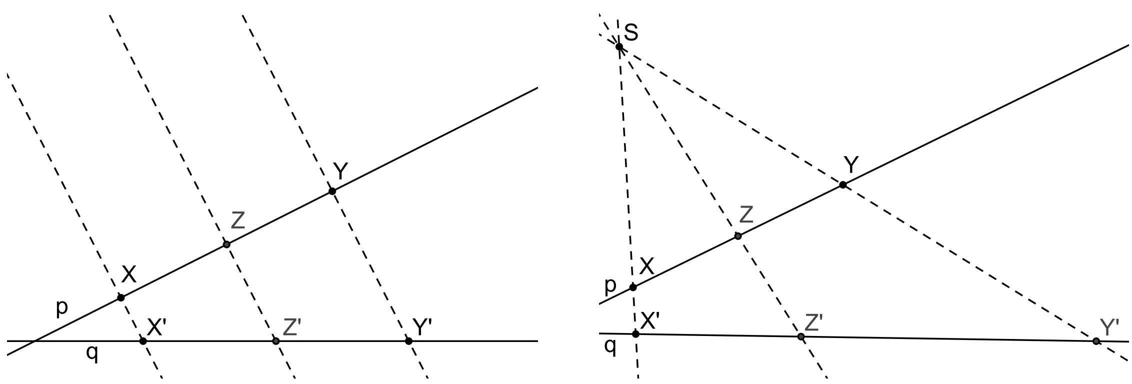
18 Dvojpoměr

Pro každé geometrické zobrazení jsou typické určité vlastnosti, které se při něm zachovávají. Hovoříme o tzv. *invariantech* daného geometrického zobrazení. Pro shodné zobrazení je to např. vzdálenost bodů, pro podobné zobrazení poměr vzdáleností bodů, pro afinní zobrazení je to potom dělicí poměr. Nyní nás bude zajímat projektivní invariant (tj. vlastnost, která se zachovává např. při středovém promítání mezi dvěma různoběžnými rovinami v trojrozměrném prostoru, nebo mezi dvěma různoběžnými přímkami v rovině). Jak je patrné z Obr. 81, dělicí poměr to být nemůže. Ukáže se, že tímto invariantem je tzv. *dvojpoměr* (viz věta 70–Pappova věta o projektivní invariantnosti dvojpoměru). Dvojpoměrem $(ABCD)$ čtyř různých kolineárních bodů rozumíme poměr dělicích poměrů $(ABC)/(ABD)$ (viz následující definice 31). Pro podrobnější studium otázek invariantů geometrických zobrazení, zvláště pak dvojpoměru, lze doporučit [8].

Výše uvedené úvahy o invariantech můžeme shrnout takto:

- vzdálenost – metrický (eukleidovský) invariant,
- dělicí poměr – afinní invariant,
- dvojpoměr – projektivní invariant.



Obrázek 81: Středové promítání mezi dvěma různoběžnými přímkami (rovinami) na rozdíl od rovnoběžného nezachovává dělicí poměr (sledujte, jak se zobrazuje bod Z, střed úsečky XY).

Definice 31 (Dvojpoměr)**.** *Nechť A, B, C, D jsou čtyři navzájem různé body přímky. Číslo $\delta = \dfrac{(ABC)}{(ABD)}$ nazýváme dvojpoměrem bodů A, B, C, D (v tomto pořadí) a značíme $\delta = (ABCD)$.*

Poznámka. Zápisem (ABC), resp. (ABD), rozumíme dělicí poměr bodu C, resp. D, vzhledem k bodům A, B.

PŘÍKLAD 18.1. *Na přímce p jsou dány body A, B. Sestrojte na přímce p bod C tak, aby dělicí poměr $(ABC) = \lambda$ byl roven danému číslu.*

a) $\lambda = 3$,

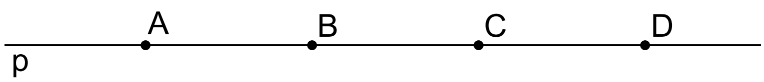
b) $\lambda = \frac{1}{2}$,

c) $\lambda = -2$.

PŘÍKLAD 18.2. *Určete hodnoty dělicích poměrů* (ABC_∞), $(AB_\infty C)$, $(A_\infty BC)$, *kde* $A_\infty, B_\infty, C_\infty$ *jsou nevlastní body.*

Řešení: $(ABC_\infty) = 1$, $(AB_\infty C) = 0$, $(A_\infty BC = \infty)$.

PŘÍKLAD 18.3. *Jak vidíme na Obr. 82, na přímce p jsou ve stejných vzdálenostech postupně umístěny body A, B, C, D. Určete hodnotu dvojpoměru $(ABCD)$.*



Obrázek 82: Určete hodnotu dvojpoměru $(ABCD)$.

Věta 67. *Dvojpoměr čtyř bodů se nezmění, vyměníme-li vzájemně dva z nich a zároveň ještě oba zbývající, t.j. platí* $(ABCD) = (BADC) = (CDAB) = (DCBA)$.

Důkaz. Dokážeme přímo, rozepsáním dle definice 31. ☐

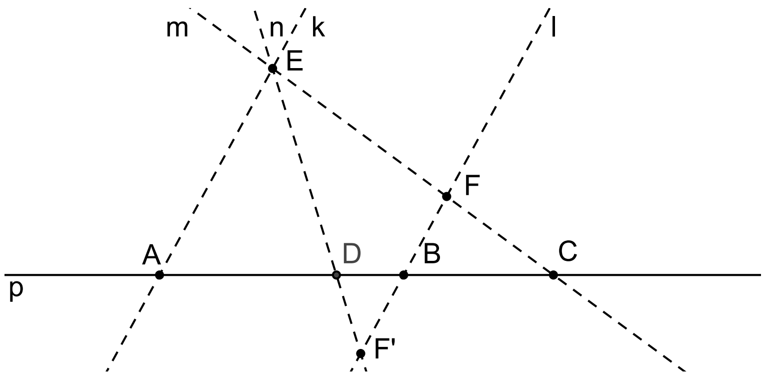
Věta 68. *Vyměníme-li poslední dva body mezi sebou, změní se hodnota dvojpoměru v hodnotu převrácenou, t.j. platí* $(ABCD) = \dfrac{1}{(ABDC)}$.

Důkaz. Dokážeme přímo, rozepsáním dle definice 31. ☐

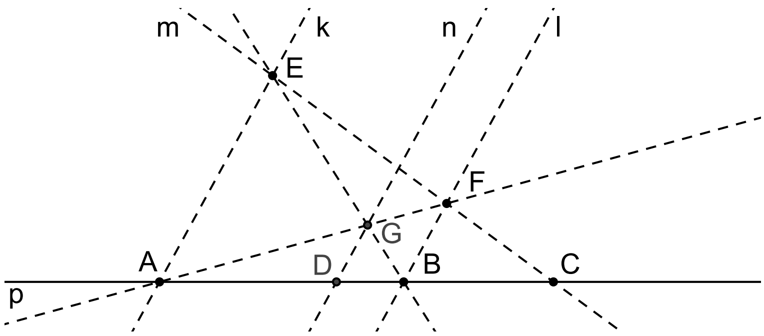
Definice 32 (Harmonická čtveřice)**.** *Je-li* $(ABCD) = -1$, *říkáme, že body* A, B, C, D *tvoří harmonickou čtveřici bodů, nebo že body* C, D *jsou harmonicky sdruženy vzhledem k bodům* A, B, *nebo že body* C, D *oddělují harmonicky body* A, B.

PŘÍKLAD 18.4. *Jsou-li na přímce dány body A, B, C, sestrojte bod D tak, aby A, B, C, D tvořily harmonickou čtveřici.*

Řešení: Jedna z možných konstrukcí harmonické čtveřice, založená na podobnosti trojúhelníků, je zobrazena na Obr. 83. Vyjdeme z ní při hledání postupu konstrukce, který by byl projektivně invariantní (neměl by být založen na rovnoběžnosti).



Obrázek 83: Jedna z možných konstrukcí harmonické čtveřice

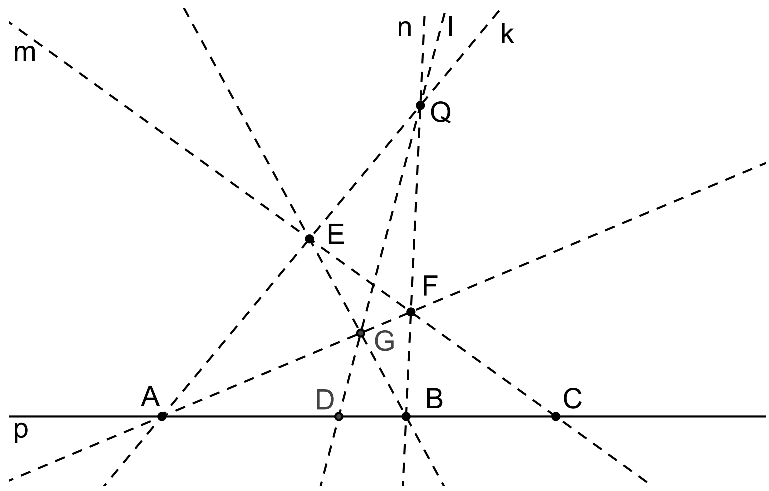


Obrázek 84: Další z možných konstrukcí harmonické čtveřice

Konstrukci nejprve modifikujeme (viz Obr. 84) tak, že dvojicemi bodů A, F a B, E vedeme přímky, jejichž průsečíkem G následně vedeme rovnoběžku n s přímkami k, l. Průsečíkem přímek n a p je potom hledaný bod D.

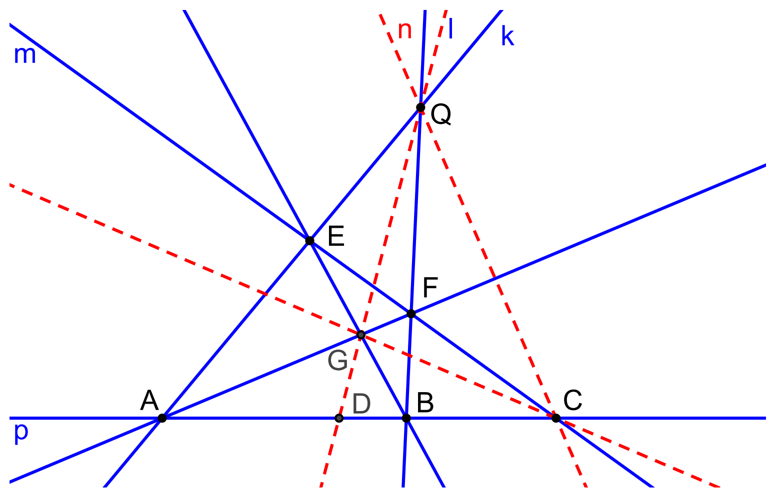
Nyní zbývá nahradit nevlastní průsečík přímek k, l, n vlastním bodem Q. Výsledkem je konstrukce na Obr. 85, která je ekvivalentní s původní a přitom při ní nemusíme využívat rovnoběžnost. Postup této konstrukce je takový, že bodem C vedeme libovolnou přímku m, na ní zvolíme dva různé body E, F a vedeme jimi přímky $k = AE$ a $n = BF$, jejichž průsečík nazveme Q. Bod D je potom určen jako průsečík přímek p a $l = QG$, kde G je průsečíkem přímek AF a BE.

Body A, B, F, E na Obr. 85 (viz též Obr. Fig:UplnyCtyr) tvoří tzv. *úplný čtyřroh*. Takto nazýváme skupinu čtyř bodů v rovině, z nichž žádné tři neleží v jedné přímce. Body A, B, F, E potom nazýváme *vrcholy úplného čtyřrohu*. Šest přímek, které tyto vrcholy spojují, nazýváme *stranami úplného čtyřrohu*. Tyto strany se protínají ještě v dalších třech bodech G, C, Q, jimž říkáme *diagonální vrcholy úplného čtyřrohu*; trojúhelník jimi určený se nazývá *diagonální trojúhelník* a jeho strany *diagonálními stranami úplného čtyřrohu*. Nalezená jednoduchá konstrukce harmonické čtveřice potom odráží *harmonickou vlastnost* úplného čtyřrohu, která je formulována v následující větě, více viz [6].



Obrázek 85: Jednoduchá konstrukce harmonické čtveřice

Věta 69. *Na každé straně úplného čtyřrohu tvoří oba jeho vrcholy a dvojice bodů, z nichž jeden je diagonální vrchol a druhý je incidentní s jeho protější diagonální stranou, dvě dvojice bodů, které se harmonicky oddělují.*



Obrázek 86: Úplný čtyřroh A, B, F, E a diagonální trojúhelník $\triangle GCQ$.

Poznámka. Tvrzení, že body A, B, C, D (viz Obr. 85 a 86) se harmonicky oddělují znamená, že pro dvojpoměr těchto bodů v uvedeném pořadí platí $(ABCD) = -1$.

PŘÍKLAD 18.5. *V P_2 jsou dány body $A = (1, 2, 3), B = (3, 2, 1), C = (1, 1, 1)$. Dokažte, že leží na přímce a vypočtěte bod D tak aby $(ABCD) = -1$.*

PŘÍKLAD 18.6. *Střed úsečky AB je harmonicky sdružen s nevlastním bodem přímky, určené body A, B, vzhledem k bodům A, B. Dokažte.*