čísel* β_i, *kde* $i \in \{1, 2, ..., k+1\}$. *Potom platí:*

a) Bod X *definovaný vztahem*

$$X = \alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + ... + \alpha_{k+1} A_{k+1}$$

je definován nezávisle na volbě soustavy souřadnic právě tehdy, když

$$\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_{k+1} = 1.$$

b) Vektor $\vec{u}$ *definovaný vztahem*

$$\vec{u} = \beta_1 A_1 + \beta_2 A_2 + ... + \beta_{k+1} A_{k+1}$$

je definován nezávisle na volbě soustavy souřadnic právě tehdy, když

$$\beta_1 + \beta_2 + ... + \beta_{k+1} = 0.$$