1 Připomenutí vybraných pojmů

1.1 Afinní bodový prostor

Definice 1 (Afinní bodový prostor)**.** *Neprázdnou množinu A_n (její prvky jsou tzv. body) nazveme afinním bodovým prostorem dimenze n, jestliže je dán vektorový prostor V_n dimenze n a zobrazení*

$$g: \; A_n \times A_n \to V_n$$

těchto vlastností:

1. Pro každý bod $A \in A_n$ a pro každý vektor $\vec{x} \in V_n$ existuje jediný bod $B \in A_n$ tak, že

$$g(A, B) = \vec{x} \qquad \text{t.j.} \qquad B = A + \vec{x}.$$

2. Pro každé tři body $A, B, C \in A_n$ platí, že

$$g(A, C) = g(A, B) + g(B, C).$$

Vektorový prostor V_n nazýváme vektorovým zaměřením afinního prostoru A_n.

Příklady afinního bodového prostoru

1. Jednoprvková množina se zaměřením $V_0 = \{\vec{o}\}$ je afinní bodový prostor dimenze 0.

2. Eukleidovské prostory E_1 (přímka), E_2 (rovina), E_3 ((trojrozměrný) prostor).

3. Sám vektorový prostor V_n je afinním bodovým prostorem. Platí

$$g(\vec{u}, \vec{v}) = \vec{v} - \vec{u}.$$

1.2 Afinní souřadnice bodů

Definice 2 (Afinní soustava souřadnic - repér)**.** *Nechť P je libovolný bod z afinního prostoru A_n, $n > 0$. Nechť $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n)$ je báze vektorového zaměření V_n prostoru A_n. Potom uspořádanou $(n+1)$-tici*

$$\varphi = (P, \vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n)$$

nazýváme afinní soustavou souřadnic φ (též repérem φ) v prostoru A_n.

Souřadnicemi bodu $X \in A_n$ v soustavě souřadnic φ budeme rozumět souřadnice vektoru $X - P$ v bázi $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n)$.

Definice 3 (Kartézská soustava souřadnic)**.**

$$\{P; \vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n\},$$

kde $\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n$ je ortonormální báze.

1.3 Eukleidovský bodový prostor

Definice 4 (Eukleidovský bodový prostor)**.** *Eukleidovským bodovým prostorem* E_n *rozumíme afinní bodový prostor, na jehož zaměření je definován* **skalární součin**.

1.4 Zobrazení

Definice 5 (Geometrické zobrazení)**.** *Zobrazením (geometrickým zobrazením) rozumíme předpis, kterým je libovolnému bodu* X *(který je prvkem dané množiny, např. roviny) jako jeho obraz jednoznačně přiřazen bod* $X' = f(X)$.

Příklady geometrických zobrazení

1. Afinní zobrazení v rovině (prostoru) - osová souměrnost, středová souměrnost, otočení, posunutí, identita, stejnolehlost.

2. Rovnoběžné promítání, středové promítání.

3. Kruhová inverze.

4. Osová afinita. Středová kolineace.

2 Afinní zobrazení

Afinní zobrazení v rovině (prostoru) je příkladem transformace roviny (prostoru) na sebe. Každému bodu X roviny E_2 (prostoru E_3) přiřadí bod $X' = f(X)$ téže roviny při zachování určitých vlastností. Důležitým pojmem při zavedení afinního zobrazení je dělicí poměr.

2.1 Dělicí poměr

Dělicím poměrem zde rozumíme číslo, které jednoznačně udává polohu bodu na přímce vzhledem ke dvěma pevně daným bodům této přímky.

Obrázek 1: Tři kolineární body

Definice 6 (Dělicí poměr). *Nechť A, B, C; $A \neq B$, $C \neq B$, jsou tři body ležící na přímce (tj. tři kolineární body). Dělicím poměrem bodu C vzhledem k bodům A, B rozumíme reálné číslo λ, které zapisujeme (ABC), a pro jehož absolutní hodnotu platí*

$$|(ABC)| = \frac{|AC|}{|BC|}, \tag{1}$$

přitom pro bod C ležící vně úsečky AB je $(ABC) > 0$ a pro bod C ležící uvnitř AB je $(ABC) < 0$. Pro $C = A$ je zřejmě $(ABC) = 0$.

Poznámka. Uvedená definice zavádí dělicí poměr pomocí podílu vzdáleností bodu C od daných bodů A, B. Protože vzdálenosti jsou kladné, nepřináší jejich podíl žádnou informaci o znaménku dělicího poměru, kterému pak musí být věnována zvláštní část definice. Tomu se vyhneme, pokud použijeme k zavedení pojmu dělicí poměr odpovídající vektory definované příslušnou trojicí bodů, viz Obr.2.

Obrázek 2: Dělicí poměr bodu C vzhledem k bodům A, B

Definice 7 (Dělicí poměr 2). *Nechť A, B, C; $A \neq B$, $C \neq B$, jsou tři body ležící na přímce (tj. tři kolineární body). Potom číslo λ definované rovnicí*

$$C - A = \lambda(C - B) \tag{2}$$

značíme (ABC) a nazýváme dělicím poměrem bodu C vzhledem k bodům A, B.

Poznámka. Ve vztahu (2) je obsažena kompletní informace o čísle λ, tj. o jeho absolutní hodnotě i o znaménku. Pro snazší zapamatování si můžeme (2) přepsat do tvaru

$$\lambda = \frac{C - A}{C - B},$$

který sice není formálně správně, ale jasně koresponduje se vztahem (1). Smysl získá až dosazením souřadnic bodů $A = [a_1; a_2]$, $B = [b_1; b_2]$, $C = [c_1; c_2]$:

$$\lambda = \frac{c_1 - a_1}{c_1 - b_1} = \frac{c_2 - a_2}{c_2 - b_2}.$$

PŘÍKLAD 2.1. *Určete dělicí poměr (ABS) středu S úsečky AB vzhledem k jejím krajním bodům A, B.*

PŘÍKLAD 2.2. *Pomocí programu GeoGebra graficky zobrazte závislost hodnot dělícího poměru bodu C vzhledem k pevně daným bodům A, B na poloze bodu C.*

PŘÍKLAD 2.3. *V rovině jsou dány dva pevné body A, B. Určete množinu všech bodů X této roviny, pro které platí*

$$\frac{|AC|}{|BC|} = konst.$$

Poznámka. Uvedené skutečnosti nás mohou přivést k možnosti vyjádření polohy bodu nezávisle na volbě soustavy souřadnic. Bod C můžeme, při zvolených bodech A, B, zapsat takto:

$$C = \frac{1}{1-\lambda}A - \frac{\lambda}{1-\lambda}B.$$

Jedná se o příklad tzv. barycentrických souřadnic.

Barycentrické souřadnice vzhledem ke dvěma bodům

Bod X leží na přímce AB právě tehdy, když existují dvě čísla $\alpha, \beta \in R$ taková, že platí

$$X = \alpha A + \beta B, \quad \alpha + \beta = 1.$$

Tato čísla nazýváme **barycentrickými souřadnicemi** bodu X vzhledem k bodům A, B. Rovnice $X = \alpha A + \beta B$, kde $\alpha + \beta = 1$ se nazývá **bodová rovnice přímky**.

Poznámka. Analogicky můžeme zavést barycentrické souřadnice bodu X vzhledem ke třem, čtyřem, obecně pak k bodům. Proveďte pro $k = 3, 4$.

PŘÍKLAD 2.4. *Napište barycentrické souřadnice středu úsečky AB vzhledem k jejím krajním bodům.*

PŘÍKLAD 2.5. *Napište barycentrické souřadnice těžiště trojúhelníku ABC vzhledem k jeho vrcholům.*

PŘÍKLAD 2.6. *Modelujte barycentrické souřadnice pro $k = 2, 3$ v programu GeoGebra.*

Věta 1. *V prostoru E_3 zvolme $k+1$ bodů A_i, $k+1$ čísel α_i a $k+1$ čísel β_i, kde $i \in \{1, 2, ..., k+1\}$. Potom platí:*

a) Bod X definovaný vztahem

$$X = \alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + ... + \alpha_{k+1} A_{k+1}$$

je definován nezávisle na volbě soustavy souřadnic právě tehdy, když

$$\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_{k+1} = 1.$$

b) Vektor $\vec{u}$ definovaný vztahem

$$\vec{u} = \beta_1 A_1 + \beta_2 A_2 + ... + \beta_{k+1} A_{k+1}$$

je definován nezávisle na volbě soustavy souřadnic právě tehdy, když

$$\beta_1 + \beta_2 + ... + \beta_{k+1} = 0.$$

2.2 Afinní zobrazení

Definice 8 (Afinní zobrazení)**.** *Zobrazení f afinního prostoru A do afinního prostoru A' se nazývá afinní, jestliže má tuto vlastnost: Leží-li navzájem různé body B, C, D z prostoru A na přímce, pak jejich obrazy $f(B), f(C), f(D)$ buď splývají, nebo jsou navzájem různé, leží na jedné přímce a jejich dělící poměr se rovná dělícímu poměru jejich vzorů, tj.:*

$$(f(B), f(C); f(D)) = (B, C; D).$$

Každé afinní zobrazení f afinní roviny A_2 do sebe je vzhledem k libovolně zvolené lineární soustavě souřadnic dáno rovnicemi:

$$\begin{array}{rrcrcrcr} f: & x' & = & a_{11}x & + & a_{12}y & + & b_1 \\ & y' & = & a_{21}x & + & a_{22}y & + & b_2 \end{array}$$

Každé afinní zobrazení f v prostoru A_3 můžeme zapsat soustavou rovnic

$$\begin{array}{rrcrcrcrcr} f: & x_1' & = & a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & a_{13}x_3 & + & b_1 \\ & x_2' & = & a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & a_{23}x_3 & + & b_2 \\ & x_3' & = & a_{31}x_1 & + & a_{32}x_2 & + & a_{33}x_3 & + & b_3 \end{array}$$

3 Shodná zobrazení v rovině

Definice 9. *Zobrazení v rovině, které každým dvěma bodům* X, Y *přiřazuje body* X', Y' *tak, že*

$$|X'Y'| = |XY|$$

se nazývá **shodné zobrazení** *v rovině (též izometrické zobrazení).*

Poznámka. Můžeme též říci, že shodné zobrazení zachovává vzdálenost bodů, tj. pro shodné zobrazení $f : X \longrightarrow f(X)$ platí:

$$|f(X)f(Y)| = |XY|.$$

PŘÍKLAD 3.1. *Je dána přímka* p *a body* A, B *v téže polorovině s hraniční přímkou* p*. Najděte všechny body* $X \in p$ *takové, že součet vzdáleností* $|AX| + |BX|$ *je minimální.*

Věta 2. *Každé shodné zobrazení je prosté a afinní.*

Další vlastnosti shodných zobrazení:

1. Úsečka se zobrazí na úsečku.
2. Polopřímka se zobrazí na polopřímku.
3. Přímka se zobrazí na přímku.
4. Rovnoběžky se zobrazí na rovnoběžky.
5. Úhel se zobrazí na úhel s ním shodný.
6. Polorovina se zobrazí na polorovinu.

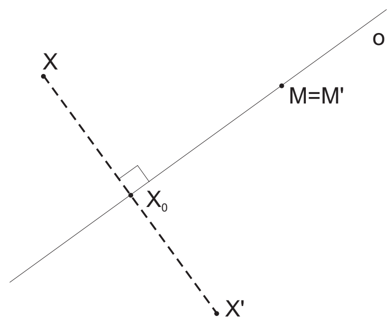
PŘÍKLAD 3.2. *V euklidovské rovině* E_2 *je zvolena kartézská soustava souřadnic. Určete, pro které hodnoty čísel* a*,* b *existuje shodné zobrazení roviny* E_2 *do sebe, zobrazující body* $[0, 0]$, $[2, 1]$, $[4, a]$ *po řadě na body* $[1, 2]$, $[3, 1]$, $[5, b]$*? Je toto shodné zobrazení určeno jednoznačně?*

Věta 3 (O určenosti shodného zobrazení v rovině 1)**.** *Shodné zobrazení v rovině je jednoznačně určeno libovolnými třemi nekolineárními body* X, Y, Z *a třemi nekolineárními body* X', Y', Z'*, které jsou po řadě jejich obrazy.*

Poznámka. Jak víme, stejná věta platí pro všechna afinní zobrazení.

3.1 Osová souměrnost

Definice 10. *Nechť je dána přímka o, kterou nazýváme* **osa souměrnosti.** *Potom pro obraz M' libovolného bodu M této přímky o platí $M' \equiv M$. Ke každému bodu X, který neleží na přímce o, sestrojíme obraz X' následujícím způsobem: Bodem X vedeme kolmici k na přímku o a její patu označíme X_0. Na polopřímce opačné k polopřímce X_0X sestrojíme bod X' tak, že $|X'X_0| = |XX_0|$. Takto definované zobrazení nazýváme* **osová souměrnost s osou** *o a značíme ho $\mathcal{O}(o)$.*



Obrázek 3: Definice osové souměrnosti

Poznámky:

1. O bodech X, X' říkáme, že je to dvojice bodů souměrně sdružených podle osy o.
2. Osová souměrnost je příkladem involutorního zobrazení (involuce).

PŘÍKLAD 3.3. *Je dána přímka p a body A, B v téže polorovině s hraniční přímkou p. Najděte všechny body $X \in p$ takové, že součet vzdáleností $|AX| + |BX|$ je minimální.*

Věta 4. *Osová souměrnost je shodné zobrazení.*

Později, při klasifikaci shodností, využijeme jejich definice pomocí samodružných bodů a směrů.

Věta 5 (Alternativní definice osové souměrnosti)**.** *Shodné zobrazení, jehož všechny samodružné body vyplní přímku o, je souměrnost podle osy o.*

Věta 6. *Jestliže existují na přímce dva různé samodružné body, pak každý bod této přímky je samodružný.*

Věta 7. *Má-li shodnost aspoň tři nekolineární samodružné body, je to identita.*

Věta 8. *Má-li shodnost dva různé samodružné body a není identitou, pak je osovou souměrností.*

Věta 9. *Samodružné přímky osové souměrnosti jsou přímky kolmé na osu souměrnosti.*

Analytické vyjádření osové souměrnosti $\mathbf{O}(o)$ v rovině

PŘÍKLAD 3.4. *Napište analytické vyjádření osové souměrnosti s osou v souřadnicové ose x (y).*

Osová souměrnost podle osy o v obecné poloze

Obecná rovnice osy $o : ax + by + c = 0$

Osová souměrnost $\mathbf{O}(o)$:

$$
\begin{aligned}
x' &= x - \frac{2a}{a^2+b^2}(ax+by+c)\\
y' &= y - \frac{2b}{a^2+b^2}(ax+by+c)
\end{aligned}
$$

PŘÍKLAD 3.5. *V eukleidovské rovině je dána souměrnost podle přímky $p : 3x - 4y + 1 = 0$. Napište rovnice této souměrnosti.*

3.1.1 Osová souměrnost - Úlohy

1. Napište rovnice souměrnosti podle přímky $o : 2x - 3y + 1 = 0$.

2. Sestrojte trojúhelník ABC, je-li dán obvod $o = 12cm$ a úhly $\alpha = 60°$, $\beta = 45°$.

3. Dokažte Vivianiho větu: „V rovnostranném trojúhelníku je hodnota součtu vzdáleností libovolného bodu od stran trojúhelníku konstantní, nezávislá na poloze bodu.“

4. Jsou dány dvě různoběžky p, q a bod A mimo ně. Najděte body $B \in p$, $C \in q$ tak, aby obvod trojúhelníku ABC byl minimální.

5. Řešte Fagnanův problém: „Danému ostroúhlému trojúhelníku vepište trojúhelník o nejmenším obvodu.“

6. Sestrojte konvexní čtyřúhelník $ABCD$ se stranami dané velikosti, je-li $\mapsto AC$ osou vnitřního úhlu při vrcholu A.

7. Sestrojte čtverec $ABCD$, je-li dáno $a + e = 10cm$.

8. Sestrojte obdélník $ABCD$, je-li dáno $e = 7cm$, $a - b = 1cm$.

9. Sestrojte lichoběžník $ABCD$ ($AB \| CD$), je-li dáno $b = 3cm$, $c = 2.5cm$, $d = 2.6cm$, $\alpha - \beta = 20°$.

10. Mascheroniova konstrukce. Je dána kružnice $k(S; r)$; dále je dána dvěma body A, B (body neleží na kružnici) její sečna p, která neprochází středem S. Sestrojte průsečíky přímky p s kružnicí k, aniž přitom použijete pravítka.

11. Dokažte, že body souměrně sdružené s průsečíkem výšek podle stran trojúhelníka, leží na kružnici trojúhelníku opsané.

3.1.2 Osová souměrnost - Úlohy na domácí přípravu

12. Dokažte větu: „V každém trojúhelníku dělí osa libovolného vnitřního úhlu protější stranu v poměru stran přilehlých.“

13. Napište rovnice osové souměrnosti, zobrazující počátek na bod $[1, 5]$.

14. Je dána přímka p a dvě kružnice k_1, k_2 oddělené přímkou p. Sestrojte rovnostranný trojúhelník tak, aby na každé z kružnic k_1, k_2 byl jeden vrchol a jedna z výšek ležela na přímce p.

15. Jsou dány tři různé přímky p_1, p_2, p_3, procházející bodem S; na přímce p_1 je dán bod $A \neq S$. Sestrojte trojúhelník ABC, jehož osy vnitřních úhlů leží v přímkách p_1, p_2, p_3.

16. Jsou dány tři přímky o_1, o_2, o_3 procházející bodem O. Na o_1 dán bod A_1. Sestrojte $\triangle ABC$ tak, aby o_1, o_2, o_3 byly osami jeho stran a bod A_1 středem strany BC.

17. Jsou dány body X, Y a přímka p, která je odděluje. Sestrojte rovnoramenný trojúhelník ABC, jehož hlavním vrcholem je bod C, osou souměrnosti přímka p a jehož ramena mají danou velikost a. Přímka AC nechť prochází bodem X a přímka BC bodem Y.

18. Je dána přímka p a body A, B, ležící ve stejné polorovině s hraniční přímkou p. Sestrojte bod $X \in p$ tak, aby $|\angle AXp| = 2|\angle BXp|$.

19. Jsou dány body A, B, C a přímka p kolmá k přímce AB tak, že prochází bodem C a body A, B leží v téže polorovině určené přímkou p. Sestrojte na přímce p takový bod X, aby z něho byla vidět úsečka AB pod stejným úhlem jako úsečka BC.

20. Obrazy středu S kružnice opsané trojúhelníku ABC v osových souměrnostech podle přímek BC, AC, AB jsou vrcholy trojúhelníku $A_1B_1C_1$. Dokažte, že je tento trojúhelník shodný s trojúhelníkem ABC.

3.2 Otočení

Definice 11. **Otočení** *neboli* **rotace** *je zobrazení určené středem S a orientovaným úhlem velikosti φ, které bodu S přiřazuje týž bod S a libovolnému bodu $X \neq S$ přiřazuje bod X' tak, že $|X'S| = |XS|$ a orientovaný úhel XSX' má velikost φ. Zobrazení značíme $\mathcal{R}(S, \varphi)$, bod S se nazývá střed otočení a orientovaný úhel velikosti φ je úhel otočení.*

Shodnost, která není ani identitou ani osovou souměrností, má nejvýše jeden samodružný bod

Definice 12. *Shodnost s právě jedním samodružným bodem S nazýváme* **otočením** *(též* **rotací***); bod S je tzv.* **střed otočení.**

Úkol. Odvoďte analytické vyjádření otočení se středem v počátku souřadnicové soustavy o úhel α. Potom ukažte, že toto zobrazení má jediný samodružný bod - střed otočení.

Věta 10. *Složením dvou osových souměrností s různoběžnými osami vznikne otočení, jehož středem je průsečík těchto os.*

Věta 11. *Každé otočení lze složit ze dvou osových souměrností, jejichž osy jsou různoběžky procházející středem otočení. Jednu z těchto os lze volit libovolně tak, že prochází středem otočení. Druhá je touto volbou určena jednoznačně.*

Věta 12. *Otočení se středem S a úhlem velikosti α převádí přímku p v přímku p' různoběžnou s p; přitom dva vrcholové úhly, které p a p' tvoří, mají velikost α.*

Analytické vyjádření otočení (rotace) $\mathbf{R}(S, \alpha)$ v rovině

Souřadnice středu: $S = [s_1, s_2]$

$$
\begin{aligned}
x' &= (x - s_1)\cos\alpha - (y - s_2)\sin\alpha + s_1 \\
y' &= (x - s_1)\sin\alpha + (y - s_2)\cos\alpha + s_2
\end{aligned}
$$

Po úpravě dostaneme:

$$
\begin{aligned}
x' &= x\cos\alpha - y\sin\alpha + s_1 - s_1\cos\alpha + s_2\sin\alpha \\
y' &= x\sin\alpha + y\cos\alpha + s_2 - s_1\sin\alpha - s_2\cos\alpha
\end{aligned}
$$

PŘÍKLAD 3.6. *Afinní zobrazení euklidovské roviny na sebe zobrazuje vrchol A trojúhelníku ABC na bod B, bod B na bod C a bod C na bod A. Může to být zobrazení shodné? Jestliže ano, napište jeho rovnice vzhledem k vhodně zvolené kartézské soustavě souřadnic.*

3.2.1 Otočení - Úlohy

21. Jsou dány dvě shodné úsečky AB, CD. Určete otočeení, které zobrazí A na C a B na D. [**2**]

22. Je dána kružnice $k(S; r)$ a bod $P \neq S$. Bodem P veďte přímku, na které kružnice vytíná úsečku dané velikosti d. [**1**]

23. Jsou dány různé rovnoběžné přímky a, b, c a bod A, který leží na přímce a. Sestrojte všechny rovnostranné trojúhelníky ABC, jejichž vrcholy B, C leží po řadě na přímkách b, c. [**1**]

24. Je dána kružnice $k(S; 3cm)$ a bod A ($|SA| = 1.5cm$). Sestrojte všechny tětivy XY kružnice k o délce $5.5cm$, které procházejí bodem A. [**2**]

25. Je dána kružnice $k(S; r)$, bod B a úsečka délky d ($d < 2r$). Sestrojte tětivu XY kružnice k délky d tak, aby byla vidět z bodu B pod úhlem $60°$. [**2**]

3.2.2 Otočení - Úlohy na domácí přípravu

26. Jsou dány dvě rovnoběžné přímky a, b a mimo ně bod C. Sestrojte rovnostranný trojúhelník ABC tak, aby jeho vrcholy A, B ležely po řadě na přímkách a, b. [**1**]

27. Jsou dány kružnice k, přímka p a bod A ležící vně k. Sestrojte rovnostranný trojúhelník s vrcholem v bodě A tak, aby zbývající vrcholy ležely na k a na p. [**1**]

28. Při odvalování kružnice po přímce se body soustavy spojené s kružnicí pohybují po trajektoriích, kterým se říká **cykloidy**. Rozlišujeme tři typy cykloid, v závislosti na tom, zda bod leží vně, na nebo uvnitř kružnice. Zobrazte tyto křivky pomocí programu GeoGebra. [**3**]

3.3 Středová souměrnost

Definice 13. Středová souměrnost *se středem* S *je shodné zobrazení, které bodu* S *přiřazuje týž bod* S *a libovolnému bodu* $X \neq S$ *přiřazuje bod* X' *tak, že bod* S' *je středem úsečky* XX'*. Zobrazení značíme* $\mathcal{S}(S)$*.*

Definice 14. *Středovou souměrností rozumíme rotaci* $\mathbf{R}(S, \pi)$*.*

Vlastnosti středové souměrnosti:

1) Lze ji rozložit na dvě osové souměrnosti, jejichž osy jsou navzájem kolmé a procházejí středem souměrnosti S; jedna z os je volitelná.

2) Vznikne složením libovolných dvou osových souměrností, jejichž osy jsou k sobě kolmé.

3) Je jednoznačně určena svým středem

4) Je to involuce.

Věta 13. *V souměrnosti podle středu* S *je obrazem každé přímky přímka s ní rovnoběžná. Přímka, která prochází středem* S *je samodružná.*

Analytické vyjádření středové souměrnosti $\mathbf{S}(S)$ v rovině

Souřadnice středu: $S = [s_1, s_2]$

$$
\begin{aligned}
x' &= -x + 2s_1 \\
y' &= -y + 2s_2
\end{aligned}
$$

Věta 14. *Každá shodnost v rovině se dá složit z nejvýše tří osových souměrností.*

3.3.1 Středová souměrnost - Úlohy

29. Je dána kružnice $k(O; r)$ a přímka p, která má od středu O vzdálenost $v > 0$; dále je dán bod S, který leží uvnitř poloroviny pO. Sestrojte úsečku se středem S, která má krajní body K, P po řadě na kružnici k a na přímce p. [**1**]

30. Je dána kružnice $k(S, r)$. Bodem P, který leží vně kružnice k, veďte přímku p, která protíná kružnici v bodech A, B tak, že A je středem úsečky BP. [**2**]

31. Je dán úhel AVB a bod S jeho vnitřku. Sestrojte na rameni VA bod X a na rameni VB bod Y tak, aby bod S byl středem úsečky XY. [**1**]

32. Je dána úsečka AA_1 ($|AA_1| = 5cm$). Sestrojte všechny trojúhelníky ABC, pro které je AA_1 těžnicí t_a a pro které platí: $c = 4cm, b = 7cm$. [**2**]

33. Je dána úsečka AA_1 ($|AA_1| = 5cm$). Sestrojte všechny trojúhelníky ABC, pro které je AA_1 těžnicí t_a a pro které platí: $\gamma = 45°, \beta = 60°$. [**1**]

34. Jsou dány dvě kružnice k_1, k_2, které se protínají ve dvou bodech Q a R. Bodem Q veďte přímku, která vytíná na obou kružnicích tětivy stejné délky. [**1**]

3.3.2 Středová souměrnost - Úlohy na domácí přípravu

35. Je dán trojúhelník ABC a jeho vnitřní bod M. Sestrojte všechny úsečky XY se středem M a s krajními body X, Y na hranici trojúhelníku. [**1**]

36. Vepište danému rovnoběžníku $ABCD$ čtverec $XYUV$ tak, aby na každé straně rovnoběžníku ležel jeden vrchol čtverce. [**1**]

37. Je dán úhel AVB a bod S jeho vnitřku. Sestrojte na rameni VA bod X a na rameni VB bod Y tak, aby XYS byl rovnoramenný pravoúhlý trojúhelník s přeponou XY. [**1**]

38. Je dána úsečka AA_1; $|AA_1| = 4.5cm$. Sestrojte všechny pravoúhlé trojúhelníky ABC s pravým úhlem při vrcholu C, v nichž AA_1 je těžnicí t_a a $t_b = 6cm$. [**1**]

3.4 Posunutí (Translace)

Definice 15. *Orientovanou úsečkou AB je dán vektor $\overrightarrow{AB}$.* **Posunutí** *neboli* **translace** *je zobrazení, které každému bodu X roviny přiřazuje bod X' tak, že platí $\overrightarrow{XX'} = \overrightarrow{AB}$. Zobrazení značíme $\mathcal{T}(\overrightarrow{AB})$.*

Definice 16. *Shodnost, která vznikne složením dvou osových souměrností s rovnoběžnými a různými osami, nazýváme* **posunutím** *(též* **translací***).*

Věta 15. *Posunutí (translace) nemá žádný samodružný bod a zobrazuje přímku do přímky s ní rovnoběžné.*

Věta 16. *Nechť X' je obraz libovolného (proměnného) bodu X v dané translaci* **T***. Pak všechny přímky XX' jsou navzájem rovnoběžné a všechny úsečky XX' jsou navzájem shodné.*

Věta 17. *Každou translaci lze složit ze dvou osových souměrností s rovnoběžnými osami z nichž jednu lze volit libovolně, kolmo na směr translace a druhá je touto volbou určena jednoznačně.*

3.4.1 Analytické vyjádření posunutí (translace) $\mathbf{T}(\vec{p})$ v rovině

Souřadnice vektoru posunutí: $\vec{p} = [p_1, p_2]$

$$x' = x + p_1$$
$$y' = y + p_2$$

PŘÍKLAD 3.7. *Jaké zobrazení může být výsledkem skládání dvou posunutí?*

3.4.2 Posunutí - Úlohy

39. Jsou dány přímka p a dvě nesoustředné kružnice $k_1(S_1, r_1)$, $k_2(S_2, r_2)$. Veďte přímku rovnoběžnou s přímkou p tak, aby na ní kružnice k_1, k_2 vytínaly shodné tětivy. [1]

40. Sestrojte čtyřúhelník $ABCD$, jehož úhlopříčky svírají pravý úhel, jsou-li dány velikosti úhlopříček $|AC| = e$, $|BD| = f$ a velikosti úhlů $|\angle ABC| = 90°$, $|\angle ADC| = \delta$. [2]

41. Sestrojte lichoběžník, jsou-li dány velikosti jeho stran a, b, c, d. [1]

42. Sestrojte čtyřúhelník $ABCD$, jsou-li dány velikosti jeho stran $|AB| = a, |BC| = b, |CD| = c, |DA| = d$ a odchylka ω přímek AD, BC. [2]

43. Sestrojte rovnoběžník, jsou-li dány délky jeho stran a velikost úhlu jeho úhlopříček. [1]

44. Sestrojte lichoběžník $ABCD$, jsou-li dány délky obou jeho základen a, c a obou jeho úhlopříček e, f. [1]

45. Jsou dány dvě různoběžky a, b a úsečka délky r. Sestrojte všechny kružnice k se středem na přímce a, poloměrem r, které na přímce b vytínají tětivu délky r. [1]

3.5 Posunuté zrcadlení (Posunutá souměrnost)

PŘÍKLAD 3.8. *Je dána přímka p a dva body A, B v téže polorovině s hraniční přímkou p. Na přímce p sestrojte úsečku XY délky d tak, aby součet $|AX|+|XY|+|YB|$ byl co nejmenší.*

Víme, že každá shodnost v rovině se dá složit z nejvýše tří osových souměrností. V případech jedné a dvou os máme provedenou klasifikaci vzniklých shodností dle počtu samodružných bodů. Zbývá vyšetřit, zda **existují shodná zobrazení bez samodružných bodů, která vzniknou složením tří osových souměrností.**

Definice 17. *Je dána přímka o. Zobrazení složené z posunutí ve směru přímky o a osové souměrnosti podle osy o se nazývá posunuté zrcadlení (též posunutá souměrnost).*

Věta 18. *Posunuté zrcadlení se dá složit z osové a středové souměrnosti, přičemž střed středové souměrnosti neleží na ose osové souměrnosti.*

Věta 19. *Posunuté zrcadlení nemá samodružné body.*

PŘÍKLAD 3.9. *Nechť AB, $A'B'$ jsou různoběžné a shodné úsečky. Dokažte, že existuje posunuté zrcadlení nebo osová souměrnost, které převádějí body A, B po řadě v body A', B'.*

3.5.1 Analytické vyjádření posunutého zrcadlení

Příslušná osová souměrnost má osu v souřadnicové ose x.

$$\begin{aligned} x' &= x + p \\ y' &= -y \end{aligned}$$

3.5.2 Posunuté zrcadlení – Úlohy na domácí přípravu

46. Jsou dány dvě různoběžky a, b a na nich dva body $A \neq B$ (A na a, B na b). Určete bod X na a a bod Y na b tak, aby platilo $|AX| = |BY|$ a dále aby:

a) $XY \| p$, kde p je daná přímka; [1]

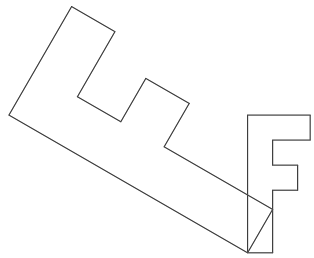
b) $XY = d$, kde d je předem daná úsečka; [1]

c) střed úsečky XY ležel na dané přímce q. [1]

4 Podobná zobrazení

4.1 Podobné zobrazení

Úkol: Napište rovnice pro zobrazení v rovině, které každý útvar otočí kolem počátku o úhel α a dvakrát zvětší (viz Obr. 1).



Obrázek 4: Podobné zobrazení v rovině

Definice 18. *Zobrazení f euklidovského prostoru E do euklidovského prostoru E' se nazývá* **podobné zobrazení**, *jestliže existuje kladné reálné číslo k tak, že pro každé dva body X, Y prostoru E platí:*

$$|f(X)f(Y)| = k|XY|.$$

Číslo k se nazývá koeficient podobného zobrazení f.

Poznámka. Podobnosti s koeficientem $k \neq 1$ nazýváme **vlastní podobnosti**.

Věta 20. *Každé podobné zobrazení euklidovského prostoru E do eukl. pr. E' lze složit ze* **stejnolehlosti prostoru** *E a* **shodného zobrazení** *E* **do** *E'.*

Věta 21. *Každé podobné zobrazení je afinní.*

Věta 22 (O určenosti podobného zobrazení)**.** *Nechť jsou $P_0, P_1, ..., P_n$ lineárně nezávislé body n-rozměrného euklidovského prostoru E_n a $P'_0, P'_1, ..., P'_n$ body euklidovského prostoru E'. Afinní zobrazení prostoru E_n do prostoru E', které zobrazuje bod P_i na bod P'_i pro $i = 0, 1, ..., n$ je právě tehdy podobné, existuje-li číslo $k > 0$ tak, že pro všechny dvojice $i, j = 0, 1, ..., n$ platí $|P'_i P'_j| = k|P_i P_j|$.*

PŘÍKLAD 4.1. *V euklidovské rovině je dán čtverec $ABCD$ se středem S. Existuje právě jedno podobné zobrazení roviny čtverce do sebe, při kterém se body A, B, S zobrazí po řadě na body D, B, C. Rozložte toto podobné zobrazení na stejnolehlost a shodné zobrazení.*

PŘÍKLAD 4.2. *Ukažte, že každé dvě paraboly jsou podobné, tzn. že existuje podobné zobrazení roviny jedné paraboly na rovinu druhé paraboly, při kterém se jedna parabola zobrazí na druhou.*

Věta 23. *Každá vlastní podobnost má právě jeden samodružný bod.*

4.2 Stejnolehlost

Patří mezi tzv. homotetie, tj. afinní zobrazení, která mají všechny směry samodružné.

Definice 19. *Budiž dán bod S a reálné číslo κ (různé od 0 a 1).* **Stejnolehlost** $\mathrm{H}(S;\kappa)$ *se středem S a koeficientem κ je zobrazení, které každému bodu X roviny přiřadí bod X' tak, že*

$$\overrightarrow{SX'} = \kappa\overrightarrow{SX}.$$

Poznámka. Stejnolehlost můžeme definovat i více popisně: *Budiž dán bod S a reálné číslo κ (různé od 0 a 1).* **Stejnolehlost** $\mathrm{H}(S;\kappa)$ *se středem S a koeficientem κ je zobrazení, které každému bodu X roviny přiřadí bod X' tímto způsobem:*

1. Pro $X \equiv S$ je $X' \equiv X$,

2. Pro $X \not\equiv S$ je $|X'S| = |\kappa| \cdot |XS|$,

pro $\kappa > 0$ leží X' leží na polopřímce $\overrightarrow{SX}$ a

pro $\kappa < 0$ leží X' leží na polopřímce opačné k $\overrightarrow{SX}$.

Poznámka. Zobrazení inverzní k stejnolehlosti $\mathrm{H}(S;\kappa)$ je stejnolehlost $\mathrm{H}^{-1}\left(S;\dfrac{1}{\kappa}\right)$.

Základní vlastnosti stejnolehlosti $H(S,\kappa)$**:**

1. Obrazem přímky je přímka s ní rovnoběžná.

2. Obrazem úsečky AB je úsečka $A'B'$; $\quad |A'B'| = |\kappa| \cdot |AB|$.

3. Obrazem polopřímky je polopřímka s ní souhlasně ($\kappa > 0$) nebo nesouhlasně ($\kappa < 0$) rovnoběžná .

4. Obrazem úhlu $\angle AVB$ je úhel $\angle A'V'B'$; $\quad |\angle A'V'B'| = |\angle AVB|$.

PŘÍKLAD 4.3. *Jsou dány dva různé body A, B a reálné číslo $\lambda \neq 0, 1$. Najděte na přímce AB bod C tak, aby platilo $(ABC) = \lambda$.*

4.2.1 Analytické vyjádření stejnolehlosti

Rovnice stejnolehlosti $\mathrm{H}(S;\kappa)$: $\quad H : X' = \kappa X + (1-\kappa)S.$

PŘÍKLAD 4.4. *Napište rovnice stejnolehlosti afinní roviny* $\mathbf{A}_2$, *která zobrazuje bod* $B = [2, 0, -1]$ *na bod* $C = [0, 1, 3]$ *a má koeficient* $\kappa = -2$. *Najděte souřadnice jejího středu.*

Řešení v programu wxMaxima:

```
(%i1) B:[2,0,-1]$ C:[0,1,3]$ S:[s1,s2,s3]$
```

```
(%i4) H:C-S=-2*(B-S);
```

(%o4) $[-s1, 1-s2, 3-s3] = [-2\,(2-s1)\,, 2\,s2, -2\,(-s3-1)]$

```
(%i5) res:solve(lhs(H)-rhs(H),[s1,s2,s3])[1];
```

(%o5) $[s1 = \frac{4}{3}, s2 = \frac{1}{3}, s3 = \frac{1}{3}]$

```
(%i6) S:ev(S,res);
```

(%o6) $[\frac{4}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}]$

4.2.2 Skládání stejnolehlostí

Věta 24 (O skládání stejnolehlosti a translace)**.** *Zobrazení složené ze stejnolehlosti* $\mathrm{H}(S;\kappa)$ *a translace* $X' = X + \vec{t}$ *je stejnolehlost* $\mathrm{H}'(Q;\kappa)$, *kde* $Q = S + \dfrac{1}{1-\kappa}\vec{t}$.

Věta 25 (O skládání stejnolehlostí)**.** *Složením dvou stejnolehlostí* $H_1(S_1,\kappa_1)$, $H_2(S_2,\kappa_2)$ *vznikne*

1. IDENTITA, jestliže $\kappa_1\kappa_2 = 1$ *a* $S_1 = S_2$,

2. POSUNUTÍ, jestliže $\kappa_1\kappa_2 = 1$ *a* $S_1 \neq S_2$,

3. STEJNOLEHLOST $H(S,\kappa)$ *s koeficientem* $\kappa = \kappa_1\kappa_2$, *jestliže* $\kappa_1\kappa_2 \neq 1$. *Přitom, pro* $S_1 = S_2$ *je také* $S = S_1 = S_2$, *pro* $S_1 \neq S_2$ *leží bod* S *na přímce* S_1S_2.

4.2.3 Stejnolehlost kružnic

Pro dvě kružnice $k_1(S_1; r_1)$, $k_2(S_2; r_2)$ s různými poloměry existují právě dvě stejnolehlosti, které převádějí kružnici k_1 do kružnice k_2: $\mathrm{H}_1(E, r_2/r_1)$ a $\mathrm{H}_2(I, -r_2/r_1)$ (Bod

E se někdy označuje jako „vnější střed stejnolehlosti“, bod I potom jako „vnitřní střed stejnolehlosti“.). Jestliže se kružnice dotýkají v bodě T, je $T = I$ v případě vnějšího dotyku a $T = E$ v případě vnitřního dotyku kružnic.

Věta 26 (Mongeova věta)**.** *Jsou-li k_1, k_2, k_3 tři kružnice, které mají různé poloměry a jejichž středy neleží v přímce, platí pro vnější a vnitřní středy stejnolehlostí každých dvou z nich následující vztahy:*

i) Všechny tři vnější středy stejnolehlosti E_{12}, E_{13}, E_{23} leží v přímce.

ii) Každé dva vnitřní středy stejnolehlosti a jeden vnější leží v přímce.

iii) Tři vnitřní středy stejnolehlosti I_{12}, I_{13}, I_{23} neleží v přímce.

PŘÍKLAD 4.5. *Je dána kružnice k, přímka p, která je vnější přímkou kružnice k, a bod $A \in p$. Sestrojte všechny kružnice, které se dotýkají přímky p v bodě A a kružnice k.*

PŘÍKLAD 4.6. *Jsou dány dvě různoběžky a, b a bod M, který leží uvnitř jednoho jejich úhlu. Sestrojte všechny kružnice, které procházejí bodem M a dotýkají se přímek a, b.*

PŘÍKLAD 4.7. *Jsou dány dvě různoběžky m, n a kružnice k ležící uvnitř jednoho jejich úhlu. Sestrojte všechny kružnice, které se dotýkají přímek m, n i kružnice k.*

PŘÍKLAD 4.8. (Eulerova přímka) *V trojúhelníku ABC označme T těžiště, V průsečík výšek a S střed kružnice trojúhelníku opsané. Máme dokázat, že buď všechny tři body splynou v jediný, nebo jsou navzájem různé a leží na jedné přímce (Eulerova přímka) tak, že platí $(S, V; T) = -\frac{1}{2}$.*

PŘÍKLAD 4.9. (Kružnice devíti bodů, též Feuerbachova či Eulerova kružnice) *V trojúhelníku ABC označme V průsečík výšek, S střed kružnice opsané, C_1, A_1, B_1 středy stran AB, BC, CA. Nechť k_0 je kružnice procházející body A_1, B_1, C_1. Dokažte:*

1) Na kružnici k_0 leží též paty A_0, B_0, C_0 výšek v_a, v_b, v_c a středy úseček AV, BV, CV.

2) Střed kružnice k_0 je středem úsečky SV, pokud $S \not\equiv V$; pokud je $S \equiv V$ splyne střed k_0 s bodem S.

3) Poloměr kružnice k_0 je roven polovině poloměru kružnice trojúhelníku opsané.

PŘÍKLAD 4.10. *Platí tato věta: Jsou-li dány dvě rovnoběžné úsečky různých délek, existují právě dvě stejnolehlosti, které zobrazí první úsečku na druhou. Dokážete je vždy najít?*

4.2.4 Stejnolehlost – Úlohy

47. Do půlkruhu s průměrem AB vepište čtverec $KLMN$ tak, aby strana KL ležela na úsečce AB a další dva vrcholy M, N na dané půlkružnici. [**2**]

48. Je dána přímka p, kružnice k a bod A. Sestrojte všechny úsečky XY tak, aby platilo: $X \in p$, $Y \in k$, $A \in XY$, $|AY| = 3|AX|$. [**2**]

49. Jsou dány dvě různoběžky a, b a kružnice k tak, že a je sečnou a b je vnější přímkou kružnice k. Sestrojte všechny kružnice, které se dotýkají přímek a, b i kružnice k. [**2**]

50. Sestrojte trojúhelník ABC, je-li dáno:

a) $v_a = 5cm$, $a : b : c = 2 : 3 : 4$, [**1**]

b) α, β, v_c, [**1**]

c) α, β, t_c, [**1**]

d) $a : b = 3 : 5$, $\gamma = 60°$, $t_c = 6cm$. [**1**]

4.2.5 Stejnolehlost – Úlohy na domácí přípravu

51. Určete p tak, aby existovala stejnolehlost se středem $[3, 2]$, zobrazující bod $[1, 4]$ na bod $[2, p]$. Napište rovnice této stejnolehlosti. [**2**]

52. Je dána kružnice k a bod M uvnitř této kružnice. Sestrojte všechny tětivy kružnice, které jsou bodem M rozděleny na části v poměru $2 : 3$. [**1**]

53. Narýsujte libovolný trojúhelník ABC. Uvnitř strany AC sestrojte bod X a uvnitř strany BC bod Y tak, aby platilo $|AX| = |XY|$ a $XY \parallel AB$. [**2**]

4.3 Mocnost bodu ke kružnici

PŘÍKLAD 4.11. *Sestrojte kružnici k, která prochází danými body $A \neq B$ a dotýká se dané přímky t.*

Definice 20. *Mocností bodu M ke kružnici $k(S; r)$ rozumíme reálné číslo m, pro které platí:*

(1) $|MX| \cdot |MY| = |m|$, kde X, Y jsou průsečíky kružnice k s její libovolnou sečnou procházející bodem M.

(2) Je-li M vnějším bodem kružnice k, je $m > 0$.

(3) Je-li M vnitřním bodem kružnice k, je $m < 0$.

(4) Je-li $M \in k$, je $m = 0$.

Věta 27. *Je dána kružnice $k(S; r)$ a bod M, který na ní neleží. Potom pro libovolné dvě sečny kružnice k, které procházejí bodem M, jejichž průsečíky s kružnicí k označíme X_1, Y_1 a X_2, Y_2, platí*

$$|MX_1| \cdot |MY_1| = |MX_2| \cdot |MY_2|.$$

Věta 28. *Nechť je dána kružnice $k(S; r)$ a bod M. Potom pro mocnost m bodu M ke kružnici k platí*

$$m = d^2 - r^2,$$

kde $d = |MS|$ je vzdálenost bodu M od středu kružnice k.

Věta 29. *Nechť M je vnější bod kružnice $k(S; r)$, m jeho mocnost ke kružnici k. Jestliže T je dotykový bod tečny vedené z bodu M ke kružnici k, tak platí $|MT|^2 = m$.*

Věta 30 (Chordála dvojice kružnic)**.** *Nechť jsou $k_1(S_1; r_1), k_2(S_2; r_2)$ dvě nesoustředné kružnice. Množina bodů X, které mají k oběma kružnicím stejnou mocnost, je přímka $h \perp S_1S_2$. Jestliže kružnice k_1, k_2 mají společný bod M, potom přímka h prochází tímto bodem.*

Poznámka. Přímka h, která je množinou bodů X, majících stejnou mocnost k nesoustředným kružnicím k_1, k_2 se nazývá **chordála** (též potenční přímka) kružnic k_1, k_2.

Poznámka. Bod, který má ke třem vzájemně různým kružnicím stejnou mocnost se nazývá **potenční bod** (též potenční střed).

PŘÍKLAD 4.12. *Sestrojte chordálu dvou nesoustředných kružnic k_1, k_2, které nemají společný bod.*

PŘÍKLAD 4.13. *Určete analyticky množinu všech bodů roviny, které mají ke dvěma daným kružnicím stejnou mocnost.*

Analytické vyjádření chordály

Chordálu kružnic $k_1(S_1[m_1, n_1], r_1)$, $k_2(S_2[m_2, n_2], r_2)$ s rovnicemi $k_1 : (x - m_1)^2 + (y - n_1)^2 = r_1^2$ a $k_2 : (x - m_2)^2 + (y - n_2)^2 = r_2^2$ můžeme analyticky vyjádřit rovnicí:

$$(x - m_1)^2 + (y - n_1)^2 - r_1^2 = (x - m_2)^2 + (y - n_2)^2 - r_2^2$$

4.3.1 Mocnost bodu ke kružnici – Úlohy

54. Je dán úhel $\angle AVB$ a uvnitř něho bod M. Sestrojte kružnici, která prochází bodem M a dotýká se přímek AV, BV.

55. Obdélník má velikosti stran a, b. Máme sestrojit

a) libovolný obdélník stejného obsahu,

b) obdélník stejného obsahu, jehož jedna strana má danou velikost c.

56. Jsou dány dvě nesoustředné kružnice k_1, k_2 a přímka p. Na této přímce určete bod P tak, aby tečny z něho vedené ke kružnicím k_1, k_2 měly stejnou délku.

57. Sestrojte kružnici, která se dotýká dané kružnice $k(S; r)$ a prochází dvěma různými body A, B, které leží vně dané kružnice k.

4.3.2 Mocnost bodu ke kružnici – Úlohy na domácí přípravu

58. Je dán lichoběžník $ABCD$ se základnami AB, CD, $|AB| > |CD|$. Uvnitř úsečky AD sestrojte bod P a uvnitř úsečky BC bod Q tak, aby platilo zároveň $PQ||AB$ a $PC||AQ$.

59. Sestrojte lichoběžník $ABCD$, jsou-li dány délky jeho ramen $|BC| = 4.5cm$, $|DA| = 3cm$ a velikost $75°$ úhlu, který svírají přímky BC a AD, platí-li navíc $|AB||CD| = |AC|^2$.

5 Analytické vyjádření afinního zobrazení

5.1 Afinní zobrazení

Definice 21 (Afinní zobrazení). *Zobrazení f afinního prostoru A do afinního prostoru A' se nazývá afinní, jestliže má tuto vlastnost: Leží-li navzájem různé body B, C, D z prostoru A na přímce, pak jejich obrazy $f(B), f(C), f(D)$ buď splývají, nebo jsou navzájem různé, leží na jedné přímce a jejich dělící poměr se rovná dělícímu poměru jejich vzorů, tj.:*

$$(f(B), f(C); f(D)) = (B, C; D).$$

Každé afinní zobrazení f afinní roviny A_2 do sebe je vzhledem k libovolně zvolené lineární soustavě souřadnic dáno rovnicemi:

$$\begin{array}{rrcrcrcr} f: & x' & = & a_{11}x & + & a_{12}y & + & b_1 \\ & y' & = & a_{21}x & + & a_{22}y & + & b_2 \end{array}$$

Každé afinní zobrazení f v prostoru A_3 můžeme zapsat soustavou rovnic

$$\begin{array}{rrcrcrcrcr} f: & x_1' & = & a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & a_{13}x_3 & + & b_1 \\ & x_2' & = & a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & a_{23}x_3 & + & b_2 \\ & x_3' & = & a_{31}x_1 & + & a_{32}x_2 & + & a_{33}x_3 & + & b_3 \end{array}$$

5.2 Asociovaný homomorfismus

Místo homomorfismus říkáme též lineární zobrazení.

Definice 22 (Homomorfismus). *Zobrazení φ vektorového prostoru V do vektorového prostoru V' se nazývá homomorfismus (lineární zobrazení), jestliže pro všechna $\vec{u}, \vec{v} \in V$, $k \in \mathbb{T}$ (místo obecného tělesa $\mathbb{T}$ můžeme uvažovat $\mathbb{R}$) platí:*

$$\begin{array}{lcl} (1) & \varphi(\vec{u} + \vec{v}) & = \varphi(\vec{u}) + \varphi(\vec{v}), \\ (2) & \varphi(k\vec{u}) & = k\varphi(\vec{u}). \end{array}$$

Definice 23 (Asociovaný homomorfismus zobrazení f). *Uvažujme afinní zobrazení f prostoru A do prostoru A', např. $f : E_2 \to E_2$. Potom* **asociovaným** *(tj. jednoznačně přiřazeným)* **homomorfismem** *afinního zobrazení f rozumíme lineární zobrazení φ, které zobrazuje zaměření V prostoru A do zaměření V' prostoru A' takto:*

$$\vec{u} = Y - X \Rightarrow \varphi(\vec{u}) = f(Y) - f(X), \tag{3}$$

kde X, Y jsou body z A, $\vec{u} \in V$; $f(X), f(Y)$ body z A', $\varphi(\vec{u}) \in V'$.

PŘÍKLAD 5.1. *Ukažte, že se skutečně jedná o lineární zobrazeni dle definice 22.*

Věta 31 (O jednoznačném určení φ)**.** *Ke každému afinnímu zobrazení f prostoru A je jednoznačně přiřazen (asociován) homomorfismus φ zaměření V prostoru A do zaměření V' prostoru A' takový, že:*

$$\varphi(B - A) = f(B) - f(A).$$

Důkaz. Ukážeme, že výsledek tohoto homomorfismu nezávisí na umístění vektoru, pouze na zobrazení f. □

Věta 32 (O jednoznačném určení f)**.** *Zobrazení f je jednoznačně určeno, je-li dán homomorfismus φ a obraz $f(P)$ jednoho bodu P:*

$$f(X) = f(P) + \varphi(u).$$

Důkaz. $\varphi(X - P) = f(X) - f(P) \longrightarrow f(X) = f(P) + \varphi(X - P)$ □

Věta 33 (O určenosti afinního zobrazení)**.** *Mějme dva afinní bodové prostory A_n, ${A'}_m$. Nechť $M_0, M_1, M_2, ..., M_n$ je $n+1$ lineárně nezávislých bodů v A_n, $M'_0, M'_1, ..., M'_n$ $n+1$ libovolně zvolených bodů v ${A'}_m$. Pak existuje právě jedno afinní zobrazení f prostoru A_n do ${A'}_m$, které přiřazuje bodům M_j body M'_j tak, že*

$$M'_j = f(M_j);\ j = 0, 1, ..., n.$$

5.3 Rovnice afinního zobrazení z A_2 do A'_2

Nechť afinní bodový prostor A_2 je určen počátkem P a bází $\vec{e}_1, \vec{e}_2$, tzn. $A_2 = \{P; \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$. Podobně nechť ${A'}_2 = \{Q; \vec{d}_1, \vec{d}_2\}$. Nechť f je afinní zobrazení A_2 do ${A'}_2$ a φ asociované zobrazení k f tak, že

$$\begin{aligned} \varphi(\vec{e}_1) &= a_{11}\vec{d}_1 + a_{21}\vec{d}_2 \\ \varphi(\vec{e}_2) &= a_{12}\vec{d}_1 + a_{22}\vec{d}_2. \end{aligned} \tag{4}$$

tzn. koeficienty a_{ij} jsou souřadnice vektorů $\varphi(\vec{e}_1)$, $\varphi(\vec{e}_2)$ v bázi zaměření prostoru A_2,

$$f(P) = Q + b_1\vec{d}_1 + b_2\vec{d}_2\,, \tag{5}$$

tzn. počátek $P \in A_2$ se zobrazuje do bodu $f(P) \in {A'}_2$, který má při počátku Q souřadnice $[b_1, b_2]$.

Nyní určíme vztah mezi souřadnicemi libovolného bodu $X \in A_2$ a jeho obrazu $f(X) \in A'_2$. Nejprve vyjádřeme souřadnice X, $f(X)$ takto

$$X = P + x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2\,, \tag{6}$$

$$f(X) = Q + x'_1\vec{d}_1 + x'_2\vec{d}_2\,. \tag{7}$$

Zobrazíme-li bod X v afinitě f, můžeme dle uvedených vlastností zobrazení f a φ psát:

$$f(X) = f(P) + x_1\varphi(\vec{e}_1) + x_2\varphi(\vec{e}_2).$$

Po dosazení z (4) a (5) dostáváme

$$f(X) = Q + b_1\vec{d}_1 + b_2\vec{d}_2 + x_1(a_{11}\vec{d}_1 + a_{21}\vec{d}_2) + x_2(a_{12}\vec{d}_1 + a_{22}\vec{d}_2).$$

Po úpravě a porovnání koeficientů při $\vec{d}_i$ s vyjádřením (7) dostáváme hledané rovnice

$$\begin{aligned} x'_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + b_1 \\ x'_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + b_2. \end{aligned} \tag{8}$$

Nyní ještě určíme rovnice asociovaného zobrazení φ. Nechť vektor $\vec{u} \in V_2$ se zobrazí do vektoru $\varphi(\vec{u}) \in V'_2$. Pro souřadnice vzoru $\vec{u}$ a obrazu $\varphi(\vec{u})$ platí

$$\vec{u} \;=\; u_1\vec{e}_1 + u_2\vec{e}_2; \tag{9}$$

$$\varphi(\vec{u}) \;=\; u'_1\vec{d}_1 + u'_2\vec{d}_2 \tag{10}$$

Na (9) aplikujeme zobrazení φ a upravíme dle (4). Dostaneme

$$\varphi(\vec{u}) = u_1\varphi(\vec{e}_1) + u_2\varphi(\vec{e}_2) = u_1(a_{11}\vec{d}_1 + a_{21}\vec{d}_2) + u_2(a_{12}\vec{d}_1 + a_{22}\vec{d}_2).$$

Po úpravě a srovnání s (10) dostaneme hledané rovnice asociovaného zobrazení:

$$\begin{aligned} u'_1 &= a_{11}u_1 + a_{12}u_2 \\ u'_2 &= a_{21}u_1 + a_{22}u_2 \end{aligned} \tag{11}$$

Jinou formou zápisu (8) je soustava rovnic

$$\begin{aligned} x'_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + b_1 \\ x'_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + b_2 \end{aligned}$$

maticový zápis soustavy

$$\begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix},$$

případně maticová rovnice

$$\mathbf{X}' = A \cdot \mathbf{X} + B.$$

5.4 Rovnice afinního zobrazení z A_n do A_m

Nechť afinní bodový prostor A_n je určen počátkem P a bází $\vec{e}_1, ..., \vec{e}_n$, tzn. $A_n = \{P; \vec{e}_1, ..., \vec{e}_n\}$. Podobně nechť $A'_m = \{Q; \vec{d}_1, \vec{d}_2, ..., \vec{d}_m\}$. Nechť f je afinní zobrazení A_n do A'_m a φ asociované zobrazení k f tak, že

$$\varphi(\vec{e}_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij}\vec{d}_i\,; \quad j = 1, ..., n, \tag{12}$$

tzn. koeficienty a_{ij} jsou souřadnice vektorů $\varphi(\vec{e}_j)$ v bázi zaměření prostoru A_m,

$$f(P) = Q + \sum_{i=1}^{m} b_i\vec{d}_i\,, \tag{13}$$

tzn. počátek $P \in A_m$ se zobrazuje do bodu $f(P) \in A'_m$, který má při počátku Q souřadnice b_i.

S ohledem na výše uvedené úmluvy nyní určíme vztah mezi souřadnicemi libovolného bodu $X \in A_n$ a jeho obrazu $f(X) \in A'_m$. Vyjádřeme souřadnice $X,\ f(X)$:

$$X = P + \sum_{j=1}^{n} x_j\vec{e}_j\,, \tag{14}$$

$$f(X) = Q + \sum_{i=1}^{m} x'_i\vec{d}_i\,. \tag{15}$$

Zobrazíme-li bod X v afinitě f, můžeme dle uvedených vlastností zobrazení f a φ psát:

$$f(X) = f(P) + \sum_{j=1}^{n} x_j\phi(\vec{e}_j).$$

Po dosazení z (12) a (13) dostáváme

$$f(X) = Q + \sum_{i=1}^{m} b_i\vec{d}_i + \sum_{j=1}^{n} x_j \sum_{i=1}^{m} a_{ij}\vec{d}_i,$$

po úpravě

$$f(X) = Q + \sum_{i=1}^{m}(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + b_i)\vec{d}_i. \tag{16}$$

Porovnáme-li koeficienty při $\vec{d}_i$ ve vyjádřeních (15) a (16), dostáváme hledané rovnice

$$x'_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + b_i, \quad i = 1, 2, ..., m \tag{17}$$

Nyní ještě určíme rovnice asociovaného zobrazení φ. Nechť vektor $\vec{u} \in V_n$ se zobrazí do vektoru $\varphi(\vec{u}) \in V'_m$. Pro souřadnice vzoru $\vec{u}$ a obrazu $\varphi(\vec{u})$ platí

$$\vec{u} = \sum_{j=1}^{n} u_j \vec{e}_j; \tag{18}$$

$$\varphi(\vec{u}) = \sum_{i=1}^{m} u'_i \vec{d}_i \tag{19}$$

Na (18) aplikujeme zobrazení φ a upravíme dle (12). Dostaneme

$$\varphi(\vec{u}) = \sum_{j=1}^{n} u_j \varphi(\vec{e}_j) = \sum_{j=1}^{n} u_j \sum_{i=1}^{m} a_{ij} \vec{d}_i.$$

Po úpravě

$$\varphi(\vec{u}) = \sum_{i=1}^{m} (\sum_{j=1}^{n} a_{ij} u_j) \vec{d}_i. \tag{20}$$

Srovnáním (20) s (19) dostaneme hledané rovnice asociovaného zobrazení:

$$u'_i = \sum_{j}^{n} a_{ij} u_j, \quad i = 1, ..., m \tag{21}$$

Jinou formou zápisu (17) je soustava rovnic

$$\begin{array}{lcl}
x'_1 & = & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n + b_1 \\
x'_2 & = & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n + b_2 \\
& .... & \\
x'_n & = & a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n + b_n,
\end{array}$$

maticový zápis soustavy

$$\begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ . \\ . \\ . \\ x'_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ . & . & ... & . \\ . & . & ... & . \\ . & . & ... & . \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ . \\ . \\ b_n \end{bmatrix},$$

případně maticová rovnice

$$\mathbf{X}' = A \cdot \mathbf{X} + B.$$

PŘÍKLAD 5.2. *Rovnoběžné promítání prostoru* A_3 *do průmětny* $\pi \subset A_3$*, vzhledem k pevné lineární soustavě souřadnic prostoru* A_3*, je-li dána průmětna* π *rovnicí* $2x_1 + x_2 - x_3 + 2 = 0$ *a směr promítání je určen vektorem* $\vec{s} = (2; 1; 3)$.

PŘÍKLAD 5.3. *Určete rovnice afinního zobrazení* $f : A_3 \to A_2$*, které bodům* $A = [1, 2, 3]$, $B = [0, 1, 1]$, $C = [1, -1, 2]$, $D = [3, 0, 1]$ *přiřazuje v daném pořadí body* $A' = [-1, 3]$, $B = [0, 2]$, $C = [0, 0]$, $D = [3, 1]$.

5.5 Skládání afinních zobrazení

Nechť f_1 je afinní zobrazení prostoru A do A', f_2 afinní zobrazení prostoru A' do A''. Jestliže každému bodu $X \in A$ je v f_1 přiřazen bod $f_1(X) \in A'$ a bodu $f_1(X)$ přiřazen bod $f_2[f_1(X)] \in A''$, říkáme, že zobrazení f přiřazující bodu X bod $f_2[f_1(X)]$ vzniklo složením zobrazení f_1 a f_2. Zapisujeme $f = f_2 \cdot f_1$, $f = f_2 f_1$ nebo $f = f_2(f_1(X))$.

Věta 34. *Složením dvou afinních zobrazení* f_1, f_2 *vznikne afinní zobrazení* f*. Zobrazení* φ *asociované k* f *vznikne složením zobrazení* φ_1, φ_2 *asociovaných po řadě k* f_1, f_2.

PŘÍKLAD 5.4. *V prostoru* E_2 *jsou dány dvě středové souměrnosti* S *a* O*. Určete zobrazení* $Z_1 = SO$ *a* $Z_2 = OS$.

PŘÍKLAD 5.5. *V prostoru* E_n *je dáno posunutí* T *a středová souměrnost* S*. Určete zobrazení* $Z_1 = TS$ *a* $Z_2 = ST$.

6 Afinní transformace prostoru (Afinity)

Věta 35 (Inverzní zobrazení)**.** *Uvažujme afinní zobrazení f afinního prostoru A na afinní prostor A'. Nechť je toto zobrazení navíc prosté (prostory A, A' mají stejnou dimenzi). Pak k zobrazení f existuje zobrazení inverzní f^{-1}, které je rovněž afinním zobrazením.*

Důkaz. Jsou-li B', C', D' tři kolineární body v prostoru $\mathcal{A}'$ a platí $(B', C', D') = \lambda$, uvažujme vzory B, C bodů B', C' při zobrazení f a na jimi určené přímce BC zvolme bod D tak, že dělící poměr $(B, C, D) = \lambda$. Pak bod $f(D)$ leží na přímce $B'C' = f(B)f(C)$ a platí $(B', C', f(D)) = \lambda$. Protože také $(B', C', D') = \lambda$, je $f(D) = D'$ a dělící poměr $(B', C', D') = (B, C, D)$. $\square$

Dále budeme uvažovat speciální případ, kdy prostory A a A' splynou. To znamená **vzájemně jednoznačné zobrazení prostoru** A **na sebe**.

Definice 24. *Vzájemně jednoznačné afinní zobrazení afinního prostoru A na sebe nazýváme* **afinitou** *prostoru A nebo* **afinní transformací prostoru** A.

Věta 36. *Všechny afinity prostoru A tvoří při obvyklém skládání grupu, tzv.* **afinní grupu prostoru** A.

Důkaz. Složením dvou afinit prostoru A vznikne opět afinita prostoru A. K afinitě f existuje inverzní afinita f^{-1} (viz věta 35 odstavec). Neutrálním prvkem je zřejmě identita. $\square$

Věta 37 (O určenosti)**.** *Nechť $M_0, M_1, M_2, ..., M_n$ a $M_0', M_1', M_2', ..., M_n'$ jsou dvě skupiny $(n+1)$ lineárně nezávislých bodů afinního prostoru A_n. Pak existuje jediná afinita f prostoru A_n, pro kterou*

$$f(M_i) = M_i', \quad i = 0, 1, ..., n.$$

Jestliže v uvedené větě určíme pomocí dvou jmenovaných skupin lineárně nezávislých bodů dvě afinní souřadnicové soustavy prostoru A, pak tyto soustavy určují příslušnou afinitu f uvažovaného prostoru.

Věta 38. *Nechť v afinním bodovém prostoru A_n jsou dány dvě afinní souřadnicové soustavy $A_n = \{P; \vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n\}$; $A_n = \{Q; \vec{d}_1, \vec{d}_2, ..., \vec{d}_n\}$. Pak existuje jediná afinita prostoru A_n, pro kterou*

$$f(P) = Q$$

a asociované zobrazení φ

$$\varphi(\vec{e}_i) = \vec{d}_i, \quad i = 1, 2, ..., n.$$

6.1 Rovnice afinity prostoru A_n

Afinitu prostoru A_n chápeme jako speciální případ afinního zobrazení z A_n do A'_m, kde $m = n$. Potom je tato afinita určena rovnicemi

$$x'_i = \sum_j^n a_{ij} x_j + b_i, \quad i = 1, ..., n \tag{22}$$

zobrazujícími bod $X = (x_1, ..., x_n)$ do bodu $X' = (x'_1, ..., x'_n)$. Zobrazení asociované

$$u'_i = \sum_j^n a_{ij} u_j, \quad i = 1, ..., n \tag{23}$$

zobrazuje vektor $\vec{u}(u_1, ..., u_n)$ do $\vec{u'}(u'_1, ..., u'_n)$.

Protože afinita prostoru A_n je zobrazení vzájemně jednoznačné, je determinant zobrazení

$$\delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Tento determinant se nazývá **modulem afinity**. Dá se ukázat, že modul afinity nezávisí na volbě báze uvažovaného prostoru.

PŘÍKLAD 6.1. *Určete afinitu v rovině A_2, ve které při dané soustavě souřadné se bod $B = [0,0]$ zobrazuje do bodu $B' = [1,0]$, bod $C = [1,0]$ do bodu $C' = [0,1]$ a bod $D = [0,1]$ do bodu $D' = [0,0]$.*

PŘÍKLAD 6.2. *Určete afinitu v A_2, je-li obrazem bodu $B = [6;-2]$ bod $B' = [1;1]$, obrazem vektoru $\vec{u} = (2;1)$ vektor $\vec{u'} = (4;2)$ a vektoru $\vec{v} = (-1;2)$ vektor $\vec{v'} = (-3;6)$. Porovnejte obsahy trojúhelníků BCD a $B'C'D'$, kde $C = B + \vec{u}$, $D = B + \vec{v}$ a $C' = B' + \vec{u'}$, $D' = B' + \vec{v'}$.*

6.2 Modul afinity

Nyní se budeme zabývat vlastností modulu afinity, která je metrická, tj. závislá na existenci skalárního součinu. Proto se v dalším omezíme ve svých úvahách na eukleidovské prostory, přesněji na E_3 a E_2.

Věta 39. *Nechť f je afinita v prostoru E_3 (resp. E_2), která má modul δ. Nechť U je měřitelný útvar v E_3 (resp. E_2), který má objem V (resp. obsah V). Nechť obrazem útvaru U v afinitě f je útvar U', který má objem V' (resp. obsah V'). Potom platí*

$$V' = |\delta| \cdot V. \tag{24}$$

Důkaz. Míra měřitelných útvarů v E_3 (resp. E_2) je definována pomocí rovnoběžnostěnů (resp. rovnoběžníků). Proto se v důkazu omezíme na afinní zobrazení rovnoběžnostěnů v E_3 a rovnoběžníků v E_2. Nechť v E_3 je rovnoběžnostěn určen trojicí nezávislých vektorů $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$, které mají ve zvolené bázi souřadnice $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$, $\vec{w} = (w_1, w_2, w_3)$. Obrazy těchto vektorů v zobrazení φ asociovaném k afinitě f označme $\vec{u}' = \varphi(\vec{v})$, $\vec{v}' = \varphi(\vec{v})$, $\vec{w}' = \varphi(\vec{w})$ a jejich souřadnice $\vec{u}' = (u_1', u_2', u_3')$, $\vec{v}' = (v_1', v_2', v_3')$, $\vec{w}' = (w_1', w_2', w_3')$. V afinitě f a zobrazení φ platí dle vztahu (23)

$$u_i' = \sum_{j=1}^{3} a_{ij} u_j, \quad v_i' = \sum_{j=1}^{3} a_{ij} v_j, \quad w_i' = \sum_{j=1}^{3} a_{ij} w_j; \quad i = 1, 2, 3. \tag{25}$$

Objem V' zobrazeného rovnoběžnostěnu U' určíme známým vztahem smíšeného součinu, stejně tak objem V rovnoběžnostěnu U:

$$V' = \begin{vmatrix} u_1' & u_2' & u_3' \\ v_1' & v_2' & v_3' \\ w_1' & w_2' & w_3' \end{vmatrix}, \qquad V = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}. \tag{26}$$

Dosazením (25) dostaneme

$$V' = \begin{vmatrix} \sum_{j=1}^{3} a_{1j} u_j, & \sum_{j=1}^{3} a_{2j} u_j, & \sum_{j=1}^{3} a_{3j} u_j \\ \sum_{j=1}^{3} a_{1j} v_j, & \sum_{j=1}^{3} a_{2j} v_j, & \sum_{j=1}^{3} a_{3j} v_j \\ \sum_{j=1}^{3} a_{1j} w_j, & \sum_{j=1}^{3} a_{2j} w_j, & \sum_{j=1}^{3} a_{3j} w_j \end{vmatrix}, \tag{27}$$

což lze zapsat součinem

$$V' = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} \tag{28}$$

a tedy

$$V' = \delta \cdot V. \tag{29}$$

Pokud je $\delta < 0$, pak lze znaménko minus vytknout, tj. $V' = -\delta \cdot (-V)$. Ve druhém determinantu pak zaměníme pořadí sousedních řádků, např. prvního a druhého. Pro obsahy vzoru a obrazu měřitelného útvaru v E_2 zřejmě stačí, uvážíme-li obsah V libovolně zvoleného rovnoběžníka určeného lineárně nezávislými body M, N, P a jeho obrazu v dané afinitě určeného body M', N', P'. □

Definice 25. *Je-li modul afinity kladný, nazývá se* **afinita přímá**. *Afinita se záporným modulem se nazývá* **nepřímá**. *Afinita, jejíž modul se rovná v absolutní hodnotě jedné, se nazývá ekviafinní afinita, stručně* **ekviafinita**.

PŘÍKLAD 6.3. *Určete rovnice a modul afinity $f: E_3 \to E_3$, v níž se body $K[0,0,0]$, $L[1,4,0]$, $M[-1,0,6]$, $N[4,5,8]$ zobrazí na body $K'[1,1,1]$, $L'[-2,9,6]$, $M'[0,-5,12]$, $N'[0,3,26]$.*

Řešení v programu wxMaxima:

```
(%i25) r1:b1=1; r2:b2=1; r3:b3=1; r4:a11+4*a12+b1=-2; r5:a21+4*a22+b2=9;
       r6:a31+4*a32+b3=6; r7:-a11+6*a13+b1=0; r8:-a21+6*a23+b2=-5;
       r9:-a31+6*a33+b3=12; r10:4*a11+5*a12+8*a13+b1=0;
       r11:4*a21+5*a22+8*a23+b2=3; r12:4*a31+5*a32+8*a33+b3=26;
```

(%o25) $b1 = 1$

(%o26) $b2 = 1$

(%o27) $b3 = 1$

(%o28) $b1 + 4\,a12 + a11 = -2$

(%o29) $b2 + 4\,a22 + a21 = 9$

(%o30) $b3 + 4\,a32 + a31 = 6$

(%o31) $b1 + 6\,a13 - a11 = 0$

(%o32) $b2 + 6\,a23 - a21 = -5$

(%o33) $b3 + 6\,a33 - a31 = 12$

(%o34) $b1 + 8\,a13 + 5\,a12 + 4\,a11 = 0$

(%o35) $b2 + 8\,a23 + 5\,a22 + 4\,a21 = 3$

(%o36) $b3 + 8\,a33 + 5\,a32 + 4\,a31 = 26$

```
(%i37) res:solve([r1,r2,r3,r4,r5,r6,r7,r8,r9,r10,r11,r12],
        [a11,a12,a13,a21,a22,a23,a31,a32,a33,b1,b2,b3])[1];
```

(%o37) $[a11 = 1, a12 = -1, a13 = 0, a21 = 0, a22 = 2, a23 = -1, a31 = 1, a32 = 1, a33 = 2, b1 = 1, b2 = 1, b3 = 1]$

```
(%i38) ev([x1=a11*x+a12*y+a13*z+b1,y1=a21*x+a22*y+a23*z+b2,
       z1=a31*x+a32*y+a33*z+b3],res);
```

(%o38) $[x1 = -y + x + 1, y1 = -z + 2\,y + 1, z1 = 2\,z + y + x + 1]$

```
(%i40) A:ev(matrix([a11,a12,a13],[a21,a22,a23],[a31,a32,a33]),res);
```

(%o40) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

```
(%i42) determinant(A);
```

(%o42) 6

PŘÍKLAD 6.4. *Zjistěte, zda existuje afinní zobrazení $f : A_2 \to A_3$, při kterém se body $B[1,0]$, $C[0,1]$, $D[2,p]$ zobrazí po řadě na body $B'[2,1,-1]$, $C'[3,2,0]$, $D'[1,0,2]$.*

Řešení v programu wxMaxima:

```
(%i1)  r1:a11+b1=2; r2:a21+b2=1; r3:a31+b3=-1; r4:a12+b1=3; r5:a22+b2=2;
       r6:a32+b3=0; r7:2*a11+p*a12+b1=1; r8:2*a21+p*a22+b2=0;
       r9:2*a31+p*a32+b3=2;
```

(%o1) $b1 + a11 = 2$

(%o2) $b2 + a21 = 1$

(%o3) $b3 + a31 = -1$

(%o4) $b1 + a12 = 3$

(%o5) $b2 + a22 = 2$

(%o6) $b3 + a32 = 0$

(%o7) $a12\, p + b1 + 2\, a11 = 1$

(%o8) $a22\, p + b2 + 2\, a21 = 0$

(%o9) $a32\, p + b3 + 2\, a31 = 2$

```
(%i10) res:solve([r1,r2,r3,r4,r5,r6,r7,r8,r9],
       [a11,a12,a21,a22,a31,a32,b1,b2,b3])[1];
```

(%o10) $[a11 = -1, a12 = 0, a21 = -1, a22 = 0, a31 = -\frac{p-3}{p+1}, a32 = \frac{4}{p+1}, b1 = 3, b2 = 2, b3 = -\frac{4}{p+1}]$

```
(%i11) ev([x1=a11*x+a12*y+b1,y1=a21*x+a22*y+b2,z1=a31*x+a32*y+b3],res);
```

(%o11) $[x1 = 3 - x, y1 = 2 - x, z1 = \frac{4\, y}{p+1} - \frac{(p-3)\, x}{p+1} - \frac{4}{p+1}]$

PŘÍKLAD 6.5. *Určete rovnici afinního zobrazení $f : A_2 \to A_1$, při kterém se body $[2,1]$, $[3,2]$, $[0,1]$ zobrazí po řadě na body $[2]$, $[0]$, $[8]$.*

6.2.1 Afinní zobrazení - Úlohy

1. Určete rovnici afinního zobrazení $f : A_2 \to A_1$, při kterém se body $[2,1]$, $[3,2]$, $[0,1]$ zobrazí po řadě na body $[2]$, $[4]$, $[10]$.

2. Pro jaké hodnoty parametrů p, q existuje afinní zobrazení $f : A_2 \to A'_2$, při kterém se body $[2,1]$, $[-2,3]$, $[4,0]$ zobrazí po řadě na body $[p,3]$, $[0,q]$, $[1,1]$.

7 Analytické vyjádření shodnosti

7.1 Analytická vyjádření shodných zobrazení v E_2

Osová souměrnost

Osová souměrnost $\mathbf{O}(o)$ podle osy o s obecnou rovnicí $o : ax + by + c = 0$:

$$\begin{aligned} x' &= x - \frac{2a}{a^2 + b^2}(ax + by + c) \\ y' &= y - \frac{2b}{a^2 + b^2}(ax + by + c) \end{aligned}$$

PŘÍKLAD 7.1. *V eukleidovské rovině je dána souměrnost podle přímky $p : 3x - 4y + 1 = 0$. Napište rovnice této souměrnosti.*

PŘÍKLAD 7.2. *Napište rovnice souměrnosti podle přímky $o : 2x - 3y + 1 = 0$.*

PŘÍKLAD 7.3. *Napište rovnice osové souměrnosti, zobrazující počátek na bod $[1, 5]$.*

Otočení (rotace)

Otočení (rotace) $\mathbf{R}(S, \alpha)$ se středem $S = [s_1, s_2]$:

$$\begin{aligned} x' &= (x - s_1)\cos\alpha - (y - s_2)\sin\alpha + s_1 \\ y' &= (x - s_1)\sin\alpha + (y - s_2)\cos\alpha + s_2 \end{aligned}$$

Po úpravě:

$$\begin{aligned} x' &= x\cos\alpha - y\sin\alpha + s_1 - s_1\cos\alpha + s_2\sin\alpha \\ y' &= x\sin\alpha + y\cos\alpha + s_2 - s_1\sin\alpha - s_2\cos\alpha \end{aligned}$$

PŘÍKLAD 7.4. *Napište rovnice otočení se středem $S[1, -2]$ o úhel $\alpha = 60°$.*

Středová souměrnost

Středová souměrnost $\mathbf{S}(S)$ se středem $S = [s_1, s_2]$:

$$\begin{aligned} x' &= -x + 2s_1 \\ y' &= -y + 2s_2 \end{aligned}$$

PŘÍKLAD 7.5. *Napište rovnice středové souměrnosti* $\mathbf{S}(S)$ *se středem* $S[-2,3]$.

Posunutí (translace)

Posunutí (translace) $\mathbf{T}(\vec{p})$ určené vektorem $\vec{p} = [p_1, p_2]$:

$$
\begin{aligned}
x' &= x + p_1 \\
y' &= y + p_2
\end{aligned}
$$

PŘÍKLAD 7.6. *Napište rovnice posunutí, které je určeno vzorem* $A = [-1,3]$ *a jeho obrazem* $A' = [4,2]$.

Posunuté zrcadlení

Posunuté zrcadlení s osou v souřadnicové ose x:

$$
\begin{aligned}
x' &= x + p \\
y' &= -y
\end{aligned}
$$

7.2 Analytická vyjádření některých shodných zobrazení v E_3

Některá shodná zobrazení v prostoru:

Posunutí

Posunutí určené vektorem $\vec{p} = (p_1, p_2, p_3)$:

$$
\begin{aligned}
x' &= x + p_1 \\
y' &= y + p_2 \\
z' &= z + p_3.
\end{aligned}
$$

Otočení

Otočení o úhel α kolem osy z:

$$
\begin{aligned}
x' &= x\cos\alpha - y\sin\alpha \\
y' &= x\sin\alpha + y\cos\alpha \\
z' &= z.
\end{aligned}
$$

Středová souměrnost

Souměrnost podle počátku $O = (0, 0, 0)$:

$$\begin{aligned} x' &= -x \\ y' &= -y \\ z' &= -z. \end{aligned}$$

Osová souměrnost

Souměrnost podle osy z:

$$\begin{aligned} x' &= -x \\ y' &= -y \\ z' &= z. \end{aligned}$$

Rovinová souměrnost

Souměrnost podle roviny (x, y):

$$\begin{aligned} x' &= x \\ y' &= y \\ z' &= -z. \end{aligned}$$

Šroubový pohyb

Šroubový pohyb (torze) s parametrem (redukovanou výškou závitu) v_0 a s osou v ose z:

$$\begin{aligned} x' &= x\cos\alpha - y\sin\alpha \\ y' &= x\sin\alpha + y\cos\alpha \\ z' &= z + v_0\alpha. \end{aligned}$$

7.3 Rovnice shodnosti v rovině

Každé shodné zobrazení f v rovině můžeme zapsat soustavou rovnic

$$\begin{array}{rcrcrcr} f:\ x' & = & a_{11}x & + & a_{12}y & + & b_1 \\ y' & = & a_{21}x & + & a_{22}y & + & b_2, \end{array}$$

kterou přepíšeme užitím matic do tvaru

$$f:\ \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

a stručně vyjádříme rovnicí

$$f:\ X' = A \cdot X + B. \tag{30}$$

Potom je zřejmé, že **asociovaný homomorfismus** φ takovéhoto shodného zobrazení f je dán soustavou

$$\begin{aligned} \varphi:\ u_1' &= a_{11}u_1 + a_{12}u_2 \\ u_2' &= a_{21}u_1 + a_{22}u_2, \end{aligned}$$

maticově pak

$$\varphi:\ \begin{bmatrix} u_1' \\ u_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix},$$

což lze zapsat, analogicky s rovnicí (30), ve tvaru

$$\varphi:\ \vec{u}' = A \cdot \vec{u}. \tag{31}$$

PROBLÉM: Rovnice (30) je rovnicí libovolné afinity v rovině. Máme-li dánu takovouto rovnici (soustavu), **jak poznáme, že se jedná o shodnost?**

Rovnice (30) je rovnicí shodnosti, právě když platí

$$A^T \cdot A = E, \tag{32}$$

(E je jednotková matice) jinak řečeno, když je matice A **ortonormální**.

Platí $A^T \cdot A = E$. Potom je ale $A^T = A^{-1}$ a platí tedy i rovnost $A \cdot A^T = E$.

Poznámka. Zobrazení, pro která platí $|\det A| = 1$ nazýváme ekviafinní zobrazení, stručně **ekviafinity**. Je zřejmé, že každá shodnost je ekviafinita. Platí toto tvrzení i obráceně? Můžeme říci, že každá ekviafinita je shodností?

Poznámka. Je třeba si uvědomit, že při shodném zobrazení mezi euklidovskými prostory různých dimenzí není matice A čtvercová. Potom výše uvedené úvahy o inverzní matici nemají smysl a v platnosti zůstává pouze původní podmínka $A^T \cdot A = E$.

Věta 40. *Afinní zobrazení f euklidovského prostoru E do euklidovského prostoru E' je právě tehdy shodné, když asociovaný homomorfismus φ zachovává velikost vektoru, tj.*

$$||\varphi(\vec{u})|| = ||\vec{u}||.$$

Důkaz. $||\varphi(B - A)|| = ||f(B) - f(A)||$, $|f(A)f(B)| = |AB|$, $||B - A|| = ||\vec{u}||$. □

Věta 41. *Afinní zobrazení f euklidovkého prostoru E do euklidovského prostoru E' je právě tehdy shodné, když asociovaný homomorfismus φ zachovává skalární součin vektorů, tj.*

$$\varphi(\vec{u}) \cdot \varphi(\vec{v}) = \vec{u} \cdot \vec{v}.$$

PŘÍKLAD 7.7. *Zjistěte, zda existuje shodnost E_2, při které se bod $A = [10; 0]$ zobrazí na počátek $A' = [0; 0]$ a bod $B = [25; 20]$ na bod $B' = [0; 25]$. V kladném případě napište rovnice tohoto zobrazení a najděte jeho samodružné body.*

Z podmínky (32) plyne, že afinní zobrazení určené rovnicemi

$$\begin{array}{rcrcrcr} x' & = & a_{11}x & + & a_{12}y & + & b_1 \\ y' & = & a_{21}x & + & a_{22}y & + & b_2, \end{array}$$

je shodností právě tehdy, když platí následující rovnosti:

$$\begin{aligned} a_{11}^2 + a_{21}^2 = a_{12}^2 + a_{22}^2 &= 1 \\ a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22} = a_{12}a_{11} + a_{22}a_{21} &= 0 \end{aligned}$$

Samodružné body

Samodružné body přímé shodnosti jsou řešením soustavy rovnic

$$\begin{array}{rcl} (1 - a_{11})x_1 - a_{12}x_2 & = & b_1 \\ -a_{21}x_1 + (1 - a_{22})x_2 & = & b_2. \end{array} \tag{33}$$

Samodružné směry

Směr je vyjádřen vektorem, např. $\vec{u}$. Má-li být tento směr samodružný, musí pro vektor $\vec{u}'$, který je obrazem vektoru $\vec{u}$, platit $\vec{u}' = \lambda\vec{u}$, kde $\lambda \in \mathbb{R}$. Samodružné směry (tj. vektory těchto směrů) shodnosti jsou potom **netriviálním** řešením homogenní soustavy rovnic

$$\begin{array}{rcl} (\lambda - a_{11})u_1 - a_{12}u_2 & = & 0 \\ -a_{21}u_1 + (\lambda - a_{22})u_2 & = & 0. \end{array} \tag{34}$$

Homogenní soustava n lineárních rovnic o n neznámých má netriviální řešení právě tehdy, když je determinant soustavy roven nule. Soustavy (34) má tedy nekonečně mnoho řešení, jestliže platí rovnost

$$\begin{vmatrix} (\lambda - a_{11}) & -a_{12} \\ -a_{21} & (\lambda - a_{22}) \end{vmatrix} = 0. \tag{35}$$

Rovnici (35) říkáme **charakteristická rovnice** příslušného zobrazení, v tomto případě shodnosti v rovině. Každý vektor $\vec{u}$, pro který platí $\vec{u}' = \varphi(\vec{u}) = \lambda\vec{u}$, nazýváme **vlastním vektorem** homomorfismu φ, číslo λ, které je řešením charakteristické rovnice, pak nazýváme **vlastní číslo** homomorfismu φ, odpovídající vektoru $\vec{u}$. Místo vlastní vektor a vlastní číslo se také používají termíny **charakteristický vektor** a **charakteristické číslo**.

7.4 Skládání shodných zobrazení

7.4.1 Shodnosti přímé a nepřímé

(a) Přímou shodnost lze rozložit v sudý počet osových souměrností, nepřímou shodnost v lichý počet osových souměrností.

(b) Složíme-li dvě shodnosti přímé nebo dvě shodnosti nepřímé, dostaneme shodnost přímou; složíme-li shodnost přímou a nepřímou, vznikne shodnost nepřímá.

Dokažte:

1. Složením (v libovolném pořadí) translace $\mathcal{T}$ a rotace $\mathcal{R}$, která není středovou souměrností, vznikne rotace téhož smyslu i úhlu jako $\mathcal{R}$.

2. Složením dvou translací vznikne translace nebo identita.

3. Složením translace a středové souměrnosti v libovolném pořádku vznikne středová souměrnost.

4. Složením středové souměrnosti $\mathcal{S}_1$ se středem S_1 a středové souměrnosti $\mathcal{S}_2$ se středem $S_2 \neq S_1$ vznikne translace $\mathcal{T}(S_1 \to S_2')$, přičemž úsečka S_1S_2' má střed S_2. Je-li $S_1 \equiv S_2$ je $\mathcal{S}_1\mathcal{S}_2$ identita.

PŘÍKLAD 7.8. *Trojúhelník ABC byl převeden otočením daného smyslu se středem S a úhlem velikosti $\omega = 120°$ v trojúhelník $A_1B_1C_1$, který byl dále převeden posunutím $\mathcal{T}(A_1 \to A_2)$ v trojúhelník $A_2B_2C_2$. Určete otočení, které převádí přímo $\triangle ABC$ v $\triangle A_2B_2C_2$.*

PŘÍKLAD 7.9. *Je dán rovnostranný trojúhelník ABC. Najděte všechny shodnosti, které převádějí tento trojúhelník do něho samého. Zkoumejte vlastnosti množiny těchto shodností spolu s operací skládání shodností.*

7.4.2 Grupa shodností v rovině

Definice 26. *Množinu* $\mathbf{G}$*, v níž je definována operace* $\circ$ *nazýváme grupou vzhledem k operaci* $\circ$ *(značíme* $(\mathbf{G}, \circ)$*), právě když:*

a) Výsledek operace $\circ$ *je pro každou dvojici prvků* $\mathbf{G}$ *opět prvkem* $\mathbf{G}$ *(říkáme, že operace* $\circ$ *je na* $\mathbf{G}$ *neomezeně definovaná, nebo, že množina* $\mathbf{G}$ *je uzavřená vzhledem k operaci* $\circ$*).*

b) Operace $\circ$ *je asociativní v množině* $\mathbf{G}$*.*

c) Operace $\circ$ *má neutrální prvek* $n \in \mathbf{G}$*.*

d) Ke každému prvku $k \in \mathbf{G}$ *existuje inverzní prvek* $k^{-1} \in \mathbf{G}$ *vzhledem k operaci* $\circ$*.*

Je-li navíc operace $\circ$ *komutativní v množině* $\mathbf{G}$*, nazýváme algebraickou strukturu* $(\mathbf{G}, \circ)$ *komutativní grupou.*

Ověřte následující tvrzení:

(a) Všechny shodnosti v rovině tvoří grupu $\mathbf{G_S}$.

(b) Všechny přímé shodnosti tvoří podgrupu $\mathbf{G'_S}$ grupy $\mathbf{G_S}$.

(c) Množina všech translací doplněná identitou, tvoří grupu, která je podgrupou grupy přímých shodností.

(d) Množina všech translací a středových souměrností, doplněná identitou, tvoří podgrupu grupy $\mathbf{G'_S}$.

7.5 Klasifikace shodností roviny

Myšlenka úplné klasifikace shodností: Klasifikace shodností roviny je založena na zkoumání možných samodružných bodů a směrů zobrazení, které je dáno rovnicí (soustavou)

$$f:\ X' = A \cdot X + B. \tag{36}$$

Tento postup je ilustrován řešením následujícího příkladu.

7.5.1 Řešený příklad

PŘÍKLAD 7.10. *Zjistěte, zda existuje shodnost E_2, při které se bod $K = [10; 0]$ zobrazí na počátek $K' = [0; 0]$ a bod $L = [25; 20]$ na bod $L' = [0; 25]$. V kladném případě napište rovnice tohoto zobrazení a najděte jeho samodružné body.*

Než začneme aplikovat níže uvedený postup, stojí za to si u takovýchto úloh ověřit, zda je vůbec splněna definice shodného zobrazení, tj. zda $|K'L'| = |KL|$.

Řešení v programu wxMaxima:

Definujeme obecnou podobu matic A, B z rovnice (36).

```
(%i30) A:matrix([a11,a12],[a21,a22]); b:matrix([b1],[b2]);
```

$$(\%o30)\quad \begin{pmatrix} a11 & a12 \\ a21 & a22 \end{pmatrix}$$

$$(\%o31)\quad \begin{pmatrix} b1 \\ b2 \end{pmatrix}$$

Do rovnice (36) dosadíme dané body a jejich obrazy, dostaneme dvojice rovnic `s1` a `s2`. Třetí skupinu rovnic `s3` dostaneme z podmínky $A^T \cdot A - I = 0$.

```
(%i32) s1:A.[10,0]+b-[0,0];
       s2:A.[25,20]+b-[0,25];
       s3:transpose(A).A-ident(2);
```

$$(\%o32)\quad \begin{pmatrix} b1 + 10\,a11 \\ b2 + 10\,a21 \end{pmatrix}$$

$$(\%o33)\quad \begin{pmatrix} b1 + 20\,a12 + 25\,a11 \\ b2 + 20\,a22 + 25\,a21 - 25 \end{pmatrix}$$

$$(\%o34)\quad \begin{pmatrix} a21^2 + a11^2 - 1 & a21\,a22 + a11\,a12 \\ a21\,a22 + a11\,a12 & a22^2 + a12^2 - 1 \end{pmatrix}$$

Dohromady tak máme soustavu sedmi rovnic o šesti naznámých `a11, a12, a21, a22, b1, b2`.

```
(%i35) rov:[s1[1,1],s1[2,1],s2[1,1],s2[2,1],s3[1,1],s3[1,2],s3[2,2]];
```

(%o35) $[b1+10\,a11, b2+10\,a21, b1+20\,a12+25\,a11, b2+20\,a22+25\,a21-25, a21^2+a11^2-1, a21\,a22+a11\,a12, a22^2+a12^2-1]$

Soustavu má dvě řešení (nejedná se o soustavu lineárních rovnic, proto může mít dvě řešení).

```
(%i36) res:solve(rov,[a11,a12,a21,a22,b1,b2]);
```

(%o36) $[[a11 = \frac{4}{5}, a12 = -\frac{3}{5}, a21 = \frac{3}{5}, a22 = \frac{4}{5}, b1 = -8, b2 = -6], [a11 = -\frac{4}{5}, a12 = \frac{3}{5}, a21 = \frac{3}{5}, a22 = \frac{4}{5}, b1 = 8, b2 = -6]]$

Dvěma řešením odpovídají dvě různé shodnosti. Zjistili jsme tedy, že existují dvě shodnosti, které převádějí body K, L na body K', L' (což se, vzhledem ke větě o určenosti shodného (afinního) zobrazení dalo čekat). Pokračujeme v řešení úlohy pro každou z těchto shodností zvlášť. Nejprve si připravíme matici `RovTr` pro zápis rovnic uvažovaných shodností (není nutnou součástí postupu řešení, jedná se jenom o usnadnění vizuální prezentace rovnic v programu).

```
(%i37) RovTr:matrix([x1=a11*x+a12*y+b1],[y1=a21*x+a22*y+b2]);
```

(%o37) $\begin{pmatrix} x1 = a12\,y + a11\,x + b1 \\ y1 = a22\,y + a21\,x + b2 \end{pmatrix}$

I. Shodnost daná rovnicemi

$$x1 = \frac{4\,x}{5} - \frac{3\,y}{5} - 8$$
$$y1 = \frac{3\,x}{5} + \frac{4\,y}{5} - 6$$

Definujeme matice `A1, B1` tohoto zobrazení a zapíšeme jeho rovnice.

```
(%i38) A1:ev(A,res[1]); B1:ev(b,res[1]);
```

(%o38) $\begin{pmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix}$

(%o39) $\begin{pmatrix} -8 \\ -6 \end{pmatrix}$

```
(%i40) R1:ev(RovTr,res[1]);
```

(%o40) $\begin{pmatrix} x1 = -\frac{3\,y}{5} + \frac{4\,x}{5} - 8 \\ y1 = \frac{4\,y}{5} + \frac{3\,x}{5} - 6 \end{pmatrix}$

Samodružné body najdeme řešením rovnice $X = A \cdot X + B$, pro snazší zpracování programem přepsané do tvaru $A \cdot X + B - X = 0$.

```
(%i41) RovSB1:A1.[x,y]+B1-[x,y]; solve([RovSB1[1,1],RovSB1[2,1]],[x,y]);
```

(%o41) $\begin{pmatrix} -\frac{3\,y}{5} - \frac{x}{5} - 8 \\ -\frac{y}{5} + \frac{3\,x}{5} - 6 \end{pmatrix}$

(%o42) $[[x = 5, y = -15]]$

Uvažované shodné zobrazení má tedy jediný samodružný bod $S = [5, -15]$.

Pro určení samodružných směrů řešíme charakteristickou rovnici (35) homomorfismu asociovaného s daným shodným zobrazením.

```
(%i43) CharA1:A1-%lambda*ident(2);
       CharR1:expand(determinant(CharA1))=0;
       solve(CharR1,%lambda);
```

(%o43) $\begin{pmatrix} \frac{4}{5} - \lambda & -\frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{4}{5} - \lambda \end{pmatrix}$

(%o44) $\lambda^2 - \dfrac{8\,\lambda}{5} + 1 = 0$

(%o45) $[\lambda = -\dfrac{3\,i - 4}{5}, \lambda = \dfrac{3\,i + 4}{5}]$

Charakteristická rovnice nemá reálné kořeny. To znamená, že uvažované shodné zobrazení nemá samodružné směry.

Protože uvažované zobrazení má právě jeden samodružný bod a nemá žádný samodružný směr, jedná se o OTOČENÍ.

II. Shodnost daná rovnicemi

$$x1 = -\frac{4\,x}{5} + \frac{3\,x}{5} + 8$$
$$y1 = \frac{3\,x}{5} + \frac{4\,z}{5} - 6$$

Definujeme matice `A2, B2` tohoto zobrazení a zapíšeme jeho rovnice.

```
(%i46) A2:ev(A,res[2]); B2:ev(b,res[2]);
```

(%o46) $\begin{pmatrix} -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix}$

(%o47) $\begin{pmatrix} 8 \\ -6 \end{pmatrix}$

```
(%i48) R2:ev(RovTr,res[2]);
```

(%o48) $\begin{pmatrix} x1 = \frac{3\,y}{5} - \frac{4\,x}{5} + 8 \\ y1 = \frac{4\,y}{5} + \frac{3\,x}{5} - 6 \end{pmatrix}$

Samodružné body najdeme řešením rovnice $X = A \cdot X + B$, pro snazší zpracování programem přepsané do tvaru $A \cdot X + B - X = 0$.

```
(%i49) RovSB2:A2.[x,y]+B2-[x,y]; solve([RovSB2[1,1],RovSB2[2,1]],[x,y]);
```

(%o49) $\begin{pmatrix} \frac{3\,y}{5} - \frac{9\,x}{5} + 8 \\ -\frac{y}{5} + \frac{3\,x}{5} - 6 \end{pmatrix}$

(%o50) $[]$

Uvažované shodné zobrazení tedy nemá žádný samodružný bod.

Pro určení samodružných směrů řešíme charakteristickou rovnici (35) homomorfismu asociovaného s daným shodným zobrazením.

```
(%i51) CharA2:A2-%lambda*ident(2);
       CharR2:expand(determinant(CharA2))=0;
       solve(CharR2,%lambda);
```

(%o51) $\begin{pmatrix} -\lambda - \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{4}{5} - \lambda \end{pmatrix}$

(%o52) $\lambda^2 - 1 = 0$

(%o53) $[\lambda = -1, \lambda = 1]$

Charakteristická rovnice má dva reálné kořeny (vlastní čísla). Každému z nich odpovídá jeden vlastní (charakteristický) vektor určující samodružný směr. Postupně dosadíme získaná vlastní čísla λ do soustavy (její matice) (34) a řešíme.

```
(%i54) RovSS2:A2.[u,v]-[%lambda*u,%lambda*v];
```

(%o54) $\begin{pmatrix} \frac{3\,v}{5} - \lambda\,u - \frac{4\,u}{5} \\ -\lambda\,v + \frac{4\,v}{5} + \frac{3\,u}{5} \end{pmatrix}$

```
(%i55) RovSS21:ev(RovSS2,%lambda=-1);
       solve([RovSS21[1,1],RovSS21[2,1]],[u,v]);
```

(%o55) $\begin{pmatrix} \frac{3\,v}{5} + \frac{u}{5} \\ \frac{9\,v}{5} + \frac{3\,u}{5} \end{pmatrix}$ $solve : dependentequationseliminated : (2)$

(%o56) $[[u = -3\,\%r3, v = \%r3]]$

První samodružný směr je určen vektorem $\vec{u}_1 = (-3, 1)$.

```
(%i57) RovSS22:ev(RovSS2,%lambda=1);
       solve([RovSS22[1,1],RovSS22[2,1]],[u,v]);
```

(%o57) $\begin{pmatrix} \frac{3v}{5} - \frac{9u}{5} \\ \frac{3u}{5} - \frac{v}{5} \end{pmatrix}$ *solve* : *dependentequationseliminated* : (2)

(%o58) $[[u = \dfrac{\%r4}{3}, v = \%r4]]$

Druhý samodružný směr je určen vektorem $\vec{u}_2 = (1, 3)$.

Protože uvažované zobrazení nemá žádný samodružný bod a má dva (na sebe kolmé) samodružné směry, jedná se o POSUNUTÉ ZRCADLENÍ.

7.5.2 Klasifikace shodností roviny

Z podmínky $A^T \cdot A = E$ plyne, že afinní zobrazení určené rovnicemi

$$\begin{array}{rcrcrcr} x' & = & a_{11}x & + & a_{12}y & + & b_1 \\ y' & = & a_{21}x & + & a_{22}y & + & b_2, \end{array}$$

je shodností právě tehdy, když platí následující rovnosti:

$$\begin{array}{rl} a_{11}^2 + a_{21}^2 = a_{12}^2 + a_{22}^2 & = 1 \\ a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22} = a_{12}a_{11} + a_{22}a_{21} & = 0 \end{array}$$

Potom je zřejmé, že existuje úhel $\alpha \in \langle 0°; 360°)$ takový, že lze napsat

$$\begin{array}{rcl} a_{11} & = & \cos\alpha, \\ a_{21} & = & \sin\alpha, \\ a_{12}\cos\alpha + a_{22}\sin\alpha & = & 0, \\ a_{22} & = & \varepsilon\cos\alpha, \\ a_{12} & = & -\varepsilon\sin\alpha, \text{kde } \varepsilon = \pm 1. \end{array}$$

Hodnota ε určuje, zda se jedná o shodnost přímou ($\varepsilon = 1$) nebo nepřímou ($\varepsilon = -1$).

I. Přímé shodnosti

Každou přímou shodnost v rovině můžeme vyjádřit rovnicemi ve tvaru

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1' & = & x_1\cos\alpha & - & x_2\sin\alpha & + & b_1 \\ x_2' & = & x_1\sin\alpha & + & x_2\cos\alpha & + & b_2 \end{array}.$$

Samodružné body

Samodružné body přímé shodnosti jsou řešením soustavy rovnic

$$\begin{array}{rcl} x_1(1-\cos\alpha)+x_2\sin\alpha & = & b_1 \\ -x_1\sin\alpha+x_2(1-\cos\alpha) & = & b_2. \end{array} \tag{37}$$

Nejprve nás bude zajímat přímá shodnost v rovině, která má právě jeden samodružný bod. Soustava (37) má právě jedno řešení, pokud je regulární, tj. pokud pro její determinant platí

$$\left|\begin{array}{cc} (1-\cos\alpha), & \sin\alpha \\ -\sin\alpha, & (1-\cos\alpha) \end{array}\right| \neq 0.$$

Po úpravě dostaneme

$$2(1-\cos\alpha)\neq 0,$$

což vede k podmínce

$$\cos\alpha\neq 1.$$

Tak dostáváme

1) OTOČENÍ (ROTACI).

Stačí volit počátek soustavy souřadné v onom jediném samodružném bodě a dostaneme známé vyjádření rotace kolem počátku o úhel α:

$$\begin{aligned} x_1' &= x_1\cos\alpha - x_2\sin\alpha \\ x_2' &= x_1\sin\alpha + x_2\cos\alpha \end{aligned}$$

Samodružné směry

Samodružné směry (tj. vektory těchto směrů) přímé shodnosti jsou **netriviálním** řešením soustavy homogenních rovnic

$$\begin{array}{rcl} u_1(\lambda-\cos\alpha)+u_2\sin\alpha & = & 0 \\ -u_1\sin\alpha+u_2(\lambda-\cos\alpha) & = & 0. \end{array} \tag{38}$$

Ta má netriviální (tj. nekonečně mnoho) řešení právě tehdy, když je splněna charakteristická rovnice přímé shodnosti v rovině

$$\left|\begin{array}{cc} (\lambda-\cos\alpha), & \sin\alpha \\ -\sin\alpha, & (\lambda-\cos\alpha) \end{array}\right| = 0. \tag{39}$$

Úpravou (39) dostaneme rovnici

$$(\lambda-\cos\alpha)^2+\sin^2\alpha=0,$$

která je splněna za předpokladu, že $\sin\alpha=0$ a zároveň $\cos\alpha=1=\lambda$ nebo $\cos\alpha=-1=\lambda$. Pro $\cos\alpha=-1$ tak dostáváme

2) STŘEDOVOU SOUMĚRNOST

s analytickým vyjádřením

$$\begin{aligned} x_1' &= -x_1 + b_1 \\ x_2' &= -x_2 + b_2. \end{aligned}$$

Za podmínky, že $\cos\alpha = 1$ dostaneme, pro $b_1 = b_2 = 0$,

3) IDENTITU

$$\begin{aligned} x_1' &= x_1 \\ x_2' &= x_2 \end{aligned}$$

a pro $b_1 \neq 0 \vee b_2 \neq 0$ dostáváme

4) POSUNUTÍ

$$\begin{aligned} x_1' &= x_1 + b_1 \\ x_2' &= x_2 + b_2. \end{aligned}$$

II. Nepřímé shodnosti

Každou nepřímou shodnost v rovině můžeme vyjádřit rovnicemi ve tvaru

$$\begin{aligned} x_1' &= x_1\cos\alpha + x_2\sin\alpha + b_1 \\ x_2' &= x_1\sin\alpha - x_2\cos\alpha + b_2. \end{aligned}$$

Samodružné směry

K vyšetření nepřímých shodností použijeme samodružné směry. Řešením charakteristické rovnice

$$\begin{vmatrix} (\lambda - \cos\alpha), & -\sin\alpha \\ -\sin\alpha, & (\lambda + \cos\alpha) \end{vmatrix} = 0, \tag{40}$$

dostaneme podmínku

$$\lambda = \pm 1,$$

která odpovídá tomu, že uvažované zobrazení má dva navzájem kolmé samodružné směry. Jeden, pro $\lambda = 1$, se zachovává, druhý, pro $\lambda = -1$, se mění v opačný. Volme soustavu souřadnou tak, aby osa x měla směr odpovídající $\lambda = 1$. Směr osy y pak zřejmě odpovídá $\lambda = -1$. Potom je nepřímá shodnost popsána rovnicemi

$$\begin{aligned} x_1' &= x_1 + b_1 \\ x_2' &= -x_2 + b_2. \end{aligned}$$

Pokud je $b_1 = 0$, má uvažované zobrazení **přímku samodružných bodů** a jedná se tedy o

5) OSOVOU SOUMĚRNOST

$$\begin{aligned} x_1' &= x_1 \\ x_2' &= -x_2 + b_2. \end{aligned}$$

Pokud je ale $b_1 \neq 0$, má pouze **samodružnou přímku** a jedná se o

6) POSUNUTÉ ZRCADLENÍ.

7.5.3 Shodnosti v rovině - Úlohy

60. Určete parametr s tak, aby existovala shodnost roviny zobrazující body $[0,0]$, $[3,4]$ po řadě na body $[5,0]$, $[9,s]$. Napište rovnice tohoto zobrazení a souřadnice obrazu bodu $[5,0]$. **[2]**

61. Určete $a,\ b,\ c$ tak, aby rovnice $x' = \dfrac{3}{4}x + by + 1, \quad y' = ax + cy - 1$ vyjadřovaly shodnost. **[3]**

62. Shodné zobrazení euklidovské roviny do euklidovského prostoru je dáno vzhledem ke kartézským soustavám souřadnic rovnicemi

a) $x' = x + \dfrac{1}{2}y + 1,\ y' = ax + \dfrac{1}{2}y - 1,\ z' = bx + cy + 3,$

b) $x' = x + by - 2,\ y' = \dfrac{1}{2}y + 1,\ z' = ax + cy - 3.$

Určete koeficienty a, b, c. **[3]**

63. Najděte souřadnice obrazu bodu $B = [1,2]$ v otočení v E_2 kolem středu $S = [3,-4]$ o úhel $\alpha = 420°$. Napište rovnice této shodnosti. **[1]**

64. Určete $p,\ q$ tak, aby existovala shodnost zobrazující body $[3,0], [1,2], [-1,-1]$ po řadě na body $[1,4], [p,2], [2,q]$. Najděte samodružné body a směry tohoto zobrazení. **[2]**

65. Napište rovnice středové souměrnosti v E_2 podle středu $S = [-4,5]$. **[1]**

66. Napište rovnice shodnosti roviny E_2, která vznikne složením tří osových souměrností s osami o rovnicích: $x = 0,\ y = 0,\ x - 2y = 0$. **[3]**

67. Rotace kolem bodu $S = [2;1]$ v E_2 zobrazuje bod $A = [1;1]$ na bod A'. Najděte souřadnice bodu A', jestliže pro úhel rotace α platí $\alpha = \frac{2}{3}\pi$. **[2]**

68. Najděte souřadnice středu a úhel rotace, která je dána rovnicemi: $x' = \frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y + 1,\ y' = \frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y - 2$. **[2]**

69. Najděte rovnice obrazu přímky p v rotaci v E_2 kolem středu $S = [-2;1]$ o úhel $\alpha = \frac{\pi}{6}$, jestliže $p : x - y + 1 = 0$. **[3]**

7.6 Klasifikace shodností prostoru E_3

Věta 42. *Každé shodné zobrazení v prostoru* E_3 *lze složit z nejvýše čtyř rovinových souměrností.*

Některá shodná zobrazení v prostoru:

- Otočení kolem osy
- Posunutí
- Osová souměrnost
- Středová souměrnost
- Šroubový pohyb (torze)

Postup klasifikace shodností v trojrozměrném prostoru lze nečekaně zjednodušit. Vhodné umístění soustavy souřadnic nám dovolí využívat poznatky z klasifikace shodností v rovině.

Každé shodné zobrazení f v prostoru můžeme zapsat soustavou rovnic

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} f:\ x_1' & = & a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & a_{13}x_3 & + & b_1 \\ x_2' & = & a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & a_{23}x_3 & + & b_2 \\ x_3' & = & a_{31}x_1 & + & a_{32}x_2 & + & a_{33}x_3 & + & b_3, \end{array}$$

kterou lze užitím matic přepsat do tvaru

$$f:\ \begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

a pak stručně vyjádřit rovnicí

$$f:\ X' = A \cdot X + B. \tag{41}$$

Stejně jako v rovině i v prostoru platí, že (41) je shodností právě tehdy, když je

$$A^T \cdot A = E, \tag{42}$$

Důležitou skutečností je, že charakteristická rovnice tohoto zobrazení, která se dá stručně zapsat ve tvaru

$$\det(A - \lambda E) = 0, \tag{43}$$

kde E je jednotková matice, je algebraickou rovnicí **třetího stupně** vzhledem k neznámé λ. Vzhledem k tomu, že imaginární kořeny se vyskytují vždy ve dvojicích (navzájem komplexně sdružených čísel), má algebraická rovnice třetího stupně vždy alespoň jeden kořen reálný. V případě rovnice (43) ho označme λ_0. Shodnost v E_3 má tak vždy alespoň jeden samodružný směr $\vec{u}$; $\vec{u}' = \lambda_0 \vec{u}$. V případě shodností se zachovává velikost vektoru, tj. platí $||\vec{u}'|| = ||\lambda_0 \vec{u}|| = ||\vec{u}||$. Potom je zřejmé, že hodnota λ_0 bude 1 nebo -1. Předpokládejme, že vektor $\vec{u}$ je jednotkový a volme soustavu souřadnou tak, aby měla osa z směr tohoto vektoru. Při takto zvolené soustavě souřadné se rovnice shodnosti zjednoduší na tvar

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1' & = & a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & & & + & b_1 \\ x_2' & = & a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & & & + & b_2 \\ x_3' & = & & & & \pm & x_3 & + & b_3. \end{array}$$

Potom je požadavek, aby byla matice tohoto zobrazení

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \pm 1 \end{bmatrix}$$

ortonormální, splněn právě tehdy, když je ortonormální matice

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}.$$

To je ale úloha, kterou jsme řešili při klasifikaci shodností v rovině. Víme tedy, že při vhodné volbě os x, y připadají v úvahu následující možnosti, jak může tato matice vypadat:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}; \text{ pro } \sin\alpha \neq 0.$$

Ke každé z těchto matic existují dvě soustavy rovnic (protože uvažujeme $\pm z$). Posouzením množin samodružných bodů příslušných zobrazení a vhodnými volbami soustavy souřadné se dobereme k výsledné klasifikaci:

1) IDENTITA ($b_1 = b_2 = b_3 = 0$) nebo POSUNUTÍ

$$\begin{array}{rcrcr} x_1' & = & x_1 & + & b_1 \\ x_2' & = & x_2 & + & b_2 \\ x_3' & = & x_3 & + & b_3. \end{array}$$

2) SOUMĚRNOST PODLE ROVINY ($b_1 = b_2 = 0$) nebo

SOUMĚRNOST PODLE ROVINY složená s POSUNUTÍM podél této roviny

$$\begin{aligned} x_1' &= x_1 + b_1 \\ x_2' &= x_2 + b_2 \\ x_3' &= -x_3 + b_3. \end{aligned}$$

3) SOUMĚRNOST PODLE OSY rovnoběžné se z ($b_3 = 0$) nebo

SOUMĚRNOST PODLE OSY rovnoběžné se z složená s POSUNUTÍM podél této osy

$$\begin{aligned} x_1' &= -x_1 + b_1 \\ x_2' &= -x_2 + b_2 \\ x_3' &= x_3 + b_3. \end{aligned}$$

4) STŘEDOVÁ SOUMĚRNOST

$$\begin{aligned} x_1' &= -x_1 + b_1 \\ x_2' &= -x_2 + b_2 \\ x_3' &= -x_3 + b_3. \end{aligned}$$

5) OTOČENÍ kolem osy rovnoběžné se z ($b_3 = 0$) nebo

OTOČENÍ kolem osy rovnoběžné se z složené s POSUNUTÍM podél této osy

$$\begin{aligned} x_1' &= x_1 \cos\alpha - x_2 \sin\alpha + b_1 \\ x_2' &= x_1 \sin\alpha + x_2 \cos\alpha + b_2 \\ x_3' &= x_3 + b_3. \end{aligned}$$

6) OTOČENÍ kolem osy rovnoběžné se z složené se SOUMĚRNOSTÍ podle roviny kolmé k této ose

$$\begin{aligned} x_1' &= x_1 \cos\alpha - x_2 \sin\alpha + b_1 \\ x_2' &= x_1 \sin\alpha + x_2 \cos\alpha + b_2 \\ x_3' &= -x_3 + b_3. \end{aligned}$$

Poznámka. Každá přímá shodnost v prostoru se dá složit z otočení kolem přímky a posunutí podél této přímky. Potom můžeme říci, že každá dvě shodná tělesa v prostoru můžeme ztotožnit posunutím, otočením nebo šroubovým pohybem.

Poznámka. Nepřímá shodnost se dostane z přímé přidáním souměrnosti podle roviny.

7.6.1 Shodností prostoru E_3 - Úlohy

70. Ověřte, že rovnicemi

$$\begin{aligned}
x' &= \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}y + \frac{2}{3}z + \frac{2}{3} \\
y' &= \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}y - \frac{2}{3}z - \frac{2}{3} \\
z' &= -\frac{2}{3}x - \frac{2}{3}y - \frac{1}{3}z + \frac{2}{3}
\end{aligned}$$

je dáno shodné zobrazení E_3 na sebe, najděte jeho samodružné body a směry. [**3**]

71. Napište rovnice posunutí v E_3, v němž se bod $M = [-2, 3, 1]$ zobrazí na bod $M' = [5, 0, -4]$. Najděte souřadnice obrazu bodu $A = [1, 1, 1]$ v tomto posunutí. [**1**]

7.7 Shodná zobrazení v prostoru E_n

Věta 43. *Ke každé shodnosti f v E_n existuje k souměrností podle nadrovin tak, že f je jejich složením, $k < n + 2$.*

8 Podobnosti

Poznámka. Zopakujme si definici podobného zobrazení: Zobrazení f euklidovského prostoru E do euklidovského prostoru E' se nazývá **podobné zobrazení**, jestliže existuje kladné reálné číslo k tak, že pro každé dva body X, Y prostoru E platí:

$$|f(X)f(Y)| = k|XY|.$$

Číslo k se nazývá koeficient podobného zobrazení f.

PŘÍKLAD 8.1. *Zobrazení f euklidovské roviny do euklidovského trojrozměrného prostoru je vzhledem k zvoleným kartézským soustavám souřadnic dáno rovnicemi: $x' = 2x + ay - 1$, $y' = x + by + 2$, $z' = y + 1$. Určete koeficienty a, b tak, aby bylo zobrazení f podobné. Jaký je koeficient tohoto podobného zobrazení f?*

PŘÍKLAD 8.2. *Ukažte, že každé dvě paraboly jsou podobné, tzn. že existuje podobné zobrazení roviny jedné paraboly na rovinu druhé paraboly, při kterém se jedna parabola zobrazí na druhou.*

PŘÍKLAD 8.3. *Určete p, q, r tak, aby byla rovnicemi $x' = x - 2y + 2z + 4$, $y' = px + 2y + z - 2$, $z' = qx + ry + 2z - 2$ dána vzhledem ke kartézské soustavě souřadnic podobnost. Určete její samodružný bod a samodružné směry.*

Grupa podobností

Množina všech podobností euklidovského prostoru E_n spolu s operací skládání tvoří grupu - tzv. *grupu podobností prostoru E_n*.

8.1 Podobnosti euklidovské roviny

Víme, že každé podobné zobrazení euklidovské roviny do sebe lze složit ze *stejnolehlosti* a *shodnosti.*

1. Stejnolehlost H volíme se středem v počátku soustavy souřadnic a s koeficientem $k > 0$:

$$H : X \mapsto \overline{X}; \quad \begin{aligned} \overline{x} &= kx \\ \overline{y} &= ky. \end{aligned}$$

2. Shodnost S je buď přímá nebo nepřímá:

$$S : \overline{X} \mapsto X'; \quad \begin{aligned} x' &= \overline{x}\cos\alpha \mp \overline{y}\sin\alpha + p \\ y' &= \overline{x}\sin\alpha \pm \overline{y}\cos\alpha + q. \end{aligned}$$

Výsledkem složení $S \circ H$ je potom přímá nebo nepřímá podobnost.

Přímá podobnost	**Nepřímá podobnost:**
$x' = kx\cos\alpha - ky\sin\alpha + p$ $y' = kx\sin\alpha + ky\cos\alpha + q.$	$x' = kx\cos\alpha + ky\sin\alpha + p$ $y' = kx\sin\alpha - ky\cos\alpha + q.$
$x' = ax - by + p$ $y' = bx + ay + q.$	$x' = ax + by + p$ $y' = bx - ay + q.$
$A^T \cdot A = (a^2 + b^2) \cdot I; \qquad k = \sqrt{a^2 + b^2}$	

Věta 44. *Každá vlastní podobnost euklidovské roviny je buď stejnolehlost, nebo stejnolehlost složená s otočením kolem středu stejnolehlosti, nebo stejnolehlost složená s osovou souměrností, jejíž osa prochází středem stejnolehlosti.*

8.1.1 Úlohy – Podobnosti

1. Najděte všechny podobnosti euklidovské roviny, při kterých se bod $[1, 0]$ zobrazí na bod $[4, -2]$ a bod $[2, 3]$ na bod $[2, -8]$. **[2]**

2. Eulerovými body se nazývají středy úseček spojujících vrcholy trojúhelníku s průsečíkem jeho výšek.

Dokažte následující tvrzení:

Středy stran, paty výšek a Eulerovy body libovolného trojúhelníku leží na jedné kružnici. (*Tato kružnice se nazývá kružnice devíti bodů, Eulerova kružnice nebo Feuerbachova kružnice.*) **[3]**

3. Najděte podobnost euklidovské roviny, při které se zobrazí počátek na bod $[0, 2]$, bod $[1, 1]$ na počátek a bod $[2, 0]$ na bod $[2, p]$. Určete p a najděte samodružné body a směry nalezené podobnosti. **[2]**

4. Najděte rovnice podobnosti, při které je počátek samodružný a obrazem bodu $[5, -3]$ je bod $[1, 1]$. **[2]**

5. Určete všechny podobnosti, pro které jsou bod $[1, 1]$ a směr vektoru $(1, 1)$ samodružné. **[2]**

6. Napište rovnice všech podobností zobrazujících body $[1, 2]$ a $[0, 1]$ po řadě na body $[3, -1], [4, 2]$. Rozložte je na stejnolehlost a shodnost. **[2]**

7. V rovině je dán čtverec $ABCD$ se středem S. Určete obraz bodu C v podobnosti, která zobrazuje body A, B, S po řadě na body B, D, C. Určete samodružný bod této podobnosti. **[2]**

8. Sestrojte alespoň jeden trojúhelník ABC, pro který platí $|AB| : |AC| = 3 : 5$, $\alpha = 60°$, $\rho = 1,8cm$(poloměr kružnice vepsané). **[2]**

9. Sestrojte kosodélník $ABCD$, je-li dáno $|\angle DAB| = \alpha$, $|\angle ABD| = \varepsilon$, $|AC| = e$. **[2]**

10. Je dána kružnice k a bod A, který je bodem vnější oblasti kružnice k. Sestrojte všechny sečny kružnice k, které procházejí bodem A a pro jejichž průsečíky X, Y s kružnicí platí $|AX| = 2|AY|$. **[2]**

11. Je dána kružnice $k(S; 4cm)$, její tečna t a bod $M \in k$ tak, že $|Mt| = 2cm$. Sestrojte úsečku XY procházející bodem M tak, aby $X \in k, Y \in t$ a $|MX| : |MY| = 3 : 2$. **[1]**

12. Jsou dány dvě různoběžky a, b a kružnice k tak, že $P \in a \cap b$ je bodem vnitřní oblasti kružnice k. Sestrojte všechny kružnice, které se dotýkají přímek a, b i kružnice k. **[2]**

13. Dokažte následující věty (za důkaz každé věty **[4]** body):

Věta 45 (Menelaova věta)**.** *Je dán trojúhelník ABC a přímka p, která neprochází žádným z bodů A, B, C, ale protíná přímky AB, BC, CA v bodech C', A', B'. Potom platí:*

$$(ABC') \cdot (BCA') \cdot (CAB') = 1.$$

Naopak, platí-li uvedený vztah, body A', B', C' leží na přímce.

Věta 46 (Pappova věta)**.** *Nechť jsou A', B', C', D' rovnoběžné nebo středové průměty čtyř navzájem různých bodů A, B, C, D přímky p na přímku p'; $p' \neq p$. Potom:*

$$(A'B'C'D') = (ABCD)$$

Věta 47 (Cevova věta)**.** *Nechť je dán trojúhelník ABC a bod M, který neleží na žádné z přímek AB, BC, CA. Průsečíky přímek AM, BM, CM s přímkami BC, CA, AB (různé od bodů A, B, C) označme postupně A', B', C'. Potom platí:*

$$(ABC') \cdot (BCA') \cdot (CAB') = -1.$$

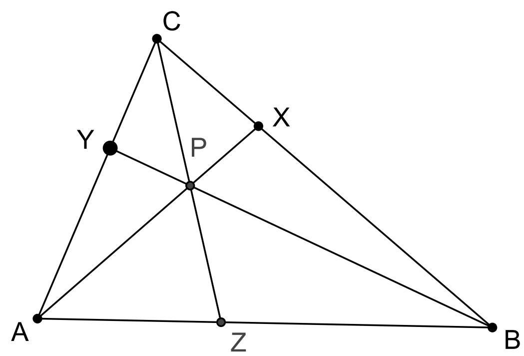
Naopak, platí-li uvedený vztah, jsou přímky AA', BB', CC' buď navzájem rovnoběžné nebo se protínají v jediném bodě.

9 Cevova věta a její užití

Věta 48 (Cevova věta)**.** *V trojúhelníku ABC se přímky AX, BY a CZ, kde body X, Y, Z leží na stranách protilehlých odpovídajícím vrcholům, protínají v jednom bodě právě tehdy, když platí:*

$$\frac{|AZ|}{|ZB|} \cdot \frac{|BX|}{|XC|} \cdot \frac{|CY|}{|YA|} = 1.$$

Důkaz: Poměry úseček, které figurují v Cevově větě, převedeme na poměry obsahů trojúhelníků, které mají tyto úsečky jako základny a přitom mají stejné výšky, viz Obr. 5.



Obrázek 5: Cevova věta

$$\frac{|AZ|}{|ZB|} = \frac{S_{AZC}}{S_{BZC}} = \frac{S_{AZP}}{S_{BZP}} = \frac{S_{AZC} - S_{AZP}}{S_{BZC} - S_{BZP}} = \frac{S_{ACP}}{S_{BPC}},$$

$$\frac{|BX|}{|XC|} = \frac{S_{BXA}}{S_{CXA}} = \frac{S_{BXP}}{S_{CXP}} = \frac{S_{BXA} - S_{BXP}}{S_{CXA} - S_{CXP}} = \frac{S_{BPA}}{S_{CPA}},$$

$$\frac{|CY|}{|YA|} = \frac{S_{CYB}}{S_{AYB}} = \frac{S_{CYP}}{S_{AYP}} = \frac{S_{CYB} - S_{CYP}}{S_{AYB} - S_{AYP}} = \frac{S_{CPB}}{S_{APB}}.$$

Potom

$$\frac{|AZ|}{|ZB|} \cdot \frac{|BX|}{|XC|} \cdot \frac{|CY|}{|YA|} = \frac{S_{ACP}}{S_{BPC}} \cdot \frac{S_{BPA}}{S_{CPA}} \cdot \frac{S_{CPB}}{S_{APB}} = 1.$$

Q.E.D.

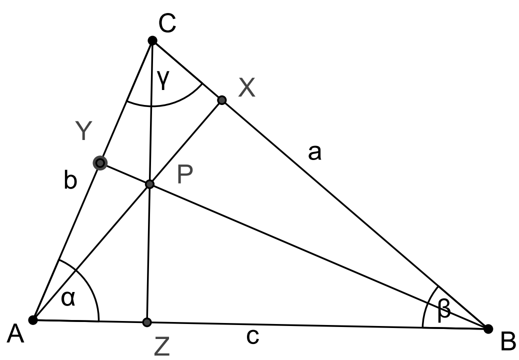
PŘÍKLAD 9.1. *Užitím Cevovy věty dokažte, že se těžnice v trojúhelníku protínají v jednom bodě.*

Řešení: Body X, Y, Z jsou středy stran trojúhelníku. Potom

$$\frac{|AZ|}{|ZB|} \cdot \frac{|BX|}{|XC|} \cdot \frac{|CY|}{|YA|} = \frac{1}{1} \cdot \frac{1}{1} \cdot \frac{1}{1} = 1.$$

PŘÍKLAD 9.2. *Užitím Cevovy věty dokažte, že se výšky v trojúhelníku protínají v jednom bodě (tj. ceviány kolmé na protilehlé strany trojúhelníku mají jeden společný bod).*

Řešení: Viz Obr. 6.



Obrázek 6: Cevova věta pro výšky

$$\frac{|AZ|}{|ZB|} \cdot \frac{|BX|}{|XC|} \cdot \frac{|CY|}{|YA|} = \frac{b\cos\alpha}{a\cos\beta} \cdot \frac{c\cos\beta}{b\cos\gamma} \cdot \frac{a\cos\gamma}{c\cos\alpha} = 1.$$

PŘÍKLAD 9.3. *Užitím Cevovy věty dokažte, že osy vnitřních úhlů trojúhelníku se protínají v jednom bodě.*

Věta 49. *Osa vnitřního úhlu trojúhelníku rozděluje protilehlou stranu na dvě části, jejichž délky jsou ve stejném poměru jako jim přilehlé strany trojúhelníku.*

9.1 Cevova věta – Úlohy na domácí přípravu

72. Nechť X, Y, Z jsou body dotyku stran trojúhelníku s jemu vepsanou kružnicí. Dokažte, že jim odpovídající ceviány se protínají v jednom bodě.

73. Nechť ABC, $A'B'C'$ jsou dva různé trojúhelníky, které mají rovnoběžné sobě odpovídající strany. Potom mají přímky AA', BB' a CC' společný bod. Dokažte.