

# GEOMETRIE 2 - KMA/GEO2

(dle sylabu platného od roku 2014)

**Roman HAŠEK**

13. dubna 2018

# Obsah

<b>1</b>	<b>Připomenutí vybraných pojmů</b>	<b>6</b>
1.1	Grupa . . . . .	6
1.2	Těleso . . . . .	7
1.3	Vektorový prostor . . . . .	7
1.4	Afinní bodový prostor . . . . .	8
1.5	Afinní souřadnice bodů . . . . .	9
1.6	Eukleidovský bodový prostor . . . . .	10
<b>2</b>	<b>Geometrická zobrazení</b>	<b>11</b>
<b>3</b>	<b>Dělicí poměr</b>	<b>17</b>
3.1	Barycentrické souřadnice . . . . .	20
<b>4</b>	<b>Afinní zobrazení</b>	<b>22</b>
4.1	Definice afinního zobrazení . . . . .	23
4.2	Asociovaný homomorfismus afinního zobrazení . . . . .	23
4.3	Rovnice afinního zobrazení z $A_n$ do $A_m$ . . . . .	24
4.4	Rovnice homomorfismu asociovaného s afinním zobrazením . . . . .	25
4.5	Odvození rovnic afinního zobrazení a asociovaného homomorfismu . . . . .	26
4.5.1	Afinní zobrazení z $A_n$ do $A_m$ . . . . .	26
4.5.2	Homomorfismus asociovaný s afinním zobrazením . . . . .	28
4.6	Věta o určenosti afinního zobrazení . . . . .	29
4.7	Cvičení – Afinní zobrazení . . . . .	37
<b>5</b>	<b>Afinita</b>	<b>38</b>
5.1	Příklady afinit . . . . .	40
5.1.1	Shodná zobrazení v $E_2$ . . . . .	40
5.1.2	Vybrané shodnosti v $E_3$ . . . . .	41
5.2	Odvození rovnic afinity v rovině . . . . .	43
5.3	Důkaz věty o určenosti afinity v rovině . . . . .	45
5.4	Modul afinity . . . . .	46
5.5	Afinita přímá a nepřímá, ekviafinita . . . . .	48
5.6	Cvičení – Afinita . . . . .	49

<b>6</b>	<b>Osová afinita</b>	<b>50</b>
6.1	Základní afinity . . . . .	50
6.2	Osová afinita v rovině . . . . .	50
6.3	Cvičení – Osová afinita . . . . .	55
<b>7</b>	<b>Samodružné body a směry afinity</b>	<b>56</b>
7.1	Samodružné body . . . . .	56
7.2	Samodružné směry . . . . .	57
7.3	Homotetie, grupa homotetií . . . . .	66
<b>8</b>	<b>Skládání afinních zobrazení</b>	<b>67</b>
8.1	Afinní grupa v $A_n$ . . . . .	67
8.2	Souvislost mezi skládáním afinních zobrazení a násobením matic . . . . .	68
<b>9</b>	<b>Shodnosti v rovině</b>	<b>70</b>
9.1	Rovnice shodnosti v rovině . . . . .	71
9.2	Osová souměrnost . . . . .	73
9.3	Otočení . . . . .	76
9.4	Středová souměrnost . . . . .	77
9.5	Posunutí . . . . .	79
9.6	Posunuté zrcadlení . . . . .	80
9.7	Shodnosti v rovině – Cvičení . . . . .	82
<b>10</b>	<b>Grupa shodností eukleidovského prostoru</b>	<b>86</b>
10.1	Skládání shodných zobrazení . . . . .	86
10.2	Grupa shodností v rovině . . . . .	86
10.3	Klasifikace shodností roviny . . . . .	87
10.4	Cvičení – Shodnosti v rovině . . . . .	95
10.5	Klasifikace shodností prostoru $E_3$ . . . . .	96
10.6	Cvičení – Shodnosti prostoru $E_3$ . . . . .	99
10.7	Shodná zobrazení v prostoru $E_n$ . . . . .	99
<b>11</b>	<b>Grupa podobností eukleidovského prostoru</b>	<b>100</b>
11.1	Podobné zobrazení . . . . .	100
11.2	Podobnosti eukleidovské roviny . . . . .	102
11.3	Cvičení – Podobnosti . . . . .	104

<b>12 Stejnolehlost</b>	<b>106</b>
12.1 Analytické vyjádření stejnoolehlosti . . . . .	107
12.2 Skládání stejnoolehlostí . . . . .	107
12.3 Stejnolehlost kružnic . . . . .	108
12.4 Mongeova věta . . . . .	111
12.5 Cvičení – Stejnolehlost . . . . .	112
<b>13 Mocnost bodu ke kružnici</b>	<b>113</b>
13.1 Chordála a potenční střed . . . . .	114
13.2 Cvičení – Mocnost bodu ke kružnici . . . . .	115
<b>14 Vybrané věty z planimetrie</b>	<b>116</b>
14.1 Cevova věta a její užití . . . . .	116
14.2 Menelaova věta . . . . .	119
14.3 Kružnice devíti bodů . . . . .	121
14.4 Eulerova přímka . . . . .	122
14.5 Simsonova přímka . . . . .	124
14.6 Morleyova věta . . . . .	125
14.7 Napoleonova věta . . . . .	126
<b>15 Inverze</b>	<b>127</b>
15.1 Sférická inverze . . . . .	127
15.2 Stereografická projekce . . . . .	128
15.3 Vybrané vlastnosti sférické inverze . . . . .	130
<b>16 Kruhová inverze</b>	<b>131</b>
16.1 Vybrané vlastnosti kruhové inverze . . . . .	132
16.2 Analytické vyjádření kruhové inverze . . . . .	135
16.3 Cvičení – kruhová inverze . . . . .	136
<b>17 Projektivní rozšíření <math>\bar{E}_n</math> prostoru <math>E_n</math></b>	<b>138</b>
17.1 Projektivní rozšíření roviny $E_2$ . . . . .	138
17.2 Homogenní souřadnice v $\bar{E}_2$ . . . . .	139
17.3 Zobecnění . . . . .	142
17.4 Cvičení – projektivní rozšíření prostoru . . . . .	142
<b>18 Dvojpoměr</b>	<b>144</b>

<b>19 Pappova věta a její důsledky</b>	<b>148</b>
19.1 Středové promítání . . . . .	148
19.2 Pappova věta o invarianci dvojpoměru . . . . .	152
19.3 Princip duality v projektivní rovině . . . . .	156
19.4 Princip duality v praxi . . . . .	158
19.5 Cvičení – Pappova věta a princip duality . . . . .	159
<b>20 Středová kolineace</b>	<b>160</b>
20.1 Kolineace kružnice a kuželosečky . . . . .	164
<b>21 Vybrané věty projektivní geometrie</b>	<b>167</b>
21.1 Pappova věta o šestiúhelníku . . . . .	167
21.2 Šestiúhelník . . . . .	168
21.3 Pascalova věta . . . . .	170
21.4 Brianchonova věta . . . . .	172
21.5 Desarguesova věta . . . . .	173
<b>22 Axiomatická výstavba geometrie</b>	<b>174</b>
22.1 Hilbertova soustava axiomů eukleidovské geometrie . . . . .	175
<b>23 Neeukleidovské geometrie</b>	<b>186</b>
23.1 Problém rovnoběžek . . . . .	186
23.2 Lobačevského geometrie [IUSDnonR] . . . . .	186
23.3 Riemannova geometrie . . . . .	189
<b>24 Křivky v <math>E_3</math></b>	<b>190</b>
24.1 Popis křivky . . . . .	190
24.2 Tečna křivky . . . . .	192
24.3 Oskulační rovina . . . . .	192
24.4 Oblouk křivky . . . . .	193
24.5 První křivost křivky . . . . .	195
24.6 Frenetův trojhran . . . . .	196
24.7 Oskulační kružnice . . . . .	197
<b>25 Vybrané rovinné křivky</b>	<b>199</b>
25.1 Obalová křivka . . . . .	199
25.2 Evoluta a evolventa . . . . .	201

# 1 Připomenutí vybraných pojmů

## 1.1 Grupa

**Definice 1** ((Komutativní) grupa). *Grupou  $(M, *)$  rozumíme množinu  $M$  spolu s operací  $*$  na  $M$ , která má tyto vlastnosti:*

- i)  $\forall x, y \in M; x * y \in M$ ,  
*Operace  $*$  je neomezeně definovaná na  $M$ .  
 (Množina  $M$  je uzavřená vzhledem k operaci  $*$ .)*
- ii)  $\forall x, y, z \in M; x * (y * z) = (x * y) * z$ ,  
*Operace (struktura) je asociativní.*
- iii)  $\exists e \in M, \forall x \in M; x * e = e * x = x$ ,  
*Existuje neutrální prvek vzhledem k  $*$ .  
 (Jedná se o strukturu s neutrálním prvkem.)*
- iv)  $\forall x \in M, \exists y \in M; x * y = y * x = e$ .  
*Ke každému prvku existuje prvek inverzní vzhledem k  $*$ .  
 (Jedná se o strukturu s inverzními prvky.)*

*Je-li struktura  $(M, *)$  navíc komutativní, nazývá se komutativní grupa nebo též Abelova grupa.*

### Příklady grup

1.  $(\mathbb{Z}, +), (\mathbb{Q}, +), (\mathbb{R}, +), (\mathbb{C}, +)$ ,
2.  $(\mathbb{Q} - \{0\}, \cdot), (\mathbb{R} - \{0\}, \cdot), (\mathbb{C} - \{0\}, \cdot)$ ,
3. Množina povelů {stát, vlevo vbok, vpravo vbok, čelem vzad} spolu s operací skládání.

o	pozor	vlevo v bok	vpravo v bok	čelem vzad
pozor	pozor	vlevo v bok	vpravo v bok	čelem vzad
vlevo v bok	vlevo v bok	čelem vzad	pozor	vpravo v bok
vpravo v bok	vpravo v bok	pozor	čelem vzad	vlevo v bok
čelem vzad	čelem vzad	vpravo v bok	vlevo v bok	pozor

4. Uvažujme rovnostranný trojúhelník  $ABC$  v rovině  $\rho$ . Grupou je potom množina všech transformací roviny, v nichž se trojúhelník zobrazí sám na sebe, spolu s operací skládání transformací (hovoříme o tzv. dihedralní grupě, viz též grupy symetrií).

## 1.2 Těleso

Tělesem jako algebraickou strukturou rozumíme strukturu jejíž vlastnosti jsou zobecněním vlastností množiny reálných čísel spolu s operacemi sčítání a násobení, tj. struktury  $(R, +, \cdot)$ .

**Definice 2.** *Struktura  $(T, +, \cdot)$  se nazývá těleso, právě když je  $(+, \cdot)$ -distributivní, když struktura  $(T, +)$  je komutativní grupa (tzv. aditivní grupa tělesa) a když struktura  $(T - \{0\}, \cdot)$ , kde 0 je nulový prvek grupy  $(T, +)$ , je grupa (tzv. multiplikativní grupa tělesa  $T$ ). Je-li navíc grupa  $(T - \{0\}, \cdot)$  komutativní, nazývá se  $T$  komutativní těleso.*

### Příklady těles

1.  $(Q, +, \cdot)$ ,
2.  $(R, +, \cdot)$ ,
3.  $(C, +, \cdot)$ .

## 1.3 Vektorový prostor

**Definice 3** (Vektorový prostor). *Nechť  $T$  je komutativní těleso. Množinu  $V$  nazveme vektorovým prostorem nad tělesem  $T$ , právě když jsou na  $V$  definovány dvě operace: (i) sčítání: libovolné dvojici  $\vec{u} \in V, \vec{v} \in V$  je jednoznačně přiřazen prvek  $\vec{u} + \vec{v} \in V$ , (ii) násobení prvkem z tělesa  $T$  (skalárem): výsledkem násobení vektoru  $\vec{u} \in V$  skalárem  $a \in T$  je vektor  $a\vec{u} \in V$ , které splňují následující vlastnosti:*

- a) *Struktura  $(V, +)$  je komutativní grupa.*
- b) *Distributivnost:  $(a + b)\vec{u} = a\vec{u} + b\vec{u}, \quad a(\vec{u} + \vec{v}) = a\vec{u} + a\vec{v}.$*
- c) *Existence jednotkového prvku skalárního násobení:  $1 \cdot \vec{u} = \vec{u}.$*

### Příklady vektorových prostorů

1. Množina  $R^2$  všech uspořádaných dvojic reálných čísel s operacemi sčítání uspořádaných dvojic a násobení reálným číslem definovanými následujícím způsobem:  $(a_1, a_2) + (b_1, b_2) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2), \quad k \cdot (a_1, a_2) = (ka_1, ka_2)$  (jedná se o tzv. **aritmetický vektorový prostor  $R^2$**  nad tělesem reálných čísel).
2. Množina geometrických vektorů v rovině (orientovaných úseček) spolu s operací skládání vektorů a násobení vektoru reálným číslem, jak jsou známy ze školské matematiky.

## 1.4 Afinní bodový prostor

**Definice 4** (Afinní bodový prostor). Neprázdnou množinu  $A_n$  (její prvky jsou tzv. body) nazveme *afinním*<sup>1</sup> bodovým prostorem dimenze  $n$ , jestliže je dán vektorový prostor  $V_n$  dimenze  $n$  a zobrazení

$$g : A_n \times A_n \rightarrow V_n$$

těchto vlastností: 1. Pro každý bod  $A \in A_n$  a pro každý vektor  $\vec{x} \in V_n$  existuje jediný bod  $B \in A_n$  tak, že

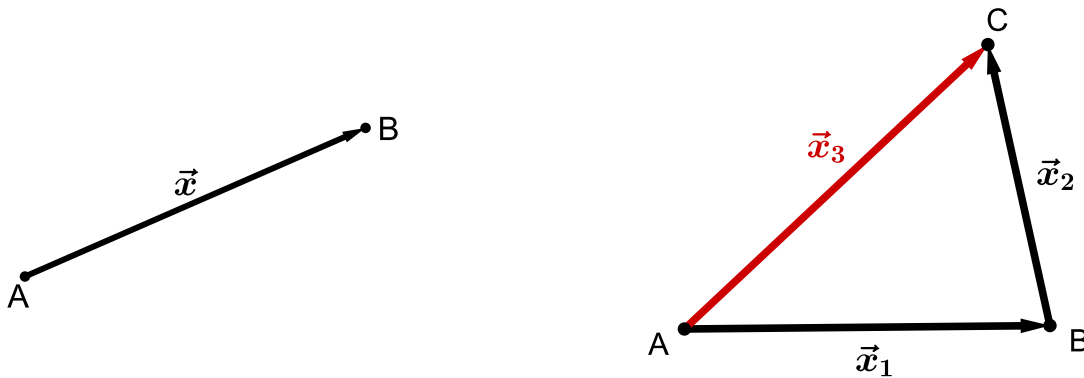
$$g(A, B) = \vec{x} \quad \text{t.j.} \quad B = A + \vec{x}.$$

2. Pro každé tři body  $A, B, C \in A_n$  platí, že

$$g(A, C) = g(A, B) + g(B, C).$$

(Jedná se o tzv. Chaslesův vztah. Jeho platnost požadujeme v každém afinním bodovém prostoru<sup>2</sup>.)

Vektorový prostor  $V_n$  nazýváme *vektorovým zaměřením* afinního prostoru  $A_n$ .



### Příklady afinního bodového prostoru

1. Jednoprvková množina se zaměřením  $V_0 = \{\vec{0}\}$  je afinní bodový prostor dimenze 0.
2. Eukleidovský bodový prostor  $E_n$ , jehož formy pro  $n \leq 3$  nazýváme dle dimenze bod (značíme  $E_0$ ), přímka (značíme  $E_1$ ), rovina ( $E_2$ ) a trojrozměrný prostor ( $E_3$ ).
3. Samotný vektorový prostor  $V_n$  splňuje definici afinního bodového prostoru<sup>2</sup>. Platí

$$g(\vec{u}, \vec{v}) = \vec{v} - \vec{u}.$$

<sup>1</sup>Affinis znamená latinsky *příbuzný*. Poprvé tento pojem použil Leonhard Euler (1707-1783) pro označení vztahu vzoru a obrazu v zobrazení, které zachovává dělicí poměr. Takovým zobrazením se začalo říkat *afinní zobrazení*. *Afinní geometrii* rozumíme geometrii bez vzdáleností a odchylek.

<sup>2</sup>Další vlastnosti operací *odčítání bodů* a *sčítání bodu a vektoru* jsou uvedeny v [1] PECH, P. (2004) *Analytická geometrie lineárních útvarů*, České Budějovice, Jihočeská univerzita v Č. B., dostupné na adrese <http://www.pf.jcu.cz/stru/katedry/m/knihy/Analyticka.pdf>, str. 15.

<sup>2</sup>Naopak to samozřejmě neplatí, nelze říci, že afinní bodový prostor je zároveň vektorovým prostorem.



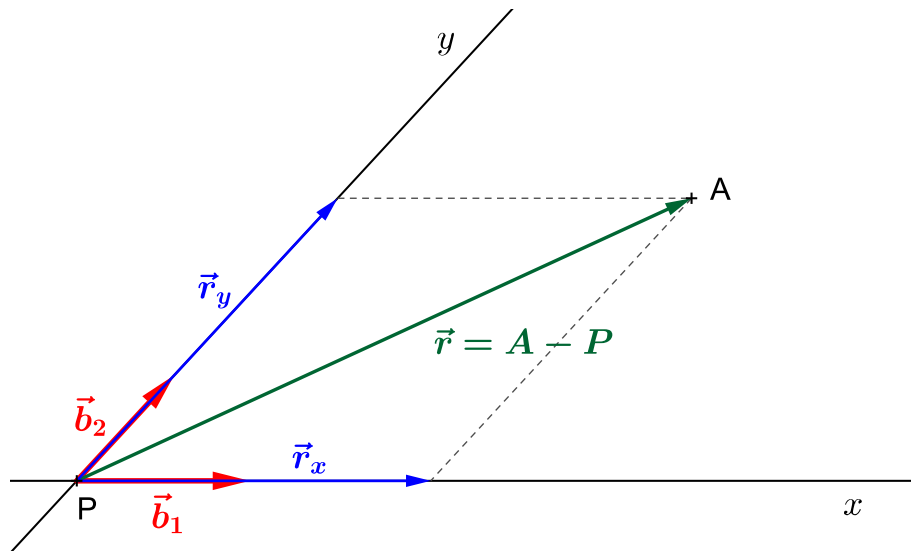
## 1.5 Afinity souřadnice bodů

**Definice 5** (Afinity soustava souřadnic - repér). *Nechť  $P$  je libovolný bod z afinity prostoru  $A_n$ ,  $n > 0$ . Nechť  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$  je báze vektorového zaměření  $V_n$  prostoru  $A_n$ . Potom uspořádanou  $(n + 1)$ -tici*

$$\varphi = (P, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$$

*nazýváme afinity soustavou souřadnic  $\varphi$  (též repérem  $\varphi$ ) v prostoru  $A_n$ .*

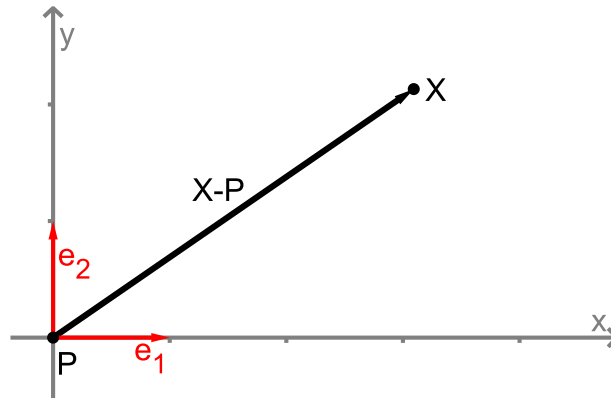
*Souřadnicemi bodu  $X \in A_n$  v soustavě souřadnic  $\varphi$  budeme rozumět souřadnice vektoru  $X - P$  v bázi  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$ .*



Obrázek 1: Afinity soustava souřadnic v rovině

Jak je naznačeno na Obr. 1, dosud zavedené pojmy nám dovolují přiřadit souřadnice bodu prostřednictvím jeho průvodiče. Konkrétně se jedná o bod  $A$  s průvodičem  $\vec{r}$ . Můžeme psát  $\vec{r} = \vec{r}_x + \vec{r}_y$ . Jistě existují taková čísla  $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ , pro která  $\vec{r}_x = a_1 \cdot \vec{b}_1$  a  $\vec{r}_y = a_2 \cdot \vec{b}_2$ . Potom platí  $\vec{r} = \vec{r}_x + \vec{r}_y = a_1 \cdot \vec{b}_1 + a_2 \cdot \vec{b}_2$ . Vektor  $\vec{r}$  má tak vzhledem k dané bázi  $\{\vec{b}_1, \vec{b}_2\}$  souřadnice  $a_1, a_2$ . Bod  $A = P + \vec{r}$  je potom při pevně daném bodě  $P$  a bázi  $\{\vec{b}_1, \vec{b}_2\}$ , tj. při daném repéru  $\{P, \vec{b}_1, \vec{b}_2\}$ , rovněž jednoznačně určen dvojicí čísel  $a_1, a_2$ . Říkáme, že bod  $P$  má vzhledem k danému repéru souřadnice  $[a_1, a_2]$ , píšeme  $P[a_1, a_2]$ .

**Definice 6** (Kartézská soustava souřadnic). *Kartézskou soustavou souřadnic rozumíme afinní soustavu souřadnic  $(P; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$ , kde  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$  je ortonormální báze.*



Obrázek 2: Kartézská soustava souřadnic v rovině

## 1.6 Eukleidovský bodový prostor

**Definice 7** (Eukleidovský bodový prostor). *Eukleidovským bodovým prostorem  $E_n$  rozumíme afinní bodový prostor, na jehož zaměření je definován **skalární součin**.*

**Definice 8** (Skalární součin). *Skalárním součinem rozumíme operaci, která každé dvojici vektorů  $\vec{u}, \vec{v} \in V$  přiřazuje reálné číslo (skalár)  $\vec{u} \cdot \vec{v} \in R$  tak, že platí:*

1.  $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$ , (SYMETRIE)
2.  $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$ , (BILINEARITA, vlastnosti 2 a 3)
3.  $(k\vec{u}) \cdot \vec{v} = k(\vec{u} \cdot \vec{v})$ ,
4.  $\vec{u} \cdot \vec{u} \geq 0 \wedge [\vec{u} \cdot \vec{u} = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{o}]$ . (POZITIVITA)

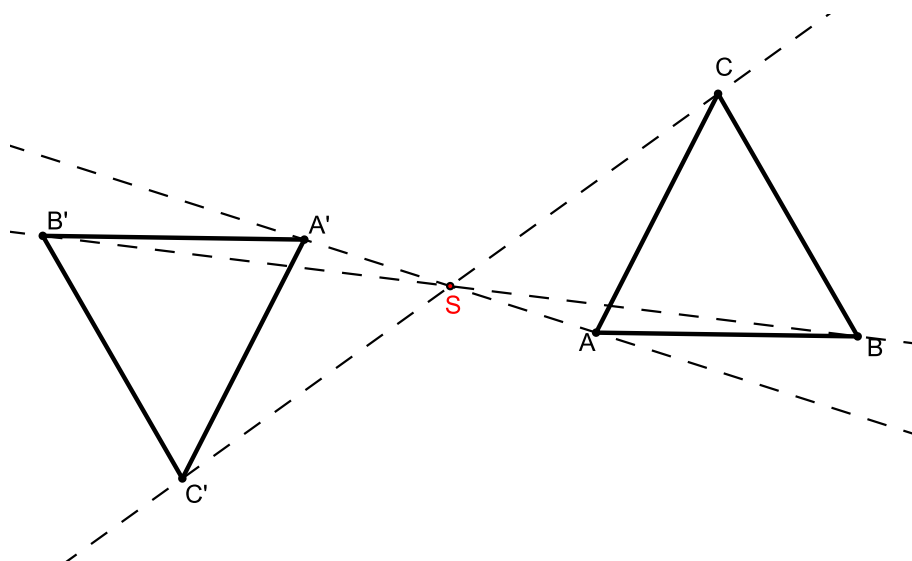
## 2 Geometrická zobrazení

**Definice 9** (Geometrické zobrazení). *Zobrazením (geometrickým zobrazením) rozumíme předpis, kterým je libovolnému bodu  $X$  (který je prvkem dané množiny, např. roviny) jako jeho obraz jednoznačně přiřazen bod  $X' = f(X)$ .*

**Definice 10** (Vzájemně jednoznačné zobrazení). *Vzájemně jednoznačným zobrazením rozumíme zobrazení, které je prosté a zároveň je zobrazením na množinu (tj. že dvěma různými body (vzorů) jsou přiřazeny dva různé obrazy a zároveň platí, že každý bod množiny, do níž zobrazujeme, je obrazem nějakého bodu z množiny vzorů).*

### Příklady geometrických zobrazení

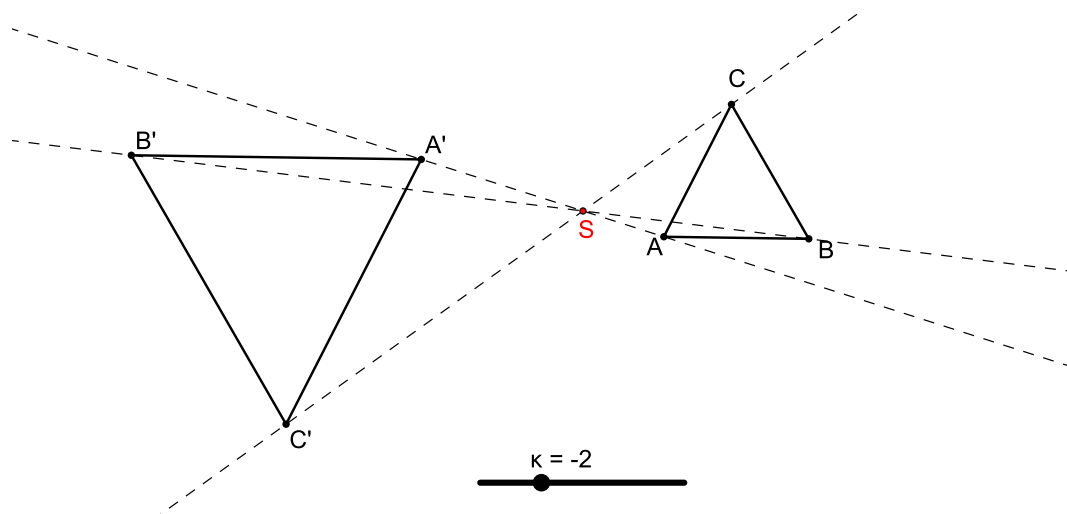
Středová souměrnost, viz Obr. 3<sup>1</sup>



Obrázek 3: Středová souměrnost se středem  $S$

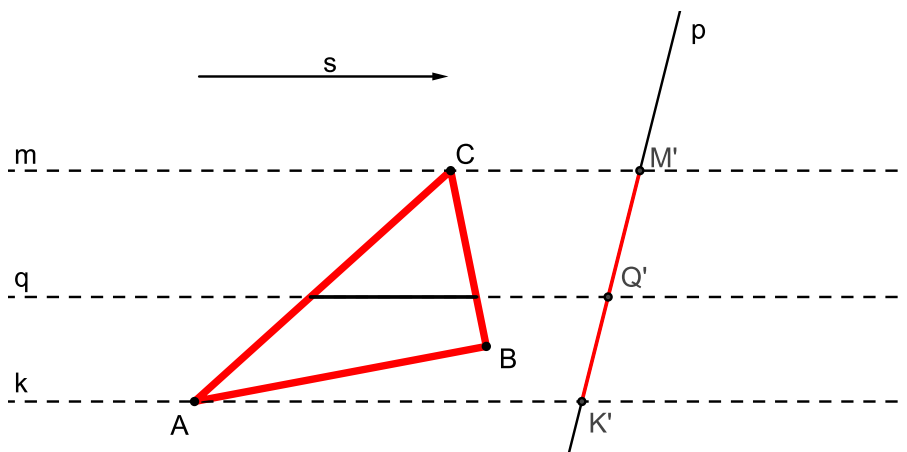
<sup>1</sup>Středová souměrnost je příkladem *vzájemně jednoznačného geometrického zobrazení* (stejně jako všechna ostatní shodná zobrazení i stejnolehlost).

**Stejnolehlost** (daná středem  $S$  a koeficientem  $\kappa$ ), viz Obr. 4



Obrázek 4: Stejnolehlost se středem  $S$  a s koeficientem  $\kappa = -2$

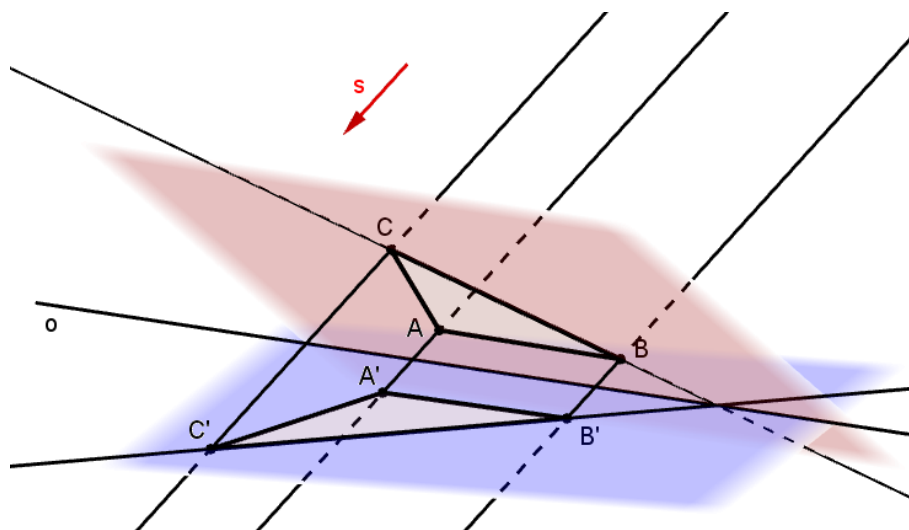
**Rovnoběžné promítání do přímky** (dané směrem  $\vec{s}$  a přímkou  $p$ ), viz Obr. 5<sup>2</sup>



Obrázek 5: Rovnoběžné promítání ve směru  $\vec{s}$  z roviny do přímky  $p$

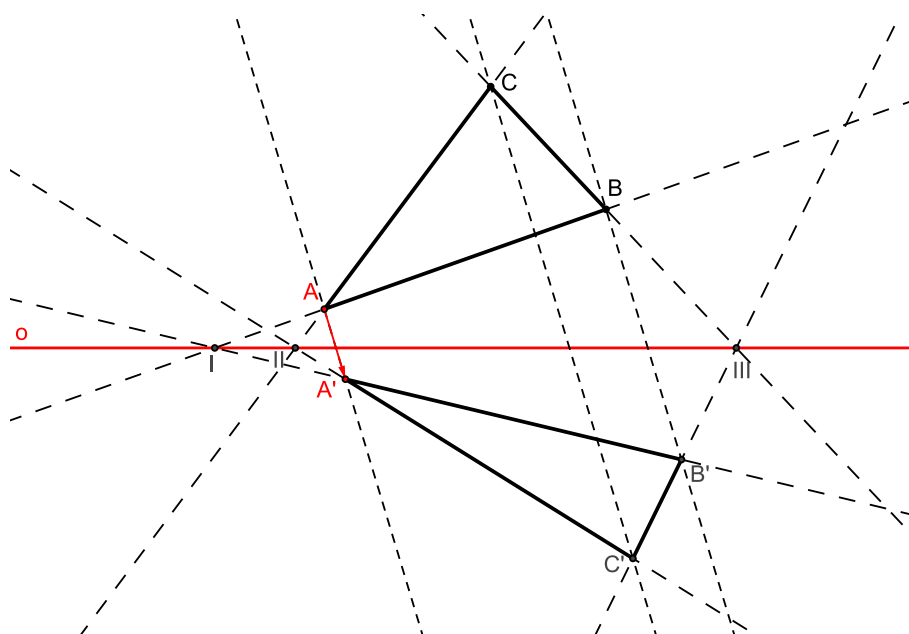
<sup>2</sup>Rovnoběžné promítání do přímky není prosté. Z obrázku je patrné, že všechny body přímky rovnoběžné se směrem  $\vec{s}$  se zobrazují do jednoho bodu. Například body přímek  $k, m, q$  se v uvedeném pořadí zobrazují do bodů  $K', M', Q'$ .

**Rovnoběžné promítání** se směrem  $\vec{s}$  mezi dvěma různoběžnými rovinami v prostoru  $E_3$ , viz Obr. 6.



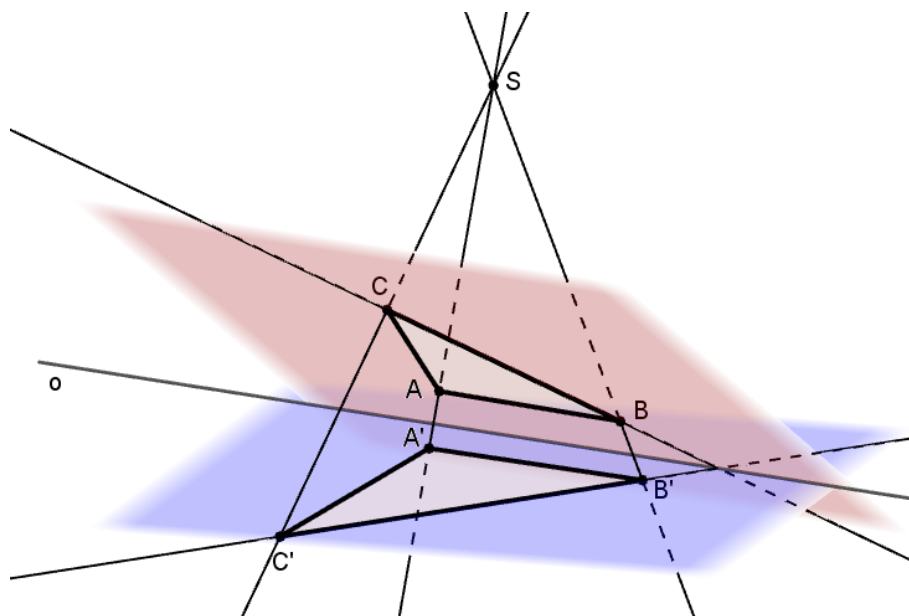
Obrázek 6: Rovnoběžné promítání mezi dvěma různoběžnými rovinami (dalo vznik *osové afinitě*)

**Osová afinita** (daná osou  $o$  a dvojicí bodů  $A, A'$  ve vztahu vzor a obraz), viz Obr. 7



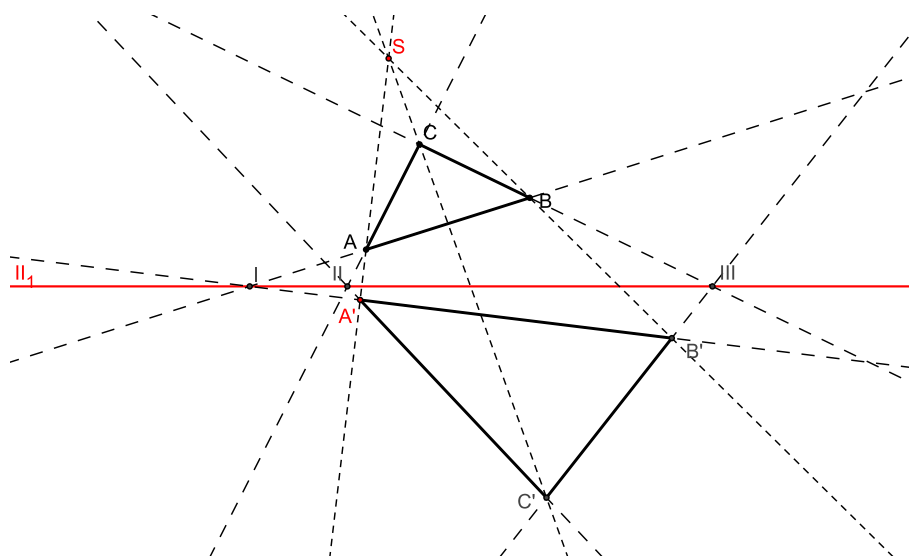
Obrázek 7: Osová afinita daná osou  $o$  a dvojicí bodů  $A, A'$

**Středové promítání** se středem  $S$  mezi dvěma různoběžnými rovinami v prostoru  $E_3$ , viz Obr. 8.



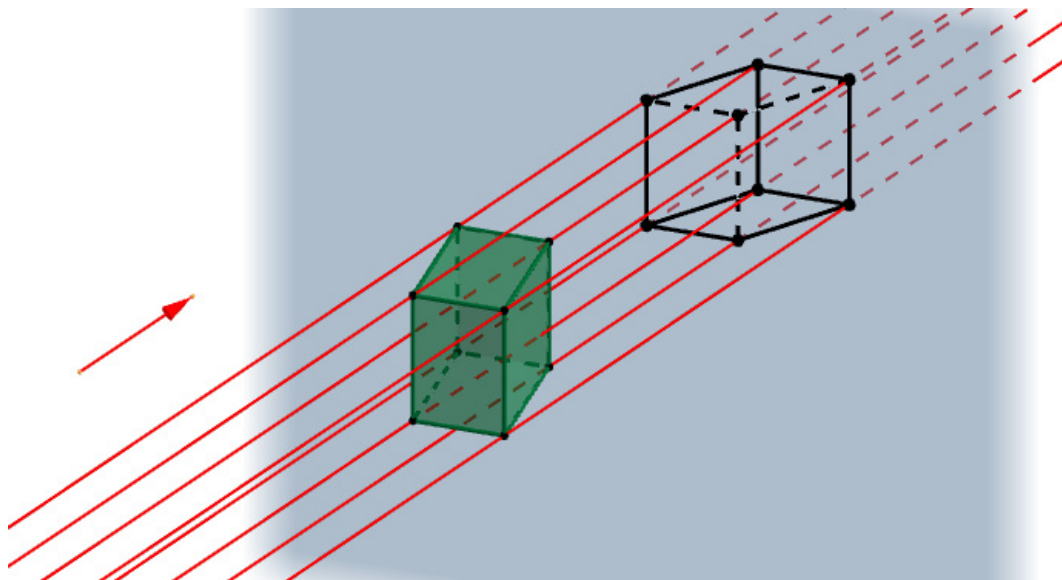
Obrázek 8: Středové promítání mezi dvěma různoběžnými rovinami (dalo vznik *středové kolineaci*)

**Středová kolineace** (daná osou  $o$ , středem  $S$  a dvojicí bodů  $A, A'$  ve vztahu vzor a obraz), viz Obr. 9



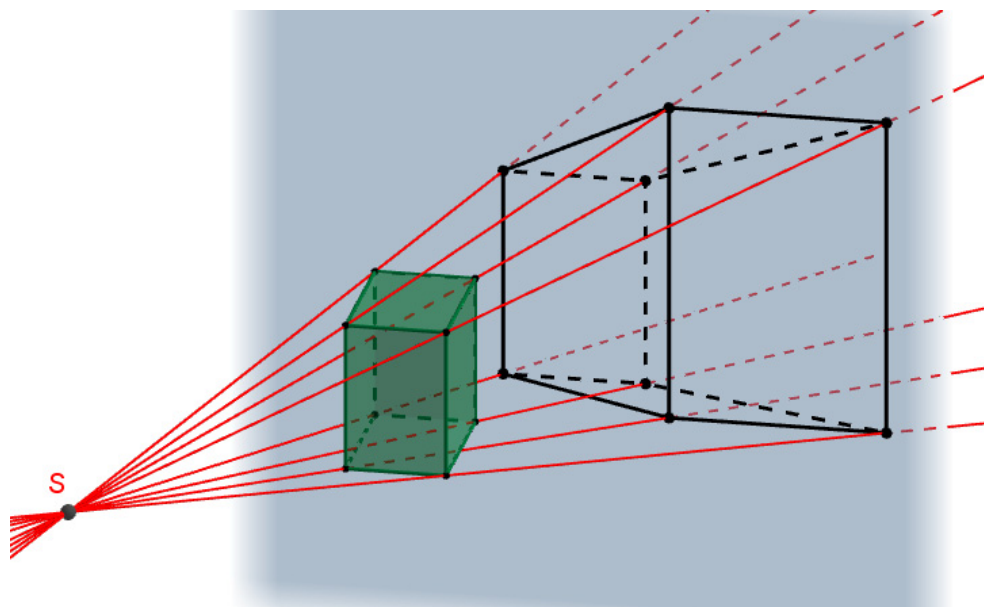
Obrázek 9: Středová kolineace daná středem  $S$ , osou  $o$  a dvojicí bodů  $A, A'$

**Rovnoběžné promítání** (z trojrozměrného prostoru do roviny; dané směrem  $\vec{s}$ ), viz Obr. 10.



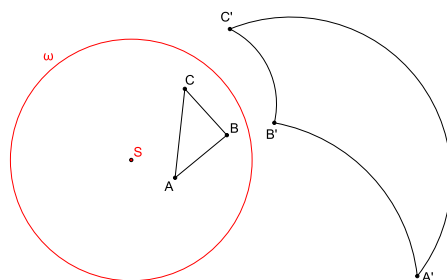
Obrázek 10: Rovnoběžné promítání trojrozměrného útvaru do roviny

**Středové promítání** (z trojrozměrného prostoru do roviny; dané středem  $S$ ), viz Obr. 11



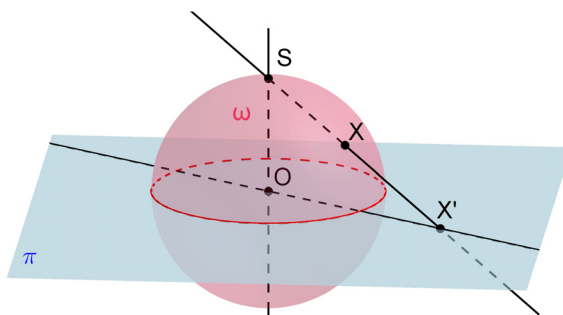
Obrázek 11: Středové promítání trojrozměrného útvaru do roviny

**Kruhová inverze** (daná *určující kružnicí*  $\omega = (S, r)$  a vztahem  $|SX| \cdot |SX'| = r^2$  mezi vzorem  $X$  a obrazem  $X'$ ), viz Obr. 12

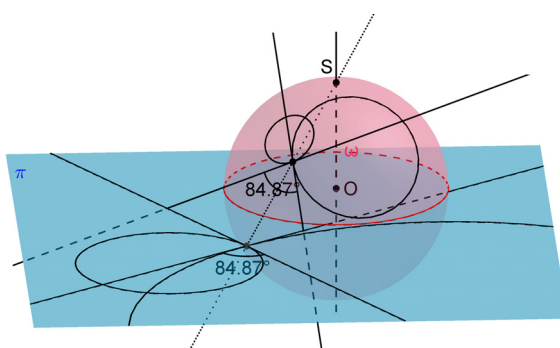


Obrázek 12: Kruhová inverze daná kružnicí  $\omega$

**Stereografická projekce**<sup>3</sup>, viz Obr. 68



Obrázek 13: Stereografická projekce



Obrázek 14: Stereografická projekce: obrazem kružnice je kružnice, velikost úhlu se zachovává (tzv. *konformní* zobrazení).

<sup>3</sup>Stereografický průmět kulové plochy je středovým průmětem kulové plochy pro střed promítání  $S$  ležící na kulové ploše  $\omega$  a pro průmětnu  $\pi$  rovnoběžnou s tečnou rovinou kulové plochy ve středu promítání  $S$



### 3 Dělicí poměr

Dělicím poměrem zde rozumíme číslo, které jednoznačně udává polohu bodu na přímce vzhledem ke dvěma pevně daným bodům této přímky.



Obrázek 15: Tři kolineární body

**Definice 11** (Dělicí poměr). *Nechť  $A, B, C$ ;  $A \neq B$ ,  $C \neq B$ , jsou tři body ležící na přímce (tj. tři kolineární body). Dělicím poměrem bodu  $C$  vzhledem k bodům  $A, B$  rozumíme reálné číslo  $\lambda$ , které zapisujeme  $(ABC)$ , a pro jehož absolutní hodnotu platí*

$$|(ABC)| = \frac{|AC|}{|BC|}, \quad (1)$$

*přítom pro bod  $C$  ležící vně úsečky  $AB$  je  $(ABC) > 0$  a pro bod  $C$  ležící uvnitř  $AB$  je  $(ABC) < 0$ . Pro  $C = A$  je zřejmě  $(ABC) = 0$ .*

**Poznámka.** Uvedená definice zavádí dělicí poměr pomocí podílu vzdáleností bodu  $C$  od daných bodů  $A, B$ . Protože vzdálenosti jsou kladné, nepřináší jejich podíl žádnou informaci o znaménku dělicího poměru, kterému pak musí být věnována zvláštní část definice. Tomu se vyhneme, pokud použijeme k zavedení pojmu dělicí poměr odpovídající vektory definované příslušnou trojicí bodů, viz Obr.16.



Obrázek 16: Dělicí poměr bodu  $C$  vzhledem k bodům  $A, B$

**Definice 12** (Dělicí poměr 2). *Nechť  $A, B, C$ ;  $A \neq B$ ,  $C \neq B$ , jsou tři body ležící na přímce (tj. tři kolineární body). Potom číslo  $\lambda$  definované rovnicí*

$$C - A = \lambda(C - B) \quad (2)$$

*značíme  $(ABC)$  a nazýváme dělicím poměrem bodu  $C$  vzhledem k bodům  $A, B$ .*

**Poznámka.** Ve vztahu (2) je obsažena kompletní informace o čísle  $\lambda$ , tj. o jeho absolutní hodnotě i o znaménku. Pro snazší zapamatování si můžeme (2) přepsat do tvaru

$$\lambda = \frac{C - A}{C - B},$$

který sice není formálně správně, ale jasně koresponduje se vztahem (1). Smysl získá až dosazením souřadnic bodů  $A = [a_1; a_2]$ ,  $B = [b_1; b_2]$ ,  $C = [c_1; c_2]$  :

$$\lambda = \frac{c_1 - a_1}{c_1 - b_1} = \frac{c_2 - a_2}{c_2 - b_2}.$$

**PŘÍKLAD 3.1.** Určete dělicí poměr  $(ABS)$  středu  $S$  úsečky  $AB$  vzhledem k jejím krajním bodům  $A, B$ .

**PŘÍKLAD 3.2.** Pro body  $A, B, C$  platí  $(ABC) = \lambda$ . Zapište pomocí  $\lambda$  dělicí poměry  $(BAC), (CBA), (ACB), (CAB)$  a  $(BCA)$ .

*Řešení:* Vztah (2) pro  $(ABC) = \lambda$  přepíšeme do tvaru  $A = \lambda B + (1 - \lambda)C$ . Odtud po vydělení  $\lambda$  dostaneme  $B = \frac{1}{\lambda}A + (1 - \frac{1}{\lambda})C$ . Odtud je zřejmé, že  $(BAC) = \frac{1}{\lambda}$ . Poznamenejme ještě, že ke stejnému výsledku vede také toto odvození:  $(BAC) = \frac{C - B}{C - A} = \frac{1}{\frac{C-A}{C-B}} = \frac{1}{\lambda}$ .

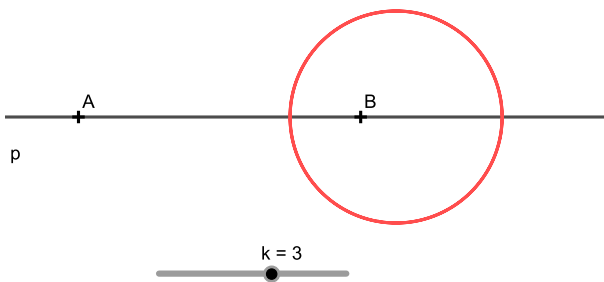
Analogicky odvodíme vyjádření dalších dělicích poměrů v rámci dané trojice bodů:  $(CBA) = \frac{\lambda}{\lambda - 1}, (ACB) = 1 - \lambda, (CAB) = \frac{1}{1 - \lambda}$  a  $(BCA) = 1 - \frac{1}{\lambda}$ .

**PŘÍKLAD 3.3.** V rovině jsou dány dva pevné body  $A, B$ . Určete množinu všech bodů  $X$  této roviny, pro které platí

$$\frac{|AX|}{|BX|} = k,$$

kde  $k$  je reálná konstanta.

*Řešení:* Hledanou množinou je kružnice, které je známá jako „Apolloniova kružnice“, viz Obr. 17. Nalezení její rovnice si usnadníme vhodným umístěním bodů  $A, B$



Obrázek 17: Apolloniova kružnice jako množina bodů  $X$ , pro které platí  $\frac{|AX|}{|BX|} = 3$

vzhledem k souřadnicovým osám. Konkrétně je umístíme na osu  $x$  tak, že  $A = [-a, 0]$  a  $B = [a, 0]$ , kde  $a \in R$ . Vztah  $\frac{|AX|}{|BX|} = k$  přepíšeme do tvaru

$$|AX| = k|BX|$$

a dosadíme uvedené souřadnice bodů  $A, B, X$ . Dostaneme

$$\sqrt{(x+a)^2 + y^2} = k\sqrt{(x-a)^2 + y^2}.$$

Po umocnění obou stran rovnosti na druhou a po několika úpravách, mimo jiné také použijeme doplnění na čtverec, dostáváme rovnici vyšetřované množiny bodů  $X = [x, y]$  ve tvaru

$$\left(x - \frac{a(k^2 + 1)}{k^2 - 1}\right)^2 + y^2 = \frac{4a^2k^2}{(k^2 - 1)^2},$$

který odpovídá rovnici  $(x - s_1)^2 + (y - s_2)^2 = r^2$  kružnice se středem  $S = [s_1, s_2]$  a poloměrem  $r$ .

### 3.1 Barycentrické souřadnice

Výše uvedené skutečnosti nás mohou přivést k možnosti vyjádření polohy bodu nezávisle na volbě soustavy souřadnic. Bod  $C$  můžeme, při zvolených bodech  $A, B$ , zapsat takto:

$$C = \frac{1}{1-\lambda}A - \frac{\lambda}{1-\lambda}B. \quad (3)$$

Jedná se o příklad tzv. barycentrických<sup>1</sup> souřadnic.

#### Barycentrické souřadnice vzhledem ke dvěma bodům

Bod  $X$  leží na přímce  $AB$  právě tehdy, když existují dvě čísla  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  taková, že platí

$$X = \alpha A + \beta B, \quad \alpha + \beta = 1.$$

Tato čísla nazýváme **barycentrickými souřadnicemi** bodu  $X$  vzhledem k bodům  $A, B$ . Rovnice  $X = \alpha A + \beta B$ , kde  $\alpha + \beta = 1$  se nazývá **bodová rovnice přímky**.

**Poznámka.** Analogicky můžeme zavést barycentrické souřadnice bodu  $X$  vzhledem ke třem, čtyřem, obecně pak  $k$  bodům. Provedte pro  $k = 3, 4$ .

**PŘÍKLAD 3.4.** *Napište barycentrické souřadnice středu úsečky  $AB$  vzhledem k jejím krajním bodům.*

Protože  $(ABS) = -1$ , dostáváme po dosazení do (3)

$$S = \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B. \quad (4)$$

Tento výsledek koresponduje se vztahem  $S = \frac{A+B}{2}$  pro výpočet souřadnic středu úsečky  $AB$ .

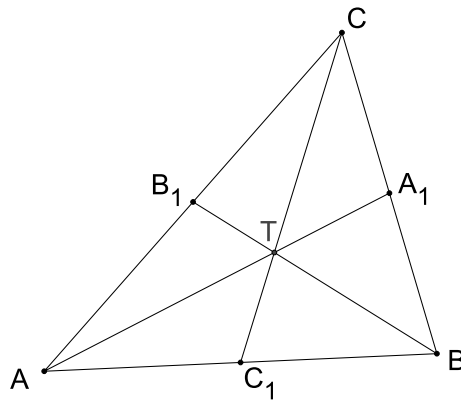
**PŘÍKLAD 3.5.** *Napište barycentrické souřadnice těžiště trojúhelníku  $ABC$  vzhledem k jeho vrcholům.*

Viz Obr. 18. Uvažujme těžnici  $t_a = AA_1$ . Pro  $T$  platí  $(AA_1T) = -2$ , tj. dle (3) je  $T = \frac{1}{3}A + \frac{2}{3}A_1$ , zároveň víme, že  $A_1 = \frac{1}{2}B + \frac{1}{2}C$ . Po dosazení druhého vztahu do prvního dostaneme  $T = \frac{1}{3}A + \frac{2}{3}(\frac{1}{2}B + \frac{1}{2}C)$ , po úpravě pak konečný vztah

$$T = \frac{1}{3}A + \frac{1}{3}B + \frac{1}{3}C. \quad (5)$$

---

<sup>1</sup>*Barus* znamená řecky *těžký*. Slovem *barycentrum* se označuje *hmotný střed* soustavy těles, většinou kosmických. Použití barycentrických souřadnic má analogii ve výpočtu polohy těžiště soustavy těles. Uvažujme například dvě bodová tělesa o hmotnostech  $m_1$  a  $m_2$ , která jsou umístěna v daném pořadí v bodech  $X$  a  $Y$ . Potom pro souřadnice těžiště  $T$  této soustvy dvou těles platí:  $T = \frac{m_1X + m_2Y}{m_1 + m_2} = \frac{m_1}{m_1 + m_2}X + \frac{m_2}{m_1 + m_2}Y$ , kde  $\frac{m_1}{m_1 + m_2} + \frac{m_2}{m_1 + m_2} = 1$ .



Obrázek 18: Barycentrické souřadnice těžiště  $T$  trojúhelníku;  $T = \frac{1}{3}A + \frac{1}{3}B + \frac{1}{3}C$

**Věta 1.** V prostoru  $E_k$  zvolme  $k + 1$  bodů  $A_i$ ,  $k + 1$  čísel  $\alpha_i$  a  $k + 1$  čísel  $\beta_i$ , kde  $i \in \{1, 2, \dots, k + 1\}$ . Potom platí:

a) Bod  $X$  definovaný vztahem

$$X = \alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \dots + \alpha_{k+1} A_{k+1}$$

je definován nezávisle na volbě soustavy souřadnic právě tehdy, když

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_{k+1} = 1.$$

b) Vektor  $\vec{u}$  definovaný vztahem

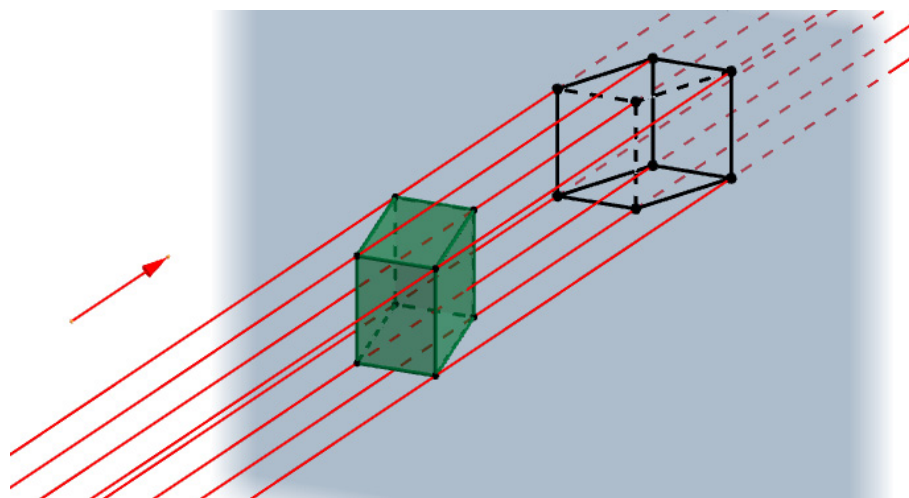
$$\vec{u} = \beta_1 A_1 + \beta_2 A_2 + \dots + \beta_{k+1} A_{k+1}$$

je definován nezávisle na volbě soustavy souřadnic právě tehdy, když

$$\beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_{k+1} = 0.$$

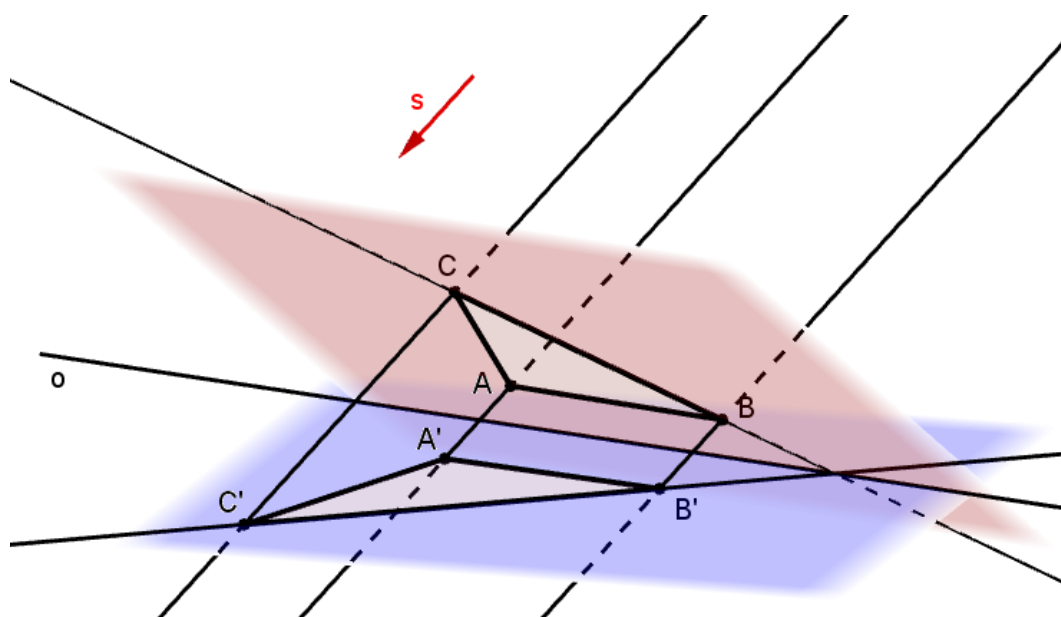
## 4 Afinní zobrazení

Afinní zobrazení (viz níže uvedená Def. 13) se obecně uskutečňuje mezi dvěma afinními bodovými prostory, jejichž dimenze nemusejí být stejné. Příkladem afinního zobrazení z prostoru  $A_3$  do prostoru  $A_2$  je rovnoběžné promítání (z trojrozměrného prostoru do roviny) na Obr. 19.



Obrázek 19: Rovnoběžné promítání mezi dvěma různoběžnými rovinami (dalo vznik *osové afinity*)

Příkladem afinního zobrazení mezi různými prostory téže dimenze je pak rovnoběžné promítání mezi dvěma různoběžnými rovinami (tj. podprostory dimenze 2 prostoru  $A_3$ ) na Obr. 20.



Obrázek 20: Rovnoběžné promítání mezi dvěma různoběžnými rovinami (dalo vznik *osové afinity*)

Častěji se však budeme setkávat s afinním zobrazením, které se uskutečňuje v rámci jednoho afinního bodového prostoru (většinou se bude jednat o rovinu, konkrétně o *eukleidovský prostor*  $E_2$ , nebo o trojrozměrný prostor, konkrétně o *eukleidovský prostor*  $E_3$ ). Je-li takové afinní zobrazení afinního bodového prostoru na sebe vzájemně jednoznačné, nazýváme ho *afinní transformace* daného bodového prostoru, zkráceně *afinita*.

Mezi afinity roviny  $E_2$  patří např. *shodnosti v rovině* nebo *stejnolehlost*, které se vyučují v matematice na základních a středních školách. Z deskriptivní geometrie potom známe *osovou afinitu*.

## 4.1 Definice afinního zobrazení

**Definice 13** (Afinní zobrazení). *Zobrazení  $f$  afinního prostoru  $A$  do afinního prostoru  $A'$  se nazývá afinní, jestliže má tuto vlastnost: Leží-li navzájem různé body  $B, C, D$  z prostoru  $A$  na přímce, pak jejich obrazy  $f(B), f(C), f(D)$  buď splývají, nebo jsou navzájem různé, leží na jedné přímce a jejich dělicí poměr se rovná dělicímu poměru jejich vzorů, tj.:*

$$(f(B), f(C); f(D)) = (B, C; D).$$

**PŘÍKLAD 4.1.** *Pomocí konkrétního příkladu afinního zobrazení (např. rovnoběžného promítání krychle do roviny) ilustруйте obě situace týkající se obrazů  $f(B), f(C), f(D)$ , které definice zmiňuje.*

## 4.2 Asociovaný homomorfismus afinního zobrazení

Důsledkem vztahu mezi afinním bodovým prostorem a vektorovým prostorem (říkáme mu *zaměření afinního bodového prostoru*), který je popsán v definici 4, je existence lineárního zobrazení přidruženého ke každému afinnímu zobrazení. Hovoříme o tzv. *asociovaném homomorfismu*<sup>4</sup>. Zatímco *afinní zobrazení* působí mezi *afinními bodovými prostory*, *asociovaný homomorfismus* působí mezi jejich *zaměřeními*.

<sup>4</sup>Zobrazení  $\varphi$  vektorového prostoru  $V$  do vektorového prostoru  $V'$  se nazývá *homomorfismus* (též „lineární zobrazení“), jestliže pro všechna  $\vec{u}, \vec{v} \in V, k \in \mathbb{T}$  (místo obecného tělesa  $\mathbb{T}$  můžeme uvažovat  $\mathbb{R}$ ) platí:

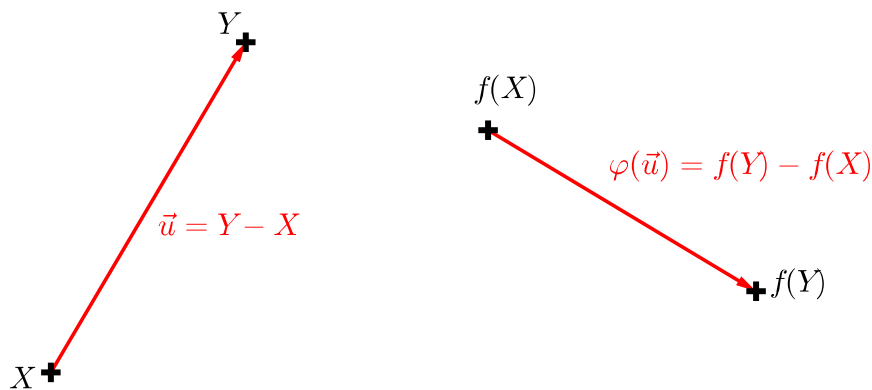
- (1)  $\varphi(\vec{u} + \vec{v}) = \varphi(\vec{u}) + \varphi(\vec{v})$ ,
- (2)  $\varphi(k\vec{u}) = k\varphi(\vec{u})$ .

**Definice 14** (Asociovaný homomorfismus zobrazení  $f$ ). Uvažujme afinní zobrazení  $f$  prostoru  $A$  do prostoru  $A'$ , např.  $f : E_2 \rightarrow E_2$ . Potom **asociovaným** (tj. jednoznačně přiřazeným) **homomorfismem** afinního zobrazení  $f$  rozumíme lineární zobrazení  $\varphi$ , které zobrazuje zaměření  $V$  prostoru  $A$  do zaměření  $V'$  prostoru  $A'$  takto:

$$\vec{u} = Y - X \Rightarrow \varphi(\vec{u}) = f(Y) - f(X), \quad (6)$$

kde  $X, Y$  jsou body z  $A$ ,  $\vec{u} \in V$ ;  $f(X), f(Y)$  body z  $A'$ ,  $\varphi(\vec{u}) \in V'$ .

Role asociovaného homomorfismu  $\varphi$  afinního zobrazení  $f$  je patrná z Obr. 21. Afinní zobrazení  $f$  se uskutečňuje mezi body, tj. zobrazuje body  $X, Y$  po řadě na body  $f(X), f(Y)$ . Homomorfismus  $\varphi$  asociovaný s  $f$  potom „operuje“ na vektorech příslušejících dvojicím těchto bodů, tj. vektor  $\vec{u} = Y - X$  zobrazuje na vektor  $\varphi(\vec{u}) = f(Y) - f(X)$ .



Obrázek 21: Asociovaný homomorfismus  $\varphi$  afinního zobrazení  $f$

### 4.3 Rovnice afinního zobrazení z $A_n$ do $A_m$

Jestliže afinní zobrazení  $f : A_n \rightarrow A_m$  přiřazuje bodu  $X[x_1, x_2, \dots, x_n] \in A_n$  obraz  $X'[x'_1, x'_2, \dots, x'_m] \in A_m$ , platí

$$\begin{aligned} x'_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n + b_1 \\ x'_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n + b_2 \\ &\vdots \\ x'_m &= a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n + b_m, \end{aligned} \quad (7)$$

kde  $a_{ij}, b_i$ ;  $i \in \{1, \dots, m\}, j \in \{1, \dots, n\}$ , jsou reálné koeficienty charakterizující zobrazení  $f$ .

Soustavu (7) můžeme zapsat zkráceně ve tvaru



$$x'_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j + b_i, \quad i = 1, 2, \dots, m. \quad (8)$$

Často se pro geometrická zobrazení volí maticový zápis soustavy

$$\begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}, \quad (9)$$

případně forma maticové rovnice

$$\mathbf{X}' = A \cdot \mathbf{X} + B, \quad (10)$$

kde matici  $A$  typu  $m \times n$  nazýváme *maticí příslušné lineární transformace* (pro lineární transformaci je  $B = O$ , tj.  $b_1 = b_2 = \dots = b_m = 0$ , viz např. (28), (29)).

#### 4.4 Rovnice homomorfismu asociovaného s afinním zobrazením

Jestliže vektoru  $\vec{u} = Y - X$ ,  $\vec{u} = (u_1, \dots, u_n)$ , ze zaměření  $V_n$  prostoru  $A_n$  je homomorfismem  $\varphi$  asociovaným s afinním zobrazením  $f$  přiřazen vektor  $\vec{u}' = \varphi(\vec{u}) = f(Y) - f(X)$ ,  $\vec{u}' = (u'_1, \dots, u'_m)$ , ze zaměření  $V_m$  prostoru  $A_m$ , platí

$$\begin{aligned} u'_1 &= a_{11}u_1 + a_{12}u_2 + \dots + a_{1n}u_n \\ u'_2 &= a_{21}u_1 + a_{22}u_2 + \dots + a_{2n}u_n \\ &\vdots \\ u'_m &= a_{m1}u_1 + a_{m2}u_2 + \dots + a_{mn}u_n. \end{aligned} \quad (11)$$

Zkráceně zapíšeme ve tvaru

$$u'_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}u_j, \quad i = 1, \dots, m, \quad (12)$$

nebo, analogicky s (9), zvolíme maticový zápis

$$\begin{bmatrix} u'_1 \\ u'_2 \\ \vdots \\ u'_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}, \quad (13)$$

případně formu maticové rovnice

$$\mathbf{U}' = A \cdot \mathbf{U}, \quad (14)$$

kde  $\mathbf{U} = \vec{u}^T$ ,  $\mathbf{U}' = \vec{u}'^T$  a  $A$  je matice typu  $m \times n$  identická s maticí  $A$  v (10).

**PŘÍKLAD 4.2.** Porovnejte algebraické vyjádření afinního zobrazení (9) s algebraickým vyjádřením asociovaného homomorfismu (28), popište jejich rozdíl a pokuste se uvést jeho příčinu.

**PŘÍKLAD 4.3.** Jak již bylo uvedeno, pro lineární zobrazení je  $B = O$ . Uveďte nějaké příklady lineárního afinního zobrazení. Můžete si vzít na pomoc aplet <https://www.geogebra.org/m/UcqvE9uT>.

## 4.5 Odvození rovnic afinního zobrazení a asociovaného homomorfismu

V této kapitole je detailně popsán postup odvození rovnic (7) a (26).

### 4.5.1 Afinní zobrazení z $A_n$ do $A_m$

Nechť afinní bodový prostor  $A_n$  je určen počátkem  $P$  a bází  $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$ , tzn.  $A_n = \{P; \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$ . Podobně nechť  $A'_m = \{Q; \vec{d}_1, \vec{d}_2, \dots, \vec{d}_m\}$ . Nechť  $f$  je afinní zobrazení  $A_n$  do  $A'_m$  a  $\varphi$  asociované zobrazení k  $f$  tak, že

$$\varphi(\vec{e}_j) = \sum_{i=1}^m a_{ij} \vec{d}_i; \quad j = 1, \dots, n, \quad (15)$$

tzn. koeficienty  $a_{ij}$  jsou souřadnice vektorů  $\varphi(\vec{e}_j)$  v bázi zaměření prostoru  $A_m$ ,

$$f(P) = Q + \sum_{i=1}^m b_i \vec{d}_i, \quad (16)$$

tzn. počátek  $P \in A_n$  se zobrazuje do bodu  $f(P) \in A'_m$ , který má při počátku  $Q$  souřadnice  $b_i$ .

S ohledem na výše uvedené úmluvy nyní určíme vztah mezi souřadnicemi libovolného bodu  $X \in A_n$  a jeho obrazu  $f(X) \in A'_m$ . Vyjádříme souřadnice  $X$ ,  $f(X)$  :

$$X = P + \sum_{j=1}^n x_j \vec{e}_j, \quad (17)$$

$$f(X) = Q + \sum_{i=1}^m x'_i \vec{d}_i. \quad (18)$$

Zobrazíme-li bod  $X$  v afinitě  $f$ , můžeme dle uvedených vlastností zobrazení  $f$  a  $\varphi$  psát:

$$f(X) = f(P) + \sum_{j=1}^n x_j \varphi(\vec{e}_j).$$

Po dosazení z (15) a (16) dostáváme

$$f(X) = Q + \sum_{i=1}^m b_i \vec{d}_i + \sum_{j=1}^n x_j \sum_{i=1}^m a_{ij} \vec{d}_i,$$

po úpravě

$$f(X) = Q + \sum_{i=1}^m \left( \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j + b_i \right) \vec{d}_i. \quad (19)$$

Porovnáme-li koeficienty při  $\vec{d}_i$  ve vyjádřeních (18) a (19), dostáváme hledané rovnice

$$x'_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j + b_i, \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (20)$$

Jinou formou zápisu (??) je soustava rovnic

$$\begin{aligned} x'_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n + b_1 \\ x'_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n + b_2 \\ &\vdots \\ x'_n &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n + b_n, \end{aligned}$$

maticový zápis soustavy

$$\begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}, \quad (21)$$

případně maticová rovnice

$$\mathbf{X}' = A \cdot \mathbf{X} + B. \quad (22)$$

#### 4.5.2 Homomorfismus asociovaný s afinním zobrazením

Nyní ještě určíme rovnice asociovaného zobrazení  $\varphi$ . Nechť vektor  $\vec{u} \in V_n$  se zobrazí do vektoru  $\varphi(\vec{u}) \in V'_m$ . Pro souřadnice vzoru  $\vec{u}$  a obrazu  $\varphi(\vec{u})$  platí

$$\vec{u} = \sum_{j=1}^n u_j \vec{e}_j; \quad (23)$$

$$\varphi(\vec{u}) = \sum_{i=1}^m u'_i \vec{d}_i \quad (24)$$

Na (23) aplikujeme zobrazení  $\varphi$  a upravíme dle (15). Dostaneme

$$\varphi(\vec{u}) = \sum_{j=1}^n u_j \varphi(\vec{e}_j) = \sum_{j=1}^n u_j \sum_{i=1}^m a_{ij} \vec{d}_i.$$

Po úpravě

$$\varphi(\vec{u}) = \sum_{i=1}^m \left( \sum_{j=1}^n a_{ij} u_j \right) \vec{d}_i. \quad (25)$$

Srovnáním (25) s (24) dostaneme hledané rovnice asociovaného zobrazení

$$\begin{aligned} u'_1 &= a_{11}u_1 + a_{12}u_2 + \dots + a_{1n}u_n \\ u'_2 &= a_{21}u_1 + a_{22}u_2 + \dots + a_{2n}u_n \\ &\vdots \\ u'_m &= a_{m1}u_1 + a_{m2}u_2 + \dots + a_{mn}u_n, \end{aligned} \quad (26)$$

zkráceně ve tvaru

$$u'_i = \sum_j^n a_{ij} u_j, \quad i = 1, \dots, m. \quad (27)$$

Analogicky s (9) možno zapsat i maticově

$$\begin{bmatrix} u'_1 \\ u'_2 \\ \vdots \\ u'_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}, \quad (28)$$

případně formu maticové rovnice

$$\mathbf{U}' = \mathbf{A} \cdot \mathbf{U}, \quad (29)$$

kde  $\mathbf{U} = \vec{u}^T$ ,  $\mathbf{U}' = \vec{u}'^T$  a  $\mathbf{A}$  je matice typu  $m \times n$  identická s maticí  $A$  v (22).

## 4.6 Věta o určenosti afinního zobrazení

Z planimetrie známe věty o určenosti shodnosti (viz <https://www.geogebra.org/m/RYaK>) a podobnosti v rovině. Následující věta je jejich zobecněním jak z hlediska zobrazení (uvažujeme libovolné afinní zobrazení), tak i z hlediska dimenzí prostorů vzorů a obrazů (místo roviny uvažujeme dva různé bodové prostory obecně odlišných dimenzí).

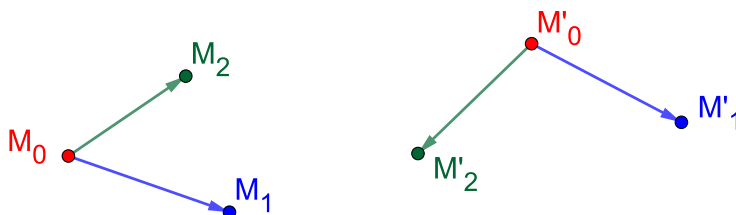
**Věta 2** (O určenosti afinního zobrazení). *Mějme dva afinní bodové prostory  $A_n, A'_m$ . Nechť  $M_0, M_1, M_2, \dots, M_n$  je  $n+1$  lineárně nezávislých bodů v  $A_n$ ,  $M'_0, M'_1, \dots, M'_n$   $n+1$  libovolně zvolených bodů v  $A'_m$ . Pak existuje právě jedno afinní zobrazení  $f$  prostoru  $A_n$  do  $A'_m$ , které přiřazuje bodům  $M_j$  body  $M'_j$  tak, že*

$$M'_j = f(M_j); \quad j = 0, 1, \dots, n.$$

*Důkaz.* Ze Def. 14 asociovaného homomorfismu  $\varphi$  plyne, že jeho vztah k afinnímu zobrazení  $f$  lze vyjádřit vztahem  $\varphi(X - P) = f(X) - f(P)$ , který můžeme psát ve tvaru

$$f(X) = f(P) + \varphi(X - P). \quad (30)$$

Odtud je zřejmé, že afinní zobrazení  $f$  lze určit (zadat) jednou dvojicí bodů ve vztahu „vzor  $\rightarrow$  obraz“, v případě (30) je to dvojice  $P \rightarrow f(P)$ , a asociovaným homomorfismem  $\varphi$ . Z toho plyne důkaz věty 2: Afinní zobrazení je určeno dvojicí bodů „vzor  $\rightarrow$  obraz“  $M_0 \rightarrow M'_0$  a asociovaným homomorfismem  $\varphi$  jednoznačně určeným  $n$  nezávislými vektory  $M_1 - M_0, M_2 - M_0, \dots, M_n - M_0$  a jejich obrazy (které mohou být závislé)  $M'_1 - M'_0, M'_2 - M'_0, \dots, M'_n - M'_0$ .



Obrázek 22: Věta o určenosti afinního zobrazení pro  $n = m = 2$  (tj. pro rovinu)

□

**PŘÍKLAD 4.4.** Zjistěte, zda existuje afinní zobrazení  $f : A_2 \rightarrow A_3$ , při kterém se body  $k[1, 0]$ ,  $l[0, 1]$ ,  $m[2, p]$  zobrazí po řadě na body  $K[2, 1, -1]$ ,  $L[3, 2, 0]$ ,  $M[1, 0, 2]$ .

Řešení:

Hledáme matice  $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$ , pro které platí

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}.$$

Pro řešení této úlohy použijeme program *wxMaxima*<sup>5</sup>

```
(%i1) k:[1,0]$ l:[0,1]$ m:[2,p]$ K:[2,1,-1]$ L:[3,2,0]$ M:[1,0,2]$
```

```
(%i7) A:matrix([a11,a12],[a21,a22],[a31,a32]); B:matrix([b1],[b2],[b3]);
```

```
(%o7) (a11 a12)
      (a21 a22)
      (a31 a32)
```

```
(%o8) (b1)
      (b2)
      (b3)
```

```
(%i9) transpose(K)=A.transpose(k)+B; transpose(L)=A.transpose(l)+B;
      transpose(M)=A.transpose(m)+B;
```

```
(%o9) ( 2 )
      ( 1 ) = (b1 + a11)
      (-1)   (b2 + a21)
              (b3 + a31)
```

---

<sup>5</sup>*wxMaxima* je bezplatně šířený program počítačové algebry (CAS, *Computer Algebra System*), jehož instalační soubor je dostupný na adrese <http://andrejv.github.io/wxmaxima/>.

$$(\%o10) \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b1 + a12 \\ b2 + a22 \\ b3 + a32 \end{pmatrix}$$

$$(\%o11) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a12 p + b1 + 2 a11 \\ a22 p + b2 + 2 a21 \\ a32 p + b3 + 2 a31 \end{pmatrix}$$

(%i12) L1:transpose(K)\$ P1:A.transpose(k)+B\$ L2:transpose(L)\$  
P2:A.transpose(1)+B\$ L3:transpose(M)\$ P3:A.transpose(m)+B\$

(%i18) r1:P1[1,1]=L1[1,1]; r2:P1[2,1]=L1[2,1]; r3:P1[3,1]=L1[3,1];  
r4:P2[1,1]=L2[1,1]; r5:P2[2,1]=L2[2,1]; r6:P2[3,1]=L2[3,1];  
r7:P3[1,1]=L3[1,1]; r8:P3[2,1]=L3[2,1]; r9:P3[3,1]=L3[3,1];

$$(\%o18) b1 + a11 = 2$$

$$(\%o19) b2 + a21 = 1$$

$$(\%o20) b3 + a31 = -1$$

$$(\%o21) b1 + a12 = 3$$

$$(\%o22) b2 + a22 = 2$$

$$(\%o23) b3 + a32 = 0$$

$$(\%o24) a12 p + b1 + 2 a11 = 1$$

$$(\%o25) a22 p + b2 + 2 a21 = 0$$

$$(\%o26) a32 p + b3 + 2 a31 = 2$$

Získanou soustavu devíti rovnic o devíti neznámých  $a11, a12, a21, a22, a31, a32, b1, b2, b3$  nyní vyřešíme:

(%i27) res:solve([r1,r2,r3,r4,r5,r6,r7,r8,r9],  
[a11,a12,a21,a22,a31,a32,b1,b2,b3])[1];

$$(\%o27) [a11 = -1, a12 = 0, a21 = -1, a22 = 0, a31 = -\frac{p-3}{p+1}, a32 = \frac{4}{p+1},$$

$$b1 = 3, b2 = 2, b3 = -\frac{4}{p+1}]$$

Vidíme, že úloha má řešení pro všechny reálné hodnoty parametru  $p$  s výjimkou  $-1$ , tj. pro  $p \in \mathbb{R} - \{0\}$ . Hledané matice  $A, B$  potom můžeme psát následujícím způsobem:

```
(%i28) subst(res,A); subst(res,B);
```

$$(%o28) \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 0 \\ -\frac{p-3}{p+1} & \frac{4}{p+1} \end{pmatrix}$$

$$(%o29) \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -\frac{4}{p+1} \end{pmatrix}$$

Při pohledu na matici  $A$  můžeme konstatovat, že uvažované afinní zobrazení  $f$  existuje pro všechna  $p \neq -1$ . Jeho rovnice získáme dosazením vypočítaných koeficientů do obecného zápisu rovnic afinního zobrazení (7):

```
(%i30) ev([x1=a11*x+a12*y+b1, y1=a21*x+a22*y+b2, z1=a31*x+a32*y+b3],res);
```

$$(%o30) [x1 = 3 - x, y1 = 2 - x, z1 = \frac{4y}{p+1} - \frac{(p-3)x}{p+1} - \frac{4}{p+1}]$$

Po přepsání zápisu řešení v kódu wxMaximy do obvyklého tvaru soustavy dle (7) dostáváme konečný zápis řešení:

$$\begin{aligned} x' &= -x + 3, \\ y' &= -x + 2, \\ z' &= -\frac{p-3}{p+1}x + \frac{4}{p+1}y - \frac{4}{p+1}. \end{aligned}$$

Zbývá otázka, jak lze geometricky interpretovat situaci, kdy je  $p = -1$ . Po dosazení do  $m[2, p]$  dostáváme jako trojici vzorů body  $k[1, 0]$ ,  $l[0, 1]$  a  $m[2, -1]$ . Uvažujme nyní dva vektory jimi určené, např.  $\vec{u} = l - k = (-1, 1)$  a  $\vec{v} = m - k = (1, -1)$ . Protože se jedná o lineárně závislé vektory,  $\vec{u} = -\vec{v}$ , body  $k, l, m$  leží v jedné přímce. Není tak splněn předpoklad věty 2 a proto pro  $p = -1$  uvažované afinní zobrazení neexistuje.

**PŘÍKLAD 4.5.** *Určete rovnici afinního zobrazení  $f : A_2 \rightarrow A_1$ , při kterém se body  $[2, 1]$ ,  $[3, 2]$ ,  $[0, 1]$  zobrazí po řadě na body  $[2]$ ,  $[0]$ ,  $[8]$ .*

*Řešení:* Opět použijeme program *wxMaxima*. Protože program nedovoluje použití apostrofu ve jménu proměnné, označíme tři výchozí body symboly  $A1, B1, C1$ , jejich obrazy v uvedeném pořadí pak  $A2, B2, C2$ .



```

(%i1)  A1:[2,1]$ B1:[3,2]$ C1:[0,1]$ A2:[2]$ B2:[0]$ C2:[8]$

(%i7)  A:matrix([a11,a12]); B:matrix([b1]);

(%o7)  (a11 a12)
(%o8)  (b1)

(%i9)  transpose(A2)=A.transpose(A1)+B; transpose(B2)=A.transpose(B1)+B;
        transpose(C2)=A.transpose(C1)+B;

(%o9)  (2) = (b1 + a12 + 2 a11)
(%o10) (0) = (b1 + 2 a12 + 3 a11)
(%o11) (8) = (b1 + a12)

(%i12) L1:transpose(A2)$ P1:A.transpose(A1)+B$ L2:transpose(B2)$
        P2:A.transpose(B1)+B$ L3:transpose(C2)$ P3:A.transpose(C1)+B$

(%i18) r1:P1[1,1]=L1[1,1]; r2:P2[1,1]=L2[1,1]; r3:P3[1,1]=L3[1,1];

(%o18) b1 + a12 + 2 a11 = 2
(%o19) b1 + 2 a12 + 3 a11 = 0
(%o20) b1 + a12 = 8

(%i21) res:solve([r1,r2,r3],[a11,a12,b1])[1];

(%o21) [a11 = -3, a12 = 1, b1 = 7]

(%i22) subst(res,A); subst(res,B);

(%o22) (-3 1)
(%o23) (7)

(%i24) ev([x1=a11*x+a12*y+b1],res);

(%o24) [x1 = y - 3 x + 7]

```

Hledané afinní zobrazení existuje a je dáno rovnicí  $x' = -3x + y + 7$ .

**PŘÍKLAD 4.6.** Určete rovnice rovnoběžného promítání prostoru  $A_3$  do průmětny  $\pi \subset A_3$ , vzhledem k pevné lineární soustavě souřadnic prostoru  $A_3$ , je-li dána průmětna  $\pi$  rovnicí  $2x + y - z + 2 = 0$  a směr promítání je určen vektorem  $\vec{s} = (-2; -1; 3)$ .

Řešení:

(%i1) `pi:2*x+y-z+2=0$ s: [-2,-1,3]$`

(%i3) `r:[x,y,z]+t*s;`

(%o3)  $[x - 2t, y - t, z + 3t]$

(%i4) `rov:substitute([x=r[1],y=r[2],z=r[3]],pi);`

(%o4)  $-z + y + 2(x - 2t) - 4t + 2 = 0$

(%i5) `to:solve(rov,t);`

(%o5)  $[t = -\frac{z - y - 2x - 2}{8}]$

(%i6) `Xo:expand(substitute(to,r));`

(%o6)  $[\frac{z}{4} - \frac{y}{4} + \frac{x}{2} - \frac{1}{2}, \frac{z}{8} + \frac{7y}{8} - \frac{x}{4} - \frac{1}{4}, \frac{5z}{8} + \frac{3y}{8} + \frac{3x}{4} + \frac{3}{4}]$

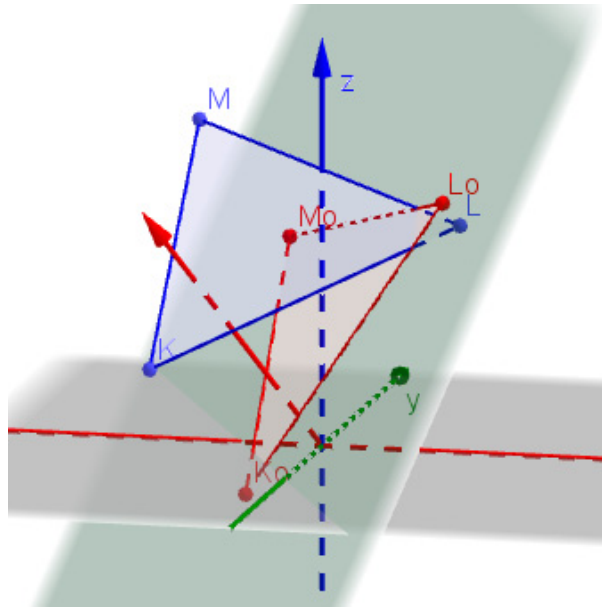
(%i7) `A:coefmatrix(Xo,[x,y,z]); B:col(augcoefmatrix(Xo,[x,y,z]),4);`

(%o7)  $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{7}{8} & \frac{1}{8} \\ \frac{3}{4} & \frac{3}{8} & \frac{5}{8} \end{pmatrix}$

(%o8)  $\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4} \\ \frac{3}{4} \end{pmatrix}$

Dané zobrazení, jehož působení ilustruje Obr. 23, je definováno rovnicemi

$$\begin{aligned} x' &= \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}y + \frac{1}{4}z - \frac{1}{2}, \\ y' &= -\frac{1}{4}x + \frac{7}{8}y + \frac{1}{8}z - \frac{1}{4}, \\ z' &= \frac{3}{4}x + \frac{3}{8}y + \frac{5}{8}z + \frac{3}{4}. \end{aligned}$$



Obrázek 23: Rovnoběžné promítání do roviny  $\pi : 2x + y - z + 2 = 0$  ve směru  $\vec{s} = (-2, -1, 3)$

**PŘÍKLAD 4.7.** Určete rovnice afinního zobrazení  $f : A_3 \rightarrow A_2$ , které bodům  $A = [1, 2, 3]$ ,  $B = [0, 1, 1]$ ,  $C = [1, -1, 2]$ ,  $D = [3, 0, 1]$  přiřazuje v daném pořadí body  $A' = [-1, 3]$ ,  $B = [0, 2]$ ,  $C = [0, 0]$ ,  $D = [3, 1]$ .

*Řešení:* Postupujeme stejně jako u příkladů 4.4 a 4.5.

```
(%i1) A1:[1,2,3]$ B1:[0,1,1]$ C1:[1,-1,2]$ D1:[3,0,1]$ A2:[-1,3]$
      B2:[0,2]$ C2:[0,0]$ D2:[3,1]$
```

```
(%i9) A:matrix([a11,a12,a13],[a21,a22,a23]); B:matrix([b1],[b2]);
```

```
(%o9) (a11 a12 a13)
      (a21 a22 a23)
```

```
(%o10) (b1)
       (b2)
```

```
(%i11) transpose(A2)=A.transpose(A1)+B; transpose(B2)=A.transpose(B1)+B;
      transpose(C2)=A.transpose(C1)+B; transpose(D2)=A.transpose(D1)+B;
```

```
(%o11) (-1) = (b1 + 3 a13 + 2 a12 + a11)
       (3)   (b2 + 3 a23 + 2 a22 + a21)
```

```
(%o12) (0) = (b1 + a13 + a12)
       (2)   (b2 + a23 + a22)
```

```
(%o13) (0) = (b1 + 2 a13 - a12 + a11)
       (0)   (b2 + 2 a23 - a22 + a21)
```

$$(\%o14) \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b1 + a13 + 3 a11 \\ b2 + a23 + 3 a21 \end{pmatrix}$$

(%i15) L1:transpose(A2)\$ P1:A.transpose(A1)+B\$ L2:transpose(B2)\$  
 P2:A.transpose(B1)+B\$ L3:transpose(C2)\$ P3:A.transpose(C1)+B\$  
 L4:transpose(D2)\$ P4:A.transpose(D1)+B\$

(%i23) r1:P1[1,1]=L1[1,1]; r2:P1[2,1]=L1[2,1]; r3:P2[1,1]=L2[1,1];  
 r4:P2[2,1]=L2[2,1]; r5:P3[1,1]=L3[1,1]; r6:P3[2,1]=L3[2,1];  
 r7:P4[1,1]=L4[1,1]; r8:P4[2,1]=L4[2,1];

$$(\%o23) b1 + 3 a13 + 2 a12 + a11 = -1$$

$$(\%o24) b2 + 3 a23 + 2 a22 + a21 = 3$$

$$(\%o25) b1 + a13 + a12 = 0$$

$$(\%o26) b2 + a23 + a22 = 2$$

$$(\%o27) b1 + 2 a13 - a12 + a11 = 0$$

$$(\%o28) b2 + 2 a23 - a22 + a21 = 0$$

$$(\%o29) b1 + a13 + 3 a11 = 3$$

$$(\%o30) b2 + a23 + 3 a21 = 1$$

(%i31) res:solve([r1,r2,r3,r4,r5,r6,r7,r8],  
 [a11,a12,a13,a21,a22,a23,b1,b2])[1];

$$(\%o31) [a11 = 1, a12 = 0, a13 = -1, a21 = 0, a22 = 1, a23 = 0, b1 = 1, b2 = 1]$$

(%i32) subst(res,A); subst(res,B);

$$(\%o32) \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(\%o33) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(%i34) ev([x1=a11\*x+a12\*y+a13\*z+b1, y1=a21\*x+a22\*y+a23\*z+b2],res);

$$(\%o34) [x1 = -z + x + 1, y1 = y + 1]$$

Řešením je afinní zobrazení  $f$  dané rovnicemi

$$\begin{aligned} x' &= x - z + 1, \\ y' &= y + 1. \end{aligned}$$

## 4.7 Cvičení – Afinity zobrazení

1. Určete rovnici afinity zobrazení  $f : A_2 \rightarrow A_1$ , při kterém se body  $[2, 1]$ ,  $[3, 2]$ ,  $[0, 1]$  zobrazí po řadě na body  $[2]$ ,  $[4]$ ,  $[10]$ .
2. Pro jaké hodnoty parametrů  $p$ ,  $q$  existuje afinity zobrazení  $f : A_2 \rightarrow A'_2$ , při kterém se body  $[2, 1]$ ,  $[-2, 3]$ ,  $[4, 0]$  zobrazí po řadě na body  $[p, 3]$ ,  $[0, q]$ ,  $[1, 1]$ .

## 5 Afinita

*Afinita* je stručný název pro *afinní transformaci prostoru*  $A_n$ .

**Definice 15.** *Vzájemně jednoznačné<sup>6</sup> afinní zobrazení afinního prostoru  $A_n$  na sebe nazýváme „afinitou“ prostoru  $A_n$  nebo „afinní transformací prostoru  $A_n$ “.*

Afinita se tedy afinní zobrazení, které se uskutečňuje v rámci jednoho bodového prostoru  $A_n$ , do něhož patří obrazy i vzory.

Afinita má stejné analytické vyjádření jako obecné afinní zobrazení, viz (7), (8), (9)<sup>7</sup>. Vzhledem k tomu, že se jedná o vzájemně jednoznačné zobrazení, je akorát matice afinity *čtvercová a regulární*. Afinitu tak lze zapsat maticovou rovnicí

$$\mathbf{X}' = A \cdot \mathbf{X} + B, \quad (33)$$

kde  $A$  je regulární čtvercová matice  $n$ -tého řádu a  $X, B$  a  $X'$  jsou matice typu  $(n, 1)$ .

**PŘÍKLAD 5.1.** *Zdůvodněte výše uvedené tvrzení, že matice  $A$  afinity je regulární. Vyděte z toho, že afinita je vzájemně jednoznačným zobrazením.*

Jako příklady si uveďme afinity prostorů  $A_2$  ( $E_2$ ) a  $A_3$  ( $E_3$ ).

Každé afinní zobrazení  $f$  v rovině  $A_2$ , které bodu  $X = [x, y]$  přiřazuje obraz  $X' = [x', y']$ , je možné zapsat rovnicemi

$$\begin{aligned} f : x' &= a_{11}x + a_{12}y + b_1 \\ y' &= a_{21}x + a_{22}y + b_2 \end{aligned} \quad (34)$$

a naopak, každé zobrazení v rovině, které je dáno soustavou rovnic (34), je afinitou v rovině. Soustavu (34) můžeme zapsat také pomocí matic

$$f : \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}. \quad (35)$$

---

<sup>6</sup>Připomeňme si, že *vzájemně jednoznačným zobrazením* rozumíme zobrazení, které je zároveň *prosté* a *na množinu*.

<sup>7</sup>Afinitu  $f$  prostoru  $A_n$  chápeme jako speciální případ afinního zobrazení z  $A_n$  do  $A'_m$ , kde  $m = n$ . Potom je tato afinita určena rovnicemi

$$f : x'_i = \sum_j^n a_{ij}x_j + b_i, \quad i = 1, \dots, n \quad (31)$$

zobrazujícími bod  $X = (x_1, \dots, x_n)$  do bodu  $X' = (x'_1, \dots, x'_n)$ . Zobrazení  $\varphi$  asociované k  $f$

$$\varphi : u'_i = \sum_j^n a_{ij}u_j, \quad i = 1, \dots, n \quad (32)$$

zobrazuje vektor  $\vec{u}(u_1, \dots, u_n)$  do  $\vec{u}'(u'_1, \dots, u'_n)$ .

A platí to i naopak, afinitou je každé zobrazení, které lze zapsat maticovou rovnicí

$$\mathbf{X}' = A \cdot \mathbf{X} + B,$$

$$\text{kde } X' = \begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \text{ a } B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}.$$

Analogické vztahy platí pro afinity v  $A_3$  ( $A_4, \dots, A_n$ ). Každé afinní zobrazení  $f$  v prostoru  $A_3$  můžeme zapsat soustavou rovnic

$$\begin{aligned} g : x'_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + b_1 \\ x'_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + b_2, \\ x'_3 &= a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + b_3 \end{aligned} \quad (36)$$

nebo jednou maticovou rovnicí

$$g : \begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}. \quad (37)$$

**PŘÍKLAD 5.2.** Určete afinitu v rovině  $A_2$ , ve které při dané soustavě souřadné se bod  $B = [0, 0]$  zobrazuje do bodu  $B' = [1, 0]$ , bod  $C = [1, 0]$  do bodu  $C' = [0, 1]$  a bod  $D = [0, 1]$  do bodu  $D' = [0, 0]$ .

Stejně jako v případě obecného afinního zobrazení, i u afinity řešíme otázku, jakým minimálním počtem bodů, vzorů i obrazů, je v prostoru dané dimenze jednoznačně určena. Zabývá se tím následující věta o určenosti afinity.

**Věta 3** (O určenosti afinity prostoru  $A_n$ ). *Nechť  $M_0, M_1, M_2, \dots, M_n$  a  $M'_0, M'_1, M'_2, \dots, M'_n$  jsou dvě skupiny  $(n+1)$  lineárně nezávislých bodů afinního prostoru  $A_n$ . Pak existuje jediná afinita  $f$  prostoru  $A_n$ , pro kterou*

$$f(M_i) = M'_i, \quad i = 0, 1, \dots, n.$$

Jestliže v uvedené větě určíme pomocí dvou jmenovaných skupin lineárně nezávislých bodů dvě afinní souřadnicové soustavy prostoru  $A$ , pak tyto soustavy určují příslušnou afinitu  $f$  uvažovaného prostoru<sup>8</sup>.

<sup>8</sup>Děje se tak v souladu s následující větou:

**Věta 4.** *Nechť v afinním bodovém prostoru  $A_n$  jsou dány dvě afinní souřadnicové soustavy  $A_n = \{P; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$ ;  $A_n = \{Q; \vec{d}_1, \vec{d}_2, \dots, \vec{d}_n\}$ . Pak existuje jediná afinita prostoru  $A_n$ , pro kterou*

$$f(P) = Q$$

a asociované zobrazení  $\varphi$

$$\varphi(\vec{e}_i) = \vec{d}_i, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

## 5.1 Příklady afinit

Příkladem afinit, které již známe jsou shodná a podobná zobrazení v rovině<sup>9</sup>. Zde si jenom stručně připomeneme analytická vyjádření těchto zobrazení, abychom si je dali do souvislosti s tím, co jsme si uváděli o rovnicích afinity. Navíc uvedeme ještě rovnice několika vybraných shodností trojrozměrného prostoru.

### 5.1.1 Shodná zobrazení v $E_2$

#### Osová souměrnost

Osová souměrnost  $\mathbf{O}(o)$  podle osy  $o$  s obecnou rovnicí  $o : ax + by + c = 0$ :

$$\begin{aligned}x' &= x - \frac{2a}{a^2 + b^2} (ax + by + c) \\y' &= y - \frac{2b}{a^2 + b^2} (ax + by + c)\end{aligned}$$

**PŘÍKLAD 5.3.** *Napište rovnice osové souměrnosti v  $E_2$  s osou  $o$  totožnou se souřadnicovou osou  $x$  ( $y$ ).*

**PŘÍKLAD 5.4.** *Napište rovnice souměrnosti podle přímky  $o : 2x - 3y + 1 = 0$ .*

**PŘÍKLAD 5.5.** *Napište rovnice osové souměrnosti, zobrazující počátek na bod  $[1, 5]$ .*

#### Otočení (rotace)

Otočení (rotace)  $\mathbf{R}(S, \alpha)$  se středem  $S = [s_1, s_2]$ :

$$\begin{aligned}x' &= (x - s_1) \cos \alpha - (y - s_2) \sin \alpha + s_1 \\y' &= (x - s_1) \sin \alpha + (y - s_2) \cos \alpha + s_2\end{aligned}$$

Po úpravě:

$$\begin{aligned}x' &= x \cos \alpha - y \sin \alpha + s_1 - s_1 \cos \alpha + s_2 \sin \alpha \\y' &= x \sin \alpha + y \cos \alpha + s_2 - s_1 \sin \alpha - s_2 \cos \alpha\end{aligned}$$

**PŘÍKLAD 5.6.** *Napište rovnice otočení kolem počátku o úhel  $\alpha = -135^\circ$ .*

**PŘÍKLAD 5.7.** *Napište rovnice otočení se středem  $S[1, -2]$  o úhel  $\alpha = 60^\circ$ .*

---

<sup>9</sup>Shodnostem a podobnostem v rovině se věnuje předmět *Planimetrie*, viz [http://home.pf.jcu.cz/~hasek/PLA\\_2017.htm](http://home.pf.jcu.cz/~hasek/PLA_2017.htm)



## Středová souměrnost

Středová souměrnost  $\mathbf{S}(S)$  se středem  $S = [s_1, s_2]$ :

$$\begin{aligned}x' &= -x + 2s_1 \\y' &= -y + 2s_2\end{aligned}$$

**PŘÍKLAD 5.8.** *Napište rovnice středové souměrnosti  $\mathbf{S}(S)$  se středem  $S[-2, 3]$ .*

## Posunutí (translace)

Posunutí (translace)  $\mathbf{T}(\vec{p})$  určené vektorem  $\vec{p} = [p_1, p_2]$ :

$$\begin{aligned}x' &= x + p_1 \\y' &= y + p_2\end{aligned}$$

**PŘÍKLAD 5.9.** *Napište rovnice posunutí, které je určeno vzorem  $A = [-1, 3]$  a jeho obrazem  $A' = [4, 2]$ .*

## Posunuté zrcadlení

Posunuté zrcadlení s osou v souřadnicové ose  $x$ :

$$\begin{aligned}x' &= x + p \\y' &= -y\end{aligned}$$

### 5.1.2 Vybrané shodnosti v $E_3$

## Posunutí (translace)

Posunutí určené vektorem  $\vec{p} = (p_1, p_2, p_3)$ :

$$\begin{aligned}x' &= x + p_1 \\y' &= y + p_2 \\z' &= z + p_3.\end{aligned}$$

## Otočení (rotace)

Otočení o úhel  $\alpha$  kolem osy  $z$ :

$$\begin{aligned}x' &= x \cos \alpha - y \sin \alpha \\y' &= x \sin \alpha + y \cos \alpha \\z' &= z.\end{aligned}$$

## Středová souměrnost

Souměrnost podle počátku  $O = (0, 0, 0)$ :

$$x' = -x$$

$$y' = -y$$

$$z' = -z.$$

## Osová souměrnost

Souměrnost podle osy  $z$ :

$$x' = -x$$

$$y' = -y$$

$$z' = z.$$

## Rovinová souměrnost

Souměrnost podle roviny  $(x, y)$ :

$$x' = x$$

$$y' = y$$

$$z' = -z.$$

## Šroubový pohyb

Šroubový pohyb (torze) s parametrem (redukovanou výškou závitů)  $v_0$  a s osou  $v$  ose  $z$ :

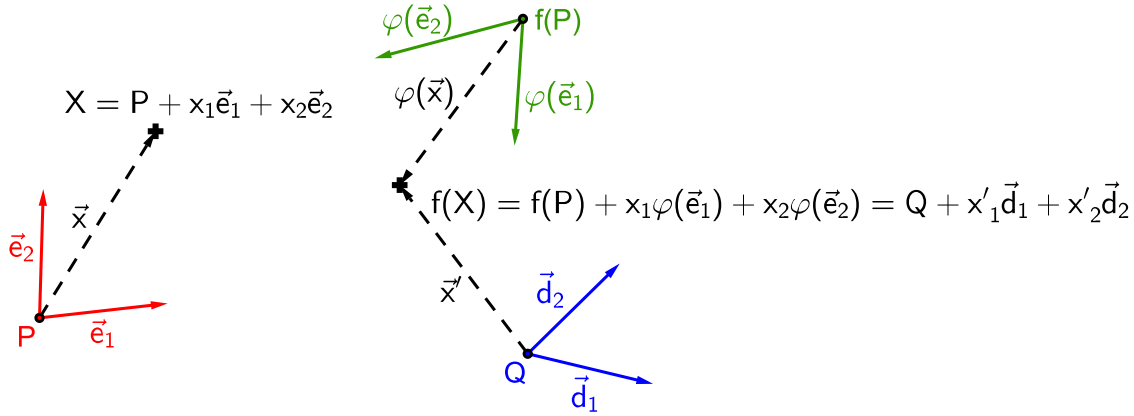
$$x' = x \cos \alpha - y \sin \alpha$$

$$y' = x \sin \alpha + y \cos \alpha$$

$$z' = z + v_0 \alpha.$$

## 5.2 Odvození rovnic afinity v rovině

Odvodíme si výše uvedené analytické vyjádření (34) afinního zobrazení  $f$  roviny na sebe (zkráceně „afinity“ v rovině). Základní myšlenka tohoto odvození je ilustrována Obr. 24. V rovině  $A_2$  máme dvě afinní soustavy souřadnic (repéry), „soustavu vzorů“  $\alpha = \{P; \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$  (je určena počátkem  $P$  a bází  $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$  vektorového zaměření prostoru  $A_2$ ) a „soustavu obrazů“  $\omega = \{Q; \vec{d}_1, \vec{d}_2\}$  (určena počátkem  $Q$  a bází  $\{\vec{d}_1, \vec{d}_2\}$  vektorového zaměření prostoru  $A_2$ ). Přitom repér  $\{P; \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$  se působením uvažované afinity  $f$  zobrazí na repér  $\{f(P); \varphi(\vec{e}_1), \varphi(\vec{e}_2)\}$ , kde  $\varphi$  homomorfismus (lineární zobrazení) asociovaný k  $f$ . Obrazem bodu  $X = [x_1, x_2]$  je bod  $f(X) = X' = [x'_1, x'_2]$ . Vztah mezi souřadnicemi  $f(X)$  a  $X$  najdeme tak, že bod  $f(X)$  vyjádříme vzhledem k oběma repérům  $\{Q; \vec{d}_1, \vec{d}_2\}$  a  $\{f(P); \varphi(\vec{e}_1), \varphi(\vec{e}_2)\}$  (viz Obr. 24) a tato vyjádření porovnáme.



Obrázek 24: Zobrazení bodu  $X$  v afinitě  $f$  v rovině

Nechť  $f$  je afinní zobrazení prostoru  $A_2$  na sebe a  $\varphi$  je homomorfismus asociovaný k  $f$ . Potom obrazy  $\varphi(\vec{e}_1), \varphi(\vec{e}_2)$  vektorů báze  $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$  můžeme vyjádřit rovnicemi

$$\varphi(\vec{e}_1) = a_{11}\vec{d}_1 + a_{21}\vec{d}_2, \quad (38)$$

$$\varphi(\vec{e}_2) = a_{12}\vec{d}_1 + a_{22}\vec{d}_2, \quad (39)$$

kde koeficienty  $a_{ij}$  jsou souřadnice vektorů  $\varphi(\vec{e}_1), \varphi(\vec{e}_2)$  vzhledem k bázi  $\{\vec{d}_1, \vec{d}_2\}$  a pro obraz  $f(P)$  počátku  $P$  repéru  $\alpha$  můžeme psát

$$f(P) = Q + b_1\vec{d}_1 + b_2\vec{d}_2, \quad (40)$$

kde  $[b_1, b_2]$  jsou jeho souřadnice vzhledem k repéru  $\omega$ .

Nyní určíme vztah mezi souřadnicemi libovolného bodu  $X \in A_2$  a jeho obrazu  $X' = f(X) \in A_2$ . Nejprve každý z těchto bodů zapíšeme v příslušném repéru, bod

$X$  v repéru  $\alpha$ , bod  $f(X)$  pak v repéru  $\omega$ ,

$$X = P + x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2, \quad (41)$$

$$f(X) = Q + x'_1\vec{d}_1 + x'_2\vec{d}_2. \quad (42)$$

Potom, s využitím vlastností zobrazení  $f$  a  $\varphi$ , zapíšeme obraz bodu  $X$  ve tvaru

$$f(X) = f(P + x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2) = f(P) + \varphi(x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2) = f(P) + x_1\varphi(\vec{e}_1) + x_2\varphi(\vec{e}_2).$$

Po dosazení z (38), (39) a (40) dostáváme

$$f(X) = Q + b_1\vec{d}_1 + b_2\vec{d}_2 + x_1(a_{11}\vec{d}_1 + a_{21}\vec{d}_2) + x_2(a_{12}\vec{d}_1 + a_{22}\vec{d}_2).$$

Po úpravě a porovnání koeficientů při  $\vec{d}_i$  s vyjádřením (42) dostáváme hledané rovnice afinity  $f$  v rovině

$$\begin{aligned} f : x'_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + b_1, \\ x'_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + b_2. \end{aligned} \quad (43)$$

Nyní ještě určíme rovnice asociovaného zobrazení  $\varphi$ . Nechť vektor  $\vec{u} \in V_2$  se zobrazí do vektoru  $\varphi(\vec{u}) \in V_2$ . Pro souřadnice vzoru  $\vec{u}$  a obrazu  $\varphi(\vec{u})$  platí

$$\vec{u} = u_1\vec{e}_1 + u_2\vec{e}_2, \quad (44)$$

$$\varphi(\vec{u}) = u'_1\vec{d}_1 + u'_2\vec{d}_2. \quad (45)$$

Na (44) aplikujeme zobrazení  $\varphi$  a upravíme dle (38) a (39). Dostaneme

$$\varphi(\vec{u}) = u_1\varphi(\vec{e}_1) + u_2\varphi(\vec{e}_2) = u_1(a_{11}\vec{d}_1 + a_{21}\vec{d}_2) + u_2(a_{12}\vec{d}_1 + a_{22}\vec{d}_2).$$

Po úpravě a srovnání s (45) dostaneme hledané rovnice asociovaného zobrazení  $\varphi$ :

$$\begin{aligned} \varphi : u'_1 &= a_{11}u_1 + a_{12}u_2, \\ u'_2 &= a_{21}u_1 + a_{22}u_2. \end{aligned} \quad (46)$$

Soustavu rovnic afinity v rovině (43) můžeme zapsat také pomocí matic, takto

$$\begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix},$$

stručněji pak ve tvaru

$$\mathbf{X}' = A \cdot \mathbf{X} + B.$$

### 5.3 Důkaz věty o určenosti afinity v rovině

**Věta 5** (O určenosti afinity v rovině). *Nechť  $K, L, M$  a  $K', L', M'$  jsou dvě skupiny nekolineárních bodů v rovině. Pak existuje jediná afinita  $f$  této roviny, která body  $K, L, M$  zobrazuje v daném pořadí na body  $K', L', M'$ .*

*Důkaz.* Využijeme (34). Afinita  $f$  musí být dána takovýmito rovnicemi. Ukážeme, že za podmínek uvedených ve větě je tato afinita určena jednoznačně, tj. existuje jediná šestice  $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, b_1, b_2$ , která tuto afinitu specifikuje.

Pro jednotlivé dvojice bodů „vzor  $\rightarrow$  obraz“ dostaneme následující rovnice:

$K[k_1, k_2] \rightarrow K'[k'_1, k'_2]$ :

$$a_{11}k_1 + a_{12}k_2 + b_1 = k'_1, \quad (47)$$

$$a_{21}k_1 + a_{22}k_2 + b_2 = k'_2. \quad (48)$$

$L[l_1, l_2] \rightarrow L'[l'_1, l'_2]$ :

$$a_{11}l_1 + a_{12}l_2 + b_1 = l'_1, \quad (49)$$

$$a_{21}l_1 + a_{22}l_2 + b_2 = l'_2. \quad (50)$$

$M[m_1, m_2] \rightarrow M'[m'_1, m'_2]$ :

$$a_{11}m_1 + a_{12}m_2 + b_1 = m'_1, \quad (51)$$

$$a_{21}m_1 + a_{22}m_2 + b_2 = m'_2. \quad (52)$$

Pro známé souřadnice bodů  $K, L, M, K', L', M'$  tak máme soustavu 6 rovnic o 6 neznámých  $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, b_1, b_2$ . Zajímá nás, za jakých podmínek má jediné řešení. Tyto podmínky by se měly shodovat s obsahem věty 5. Po detailním prozkoumání rovnic (47)–(52) je patrné, že jejich soustava se dá rozdělit na dvě vzájemně nezávislé soustavy 3 rovnic o 3 neznámých: soustavu rovnic (47), (49) a (51) o neznámých  $a_{11}, a_{12}, b_1$  a soustavu rovnic (48), (50) a (52) o neznámých  $a_{21}, a_{22}, b_2$ . Přitom první z těchto soustav má rozšířenou matici

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} k_1 & k_2 & 1 & k'_1 \\ l_1 & l_2 & 1 & l'_1 \\ m_1 & m_2 & 1 & m'_1 \end{array} \right], \quad (53)$$

druhá má potom rozšířenou matici

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} k_1 & k_2 & 1 & k'_2 \\ l_1 & l_2 & 1 & l'_2 \\ m_1 & m_2 & 1 & m'_2 \end{array} \right]. \quad (54)$$

Soustavy se tedy shodují v matici soustavy (liší se pouze vektory pravých stran). Aby měly obě soustavy jediné řešení, musí být determinant této matice různý od nuly, tj.

$$\begin{vmatrix} k_1 & k_2 & 1 \\ l_1 & l_2 & 1 \\ m_1 & m_2 & 1 \end{vmatrix} \neq 0. \quad (55)$$

Determinant v (55) snadno spočítáme eliminací jedniček na pozicích (2, 3) a (3, 3) postupným odečtením prvního řádku od druhého a třetího řádku a následným rozvojem takto upraveného determinantu podle třetího sloupce. Dostaneme tak podmínku

$$\begin{vmatrix} l_1 - k_1 & l_2 - k_2 \\ m_1 - k_1 & m_2 - k_2 \end{vmatrix} \neq 0, \quad (56)$$

která je splněna právě tehdy, když jsou vektory  $L - K$  a  $M - K$  nezávislé, tj. body  $K, L, M$  neleží v přímce.

Teď zbývá dokázat, že když body  $K, L, M$  neleží v přímce, ani body  $K', L', M'$  nemohou ležet v přímce. Tentokrát využijeme maticovou rovnici afinity  $X' = A \cdot X + B$ . Pro uvedené dvojice bodů platí:

$$K' = A \cdot K + B, \quad (57)$$

$$L' = A \cdot L + B, \quad (58)$$

$$M' = A \cdot M + B. \quad (59)$$

Důkaz provedeme sporem. Předpokládáme, že  $K, L, M$  neleží v přímce a zároveň body  $K', L', M'$  leží v přímce. Potom existuje  $j \in R$  takové, že  $L' - K' = j(M' - K')$ . Po dosazení z (57)–(59) a vynásobení obou stran rovnice zleva maticí inverzní k  $A$  dostaneme  $L - K = j(M - K)$ , což je spor s předpokladem nekolineárnosti bodů  $K, L, M$ . Body  $K', L', M'$  tedy také nemohou ležet v přímce.

□

## 5.4 Modul afinity

Protože afinita prostoru  $A_n$  je zobrazení vzájemně jednoznačné, pro determinant afinity dané rovnicemi (31) platí

$$\delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Tento determinant se nazývá **modulem afinity**. Dá se ukázat, že modul afinity nezávisí na volbě báze uvažovaného prostoru.

Nyní se budeme zabývat vlastností modulu afinity, která je metrická, tj. závislá na existenci skalárního součinu. Proto se v dalším omezíme ve svých úvahách na eukleidovské prostory, přesněji na  $E_3$  a  $E_2$ .

**PŘÍKLAD 5.10.** *Určete afinitu v  $A_2$ , je-li obrazem bodu  $B = [6; -2]$  bod  $B' = [1; 1]$ , obrazem vektoru  $\vec{u} = (2; 1)$  vektor  $\vec{u}' = (4; 2)$  a vektoru  $\vec{v} = (-1; 2)$  vektor  $\vec{v}' = (-3; 6)$ . Porovnejte obsahy trojúhelníků  $BCD$  a  $B'C'D'$ , kde  $C = B + \vec{u}$ ,  $D = B + \vec{v}$  a  $C' = B' + \vec{u}'$ ,  $D' = B' + \vec{v}'$ .*

**Věta 6.** *Nechť  $f$  je afinita v prostoru  $E_3$  (resp.  $E_2$ ), která má modul  $\delta$ . Nechť  $U$  je měřitelný útvar v  $E_3$  (resp.  $E_2$ ), který má objem  $V$  (resp. obsah  $V$ ). Nechť obrazem útvaru  $U$  v afinitě  $f$  je útvar  $U'$ , který má objem  $V'$  (resp. obsah  $V'$ ). Potom platí*

$$V' = |\delta| \cdot V. \quad (60)$$

*Důkaz.* Míra měřitelných útvarů v  $E_3$  (resp.  $E_2$ ) je definována pomocí rovnoběžnostěn (resp. rovnoběžníků). Proto se v důkazu omezíme na afinní zobrazení rovnoběžnostěn v  $E_3$  a rovnoběžníků v  $E_2$ . Nechť v  $E_3$  je rovnoběžnostěn určen trojicí nezávislých vektorů  $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ , které mají ve zvolené bázi souřadnice  $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ ,  $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ ,  $\vec{w} = (w_1, w_2, w_3)$ . Obrazy těchto vektorů v zobrazení  $\varphi$  asociovaném k afinitě  $f$  označme  $\vec{u}' = \varphi(\vec{u})$ ,  $\vec{v}' = \varphi(\vec{v})$ ,  $\vec{w}' = \varphi(\vec{w})$  a jejich souřadnice  $\vec{u}' = (u'_1, u'_2, u'_3)$ ,  $\vec{v}' = (v'_1, v'_2, v'_3)$ ,  $\vec{w}' = (w'_1, w'_2, w'_3)$ . V afinitě  $f$  a zobrazení  $\varphi$  platí dle vztahu (32)

$$u'_i = \sum_{j=1}^3 a_{ij}u_j, \quad v'_i = \sum_{j=1}^3 a_{ij}v_j, \quad w'_i = \sum_{j=1}^3 a_{ij}w_j; \quad i = 1, 2, 3. \quad (61)$$

Objem  $V'$  zobrazeného rovnoběžnostěnu  $U'$  určíme známým vztahem smíšeného součinu, stejně tak objem  $V$  rovnoběžnostěnu  $U$ :

$$V' = \begin{vmatrix} u'_1 & u'_2 & u'_3 \\ v'_1 & v'_2 & v'_3 \\ w'_1 & w'_2 & w'_3 \end{vmatrix}, \quad V = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}. \quad (62)$$

Dosazením (61) dostaneme

$$V' = \begin{vmatrix} \sum_{j=1}^3 a_{1j}u_j & \sum_{j=1}^3 a_{2j}u_j & \sum_{j=1}^3 a_{3j}u_j \\ \sum_{j=1}^3 a_{1j}v_j & \sum_{j=1}^3 a_{2j}v_j & \sum_{j=1}^3 a_{3j}v_j \\ \sum_{j=1}^3 a_{1j}w_j & \sum_{j=1}^3 a_{2j}w_j & \sum_{j=1}^3 a_{3j}w_j \end{vmatrix}, \quad (63)$$

což lze zapsat součinem

$$V' = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} \quad (64)$$

a tedy

$$V' = \delta \cdot V. \quad (65)$$

Pokud je  $\delta < 0$ , pak lze znaménko minus vytknout, tj.  $V' = -\delta \cdot (-V)$ . Ve druhém determinantu pak zaměníme pořadí sousedních řádků, např. prvního a druhého. Pro obsahy vzoru a obrazu měřitelného útvaru v  $E_2$  zřejmě stačí, uvážíme-li obsah  $V$  libovolně zvoleného rovnoběžníka určeného lineárně nezávislými body  $M, N, P$  a jeho obrazu v dané afinitě určeného body  $M', N', P'$ .  $\square$

## 5.5 Afinita přímá a nepřímá, ekviafinita

**Definice 16.** Je-li modul afinity kladný, nazývá se „afinita přímá“. Afinita se záporným modulem se nazývá „nepřímá“. Afinita, jejíž modul se rovná v absolutní hodnotě jedné, se nazývá ekviafinita, stručně „ekviafinita“.

**PŘÍKLAD 5.11.** Určete rovnice a modul afinity  $f : E_3 \rightarrow E_3$ , v níž se body  $K[0, 0, 0]$ ,  $L[1, 4, 0]$ ,  $M[-1, 0, 6]$ ,  $N[4, 5, 8]$  zobrazí na body  $K'[1, 1, 1]$ ,  $L'[-2, 9, 6]$ ,  $M'[0, -5, 12]$ ,  $N'[0, 3, 26]$ . Rozhodněte, zda se jedná o afinitu přímou či nepřímou a zda je to ekviafinita.

Řešení v programu wxMaxima:

```
(%i25) r1:b1=1; r2:b2=1; r3:b3=1; r4:a11+4*a12+b1=-2; r5:a21+4*a22+b2=9;
r6:a31+4*a32+b3=6; r7:-a11+6*a13+b1=0; r8:-a21+6*a23+b2=-5;
r9:-a31+6*a33+b3=12; r10:4*a11+5*a12+8*a13+b1=0;
r11:4*a21+5*a22+8*a23+b2=3; r12:4*a31+5*a32+8*a33+b3=26;
```

```
(%o25) b1 = 1
```

```
(%o26) b2 = 1
```

```
(%o27) b3 = 1
```

```
(%o28) b1 + 4 a12 + a11 = -2
```

```
(%o29) b2 + 4 a22 + a21 = 9
```

```
(%o30) b3 + 4 a32 + a31 = 6
```

```
(%o31) b1 + 6 a13 - a11 = 0
```



$$(\%o32) \quad b_2 + 6a_{23} - a_{21} = -5$$

$$(\%o33) \quad b_3 + 6a_{33} - a_{31} = 12$$

$$(\%o34) \quad b_1 + 8a_{13} + 5a_{12} + 4a_{11} = 0$$

$$(\%o35) \quad b_2 + 8a_{23} + 5a_{22} + 4a_{21} = 3$$

$$(\%o36) \quad b_3 + 8a_{33} + 5a_{32} + 4a_{31} = 26$$

```
(%i37) res:solve([r1,r2,r3,r4,r5,r6,r7,r8,r9,r10,r11,r12],  
[a11,a12,a13,a21,a22,a23,a31,a32,a33,b1,b2,b3])[1];
```

$$(\%o37) \quad [a_{11} = 1, a_{12} = -1, a_{13} = 0, a_{21} = 0, a_{22} = 2, a_{23} = -1, a_{31} = 1, a_{32} = 1, a_{33} = 2, b_1 = 1, b_2 = 1, b_3 = 1]$$

```
(%i38) ev([x1=a11*x+a12*y+a13*z+b1,y1=a21*x+a22*y+a23*z+b2,  
z1=a31*x+a32*y+a33*z+b3],res);
```

$$(\%o38) \quad [x_1 = -y + x + 1, y_1 = -z + 2y + 1, z_1 = 2z + y + x + 1]$$

```
(%i40) A:ev(matrix([a11,a12,a13],[a21,a22,a23],[a31,a32,a33]),res);
```

$$(\%o40) \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

```
(%i42) determinant(A);
```

$$(\%o42) \quad 6$$

## 5.6 Cvičení – Afnita

3. Uveďte maticové zápisy následujících transformací:

a) středová souměrnost se středem v počátku,

b) středová souměrnost se středem v bodě  $[5, 10]$ ,

c) osová souměrnost podle souřadnicové osy  $x$ ,

d) stejnolehlost se středem v počátku soustavy souřadnic a s koeficientem  $\kappa = 2$ ,

e) stejnolehlost se středem v počátku soustavy souřadnic a s koeficientem  $\kappa = \frac{-1}{2}$ .

Využijte applet na GeoGebraTube: [tube.geogebra.org/student/mUcqV9uT](http://tube.geogebra.org/student/mUcqV9uT)

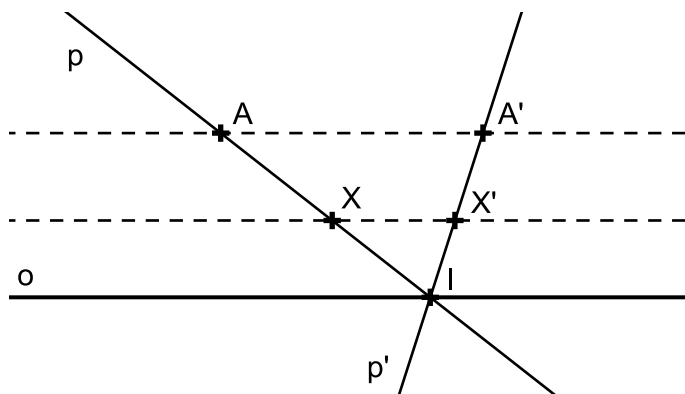
## 6 Osová afinita

Určení osové afinity. Charakteristika a rovnice osové afinity. Elace. Základní afinity. Involuce.

### 6.1 Základní afinity

„Základními afinitami“ nazýváme afinity, jejichž všechny samodružné body tvoří nadrovinu prostoru  $A_n$ . Příklady základních afinit jsou „osová afinita v  $A_2$ “, „osová souměrnost v  $E_2$ “ nebo „rovinová souměrnost v  $E_3$ “.

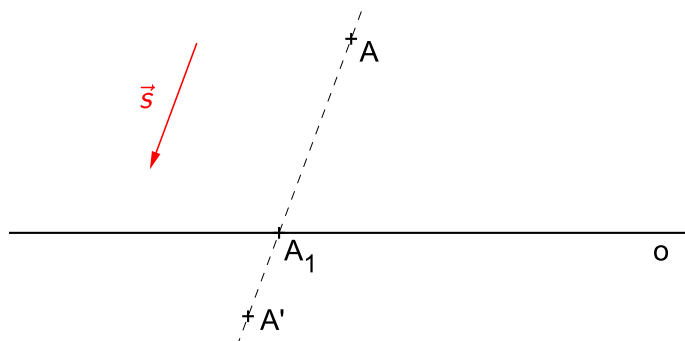
Základní afinita taková, že přímka spojující vzor a obraz je rovnoběžná s nadrovinou samodružných bodů, se nazývá „elace“.



Obrázek 25: Osová afinita v rovině, jejíž směr je rovnoběžný s její osou, jako příklad elace

### 6.2 Osová afinita v rovině

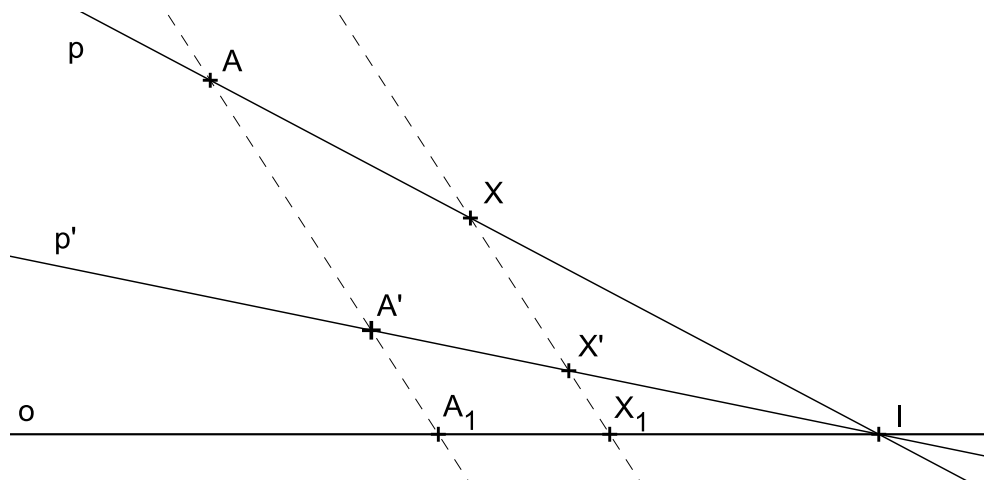
Osová afinita je určena osou  $o$ , směrem  $\vec{s}$  a charakteristikou  $\kappa$ . Směr a charakteristika jsou většinou zadány dvojicí sobě odpovídajících bodů  $A, A'$ , viz Obr. 26.



Obrázek 26: Určení osové afinity;  $AA' \parallel \vec{s}$ ,  $\kappa = (A'AA_1)$

**PŘÍKLAD 6.1.** V osové afinitě určené osou  $o$  a dvojicí sobě odpovídajících bodů  $A, A'$  zobrazte bod  $X$  a přímku  $p$ .

*Řešení:* Viz Obr. 27.



Obrázek 27: Osová afinita v rovině, řešení příkladu 6.1

Při určení obrazu bodu a přímky využijeme následující **vlastnosti osové afinity**:

- (1) Přímka spojující sobě odpovídající body je rovnoběžná se směrem afinity.
- (2) Sobě odpovídající přímky se protínají na ose afinity.
- (3) Incidence se zachovává, tj. leží-li bod  $A$  na přímce  $p$  ( $A \in p$ ), leží jeho obraz  $A'$  na obrazu  $p'$  přímky  $p$  ( $A' \in p'$ ).
- (4) Osa afinity a přímky rovnoběžné se směrem afinity jsou samodružnými přímkami.

Postupujeme tak, že sestrojíme přímku  $p = \overleftrightarrow{AX}$  a určíme její průsečík  $I$  s osou afinity  $o$ . Z vlastnosti (2) vyplývá, že přímka  $p'$ , která je obrazem přímky  $p$ , také prochází bodem  $I$ . Z vlastnosti (3) pak plyne, že  $p'$  prochází rovněž bodem  $A'$ . Sestrojíme tedy přímku  $p' = \overleftrightarrow{A'I}$ . Obraz bodu  $X$ , bod  $X'$ , pak určíme podle vlastnosti (1) jako průsečík  $p'$  s přímkou jdoucí bodem  $X$  rovnoběžně s  $\overleftrightarrow{AA'}$ .

### Charakteristika osové afinity

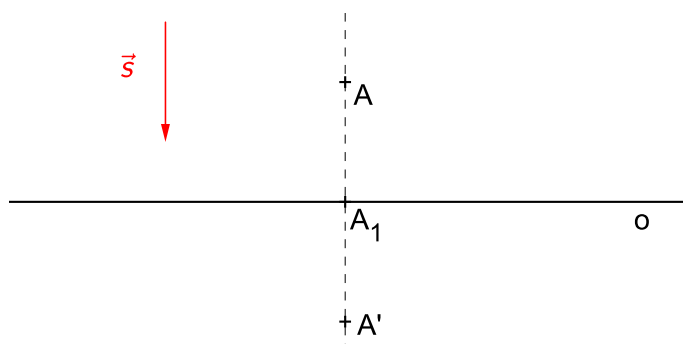
Charakteristikou osové afinity<sup>10</sup>  $\kappa$  rozumíme dělicí poměr

$$(A'AA_1) = \kappa,$$

<sup>10</sup>Charakteristiku přiřazujeme každé základní afinitě, která není elací. Platí  $\kappa = (X'XX_1)$ , kde  $X_1$  je průsečík  $\overleftrightarrow{XX'}$  s nadrovinou samodružných bodů uvažované základní afinity.

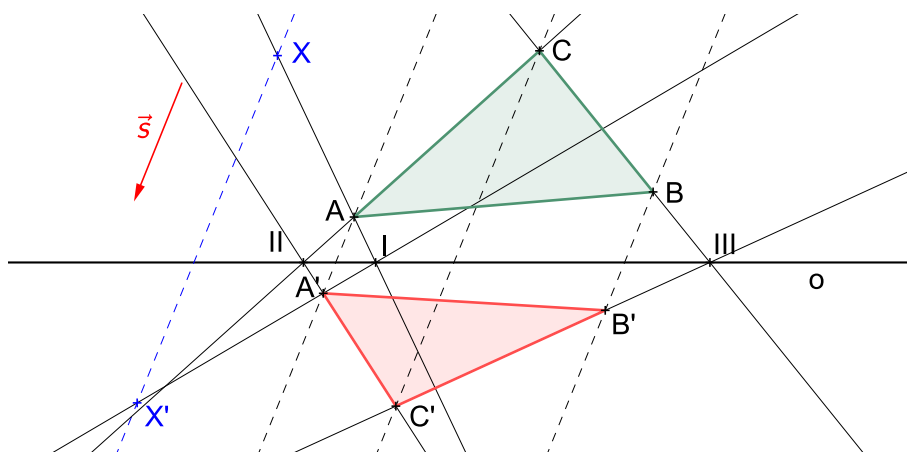
kde body  $A, A'$  jsou ve vztahu „vzor a obraz“ a bod  $A_1$  je průsečík přímky  $AA'$  s osou afinity  $o$ , viz Obr. 27. Jak vyplývá mimo jiné z věty 9, charakteristika osové afinity je rovna jejímu modulu, proto se  $\kappa$  nazývá také *modul osové afinity*.

**Poznámka.** *Osová souměrnost v rovině je zvláštním případem osové afinity, jejíž směr  $\vec{s}$  je kolmý na osu  $o$  ( $\vec{s} \perp o$ ) a jejíž charakteristika  $\kappa$  je rovna  $-1$  ( $\kappa = -1$ ), viz Obr. 28.*



Obrázek 28: Osová souměrnost jako osová afinita

**PŘÍKLAD 6.2.** *Je dána přímka  $o$ , trojúhelník  $ABC$  a dvojice bodů  $X, X'$ . Sestrojte obraz  $A'B'C'$  trojúhelníka  $ABC$  v osové afinitě s osou  $o$ , v níž je obrazem bodu  $X$  bod  $X'$ .*



Obrázek 29: Obraz trojúhelníku  $ABC$  v osové afinitě dle zadání příkladu 6.2

**Věta 7.** *Rovnoběžné přímky  $a \parallel b$  se v osové afinitě zobrazí opět na rovnoběžné přímky  $a' \parallel b'$ .*

*Důkaz.* Důkaz provedeme sporem. Předpokládáme, že obrazy rovnoběžných přímek jsou různoběžky. Dostaneme se do sporu s definicí charakteristiky afinity.  $\square$

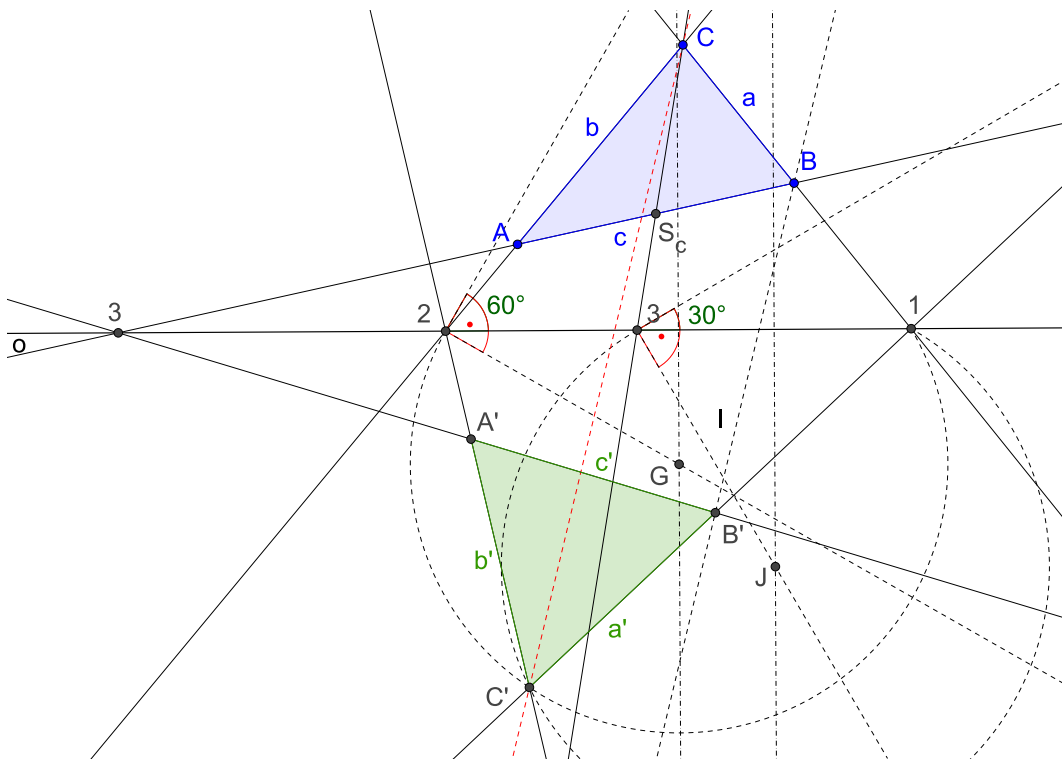
**Věta 8.** Dělicí poměr se v osově afinitě zachovává, tj.  $(ABC) = (A'B'C')$ .

Důsledky věty 8:

- 1) Střed úsečky se zobrazí zase na střed úsečky.
- 2) Zachovává se uspořádání bodů na přímce.

**PŘÍKLAD 6.3.** Je dána přímka  $o$  a trojúhelník  $ABC$ . Sestrojte obraz  $A'B'C'$  trojúhelníka  $ABC$  v takové osově afinitě s osou  $o$ , aby byl trojúhelník  $A'B'C'$  rovnostranný.

(Postup konstrukce viz <http://tube.geogebra.org/student/mni2IYH1c>)



Obrázek 30: Rovnostranný trojúhelník  $A'B'C'$  jako obraz trojúhelníku  $ABC$  v osově afinitě

### Rovnice osově afinity s osou v souřadnicové ose $x$

Odvodíme si rovnice osově afinity  $f : X[x, y] \rightarrow X'[x', y']$ , která je dána osou  $o : y = 0$  a dvojicí bodů  $A[a, b]$  a  $A'[a', b']$ . Pro průsečík  $A_1[a_1, b_1]$  přímky  $\overrightarrow{AA'}$  s osou  $o$  (tj. s osou  $x$ ) potom platí  $(A'AA_1) = \kappa$ , viz Obr. 31. Využijeme následující dvě skutečnosti: (1)  $X'XX_1 = \kappa$ , (2)  $X_1 \in o$ .

ad (1)  $X'XX_1 = \kappa$

Platí  $X' = (1 - \kappa)X_1 + \kappa X$ . Po dosazení souřadnic bodů  $X[x, y]$ ,  $X'[x', y']$ ,  $X_1[x_1, y_1]$  dostaneme rovnice

$$\begin{aligned}x' &= (1 - \kappa)x_1 + \kappa x, \\y' &= (1 - \kappa)y_1 + \kappa y.\end{aligned}\tag{66}$$

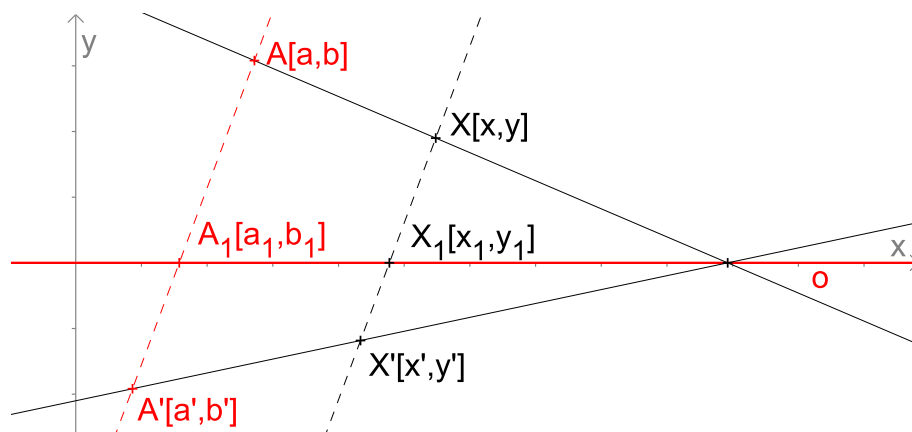
ad (2)  $X_1 \in o$

Platí  $X_1 = X + k(A' - A)$ ;  $k \in R$ . Po dosazení souřadnic  $X[x, y]$ ,  $X_1[x_1, 0]$ ,  $A[a, b]$ ,  $A'[a', b']$  dostaneme rovnice

$$\begin{aligned}x_1 &= x + k(a' - a), \\y_1 &= y + k(b' - b).\end{aligned}$$

Protože  $y_1 = 0$  dostáváme  $k = -\frac{y}{b' - b}$  a následně  $x_1 = x - y\frac{a' - a}{b' - b}$ . Po dosazení za  $x_1$  a  $y_1$  do rovnic 67 dostaneme rovnice uvažované osové afinity:

$$\begin{aligned}x' &= x - (1 - \kappa)\frac{a' - a}{b' - b}y, \\y' &= \kappa y.\end{aligned}\tag{67}$$



Obrázek 31: Osová afinita s osou  $o : y = 0$

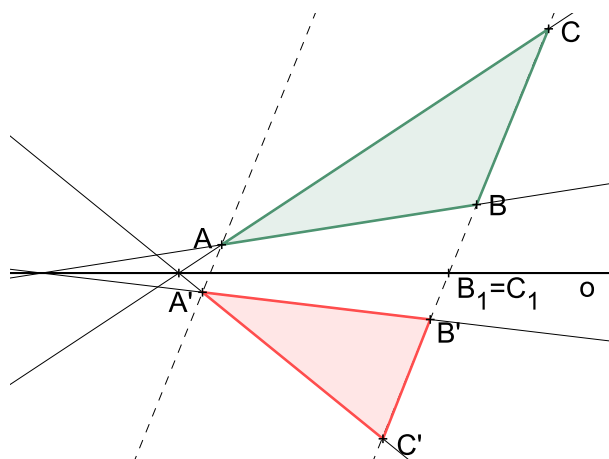
Z rovnic (67) je zřejmé, že matice uvažované osové afinity je  $A = \begin{bmatrix} 1 & (\kappa - 1)\frac{a' - a}{b' - b} \\ 0 & \kappa \end{bmatrix}$

a modul této afinity je potom  $\det A = \kappa$ <sup>11</sup>.

<sup>11</sup>Tato rovnost charakteristiky osové afinity a jejího modulu je na příkladu zobrazení trojúhelníku znázorněna v GeoGebra apletu <https://www.geogebra.org/m/NfpQdnsH>

**Věta 9.** *Nechť  $P$  je obsah trojúhelníka  $ABC$  a  $P'$  obsah jeho obrazu  $A'B'C'$  v osově afinitě s charakteristikou  $\kappa$ . Potom  $P' = |\kappa| \cdot P$ .*

*Důkaz.* Dokažte nejprve pro speciální případ, kdy je jedna strana trojúhelníku rovnoběžná se směrem afinity, viz Obr. 32. Potom využijte k důkazu vztahu pro libovolný trojúhelník. □



Obrázek 32: Vypočítejte poměr obsahů trojúhelníků  $A'B'C'$  a  $ABC$

Z výše uvedených vět 7, 8, 9 plyne, že osová afinita má následující invarianty.

### Invarianty osově afinity

- (1) Rovnoběžnost přímek.
- (2) Dělicí poměr.
- (3) Poměr obsahu obrazců.

### Základní afinita jako involuce

„Involutorní zobrazení“, též „involuce“, je každé zobrazení afinního bodového prostoru na sebe, které není identitou, ale složeno samo se sebou je identitě rovno.

Základní afinita je involucí tehdy, když není elací a její charakteristika je rovna  $-1$ .

### 6.3 Cvičení – Osová afinita

1. Pomocí výsledku Příkladu 6.3 dokažte tvrzení: *Těžnice trojúhelníka se protínají v jednom bodě, který je dělí v poměru 1 : 2.*
2. Dokažte Větu 9.

## 7 Samodružné body a směry afinity

Samodružnými body a směry zobrazení rozumíme body a směry, které se v zobrazují samy na sebe. Například otočení  $\mathcal{R}(S)$  má jediný samodružný bod, střed  $S$ , a nemá žádný samodružný směr. Osová souměrnost  $\mathcal{O}(o)$  má celou přímku samodružných bodů, osu  $o$ , a dva samodružné směry, jeden rovnoběžný s osou  $o$ , druhý kolmý na  $o$  (přímky těchto směrů se zobrazí na přímky s nimi rovnoběžné nebo totožné, tj. zobrazí se na přímky se stejnými směrovými vektory). Stejnolehlost  $\mathcal{H}(S, \kappa)$  má jediný samodružný bod, střed  $S$ , ale má všechny směry samodružné (tj. každá přímka se zobrazí na přímku s ní rovnoběžnou).

Samodružné prvky má smysl uvažovat jenom v případě, že se uvažovaný bodový prostor (v případě směrů pak jemu příslušející vektorový prostor, tj. zaměření) zobrazuje „do sebe“. Nadále se omezíme pouze na afinity (ty jsou dokonce zobrazeními uvažovaného prostoru „na sebe“).

### 7.1 Samodružné body

Samodružným bodem (afinity) zobrazení rozumíme bod, který se zobrazí sám na sebe, tj. pro jeho souřadnice platí  $X' = X$ . Po dosazení do maticové rovnice afinity  $\mathbf{X}' = A \cdot \mathbf{X} + B$  tak dostaneme

$$X = A \cdot X + B,$$

po úpravě

$$(I - A) \cdot X = B, \tag{68}$$

kde  $I$  je jednotková matice stejného řádu jako  $A$ . Za rovnicí (68) se skrývá nehomogenní soustava  $n$  rovnic o  $n$  neznámých  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , souřadnicích hledaných samodružných bodů. Z teorie řešitelnosti soustav lineárních rovnic víme, že řešením může být jedna, žádná nebo nekonečně mnoho uspořádaných  $n$ -tic  $[x_1, x_2, \dots, x_n]$ , tj. jeden, žádný nebo nekonečně mnoho samodružných bodů. Množina řešení, tj. množina samodružných bodů uvažované afinity, má přitom charakter afinního bodového podprostoru (bod, přímka, rovina, ...).

Výpočet souřadnic samodružného bodu si ilustrujeme na příkladu afinity v rovině. Pokud do rovnic (34) dosadíme  $x' = x$  a  $y' = y$  je zřejmé, že souřadnice samodružných bodů příslušné afinity jsou řešením soustavy rovnic

$$\begin{aligned} (1 - a_{11})x_1 - a_{12}x_2 &= b_1 \\ -a_{21}x_1 + (1 - a_{22})x_2 &= b_2. \end{aligned} \tag{69}$$



**PŘÍKLAD 7.1.** Určete samodružné body afinity dané rovnicemi

$$\begin{aligned}x' &= -x + 4, \\y' &= -y - 6.\end{aligned}$$

*Řešení:* Dosazením  $x'$  za  $x$  a  $y'$  za  $y$  do daných rovnic dostaneme soustavu

$$\begin{aligned}2x &= 4, \\2y &= -6,\end{aligned}$$

kteřá má jediné řešení  $[x, y] = [2, -3]$ . Daná afinita má tedy jediný samodružný bod  $S = [2, -3]$ .

**Poznámka.** Protože  $A^T \cdot A = I$ , kde  $I$  je jednotková matice, jedná se o shodnost. V úvahu tak připadá otočení nebo středová souměrnost. O tom, které z nich to je, rozhodnou samodružné směry.

**PŘÍKLAD 7.2.** Určete samodružné body afinity dané rovnicemi

$$\begin{aligned}x' &= x, \\y' &= -y.\end{aligned}$$

*Řešení:* Dosazením  $x'$  za  $x$  a  $y'$  za  $y$  do daných rovnic dostaneme soustavu

$$\begin{aligned}0x &= 0, \\2y &= 0,\end{aligned}$$

kteřá má tentokrát nekonečně mnoho řešení. Jsou jimi všechny uspořádané dvojice ve tvaru  $[x, 0]$ ;  $x \in \mathbb{R}$ . Jedná se tedy o afinitu jejíž všechny samodružné body leží v přímce o rovnici  $y = 0$ .

**Poznámka.** Protože opět platí  $A^T \cdot A = I$ , je to shodnost. V úvahu teď připadá jediná možnost, osová souměrnost s osou v souřadnicové ose  $x$ .

## 7.2 Samodružné směry

Samodružným směrem rozumíme směr, který se v (afinním) zobrazení zobrazí sám na sebe. Pro vyjádření směru používáme vektor, např.  $\vec{u}$ , říkáme mu „reprezentant“ tohoto směru (takovým reprezentantem pak může být každý jeho násobek). Má-li být směr určený vektorem  $\vec{u}$  samodružný, musí pro vektor  $\vec{u}'$ , který je obrazem  $\vec{u}$ , platit  $\vec{u}' = \lambda\vec{u}$ , kde  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

**Poznámka.** „Směrem“ rozumíme množinu všech vektorů  $k\vec{u}$ ;  $k \in R$  vektoru  $\vec{u} \neq \vec{o}$ , tj. jednorozměrný vektorový prostor  $[\vec{u}]$ . Vektor  $\vec{u}$  nazýváme „reprezentantem“ tohoto směru. Pokud chceme zohlednit orientaci, použijeme „orientovaný směr“, tj. množinu všech vektorů  $k\vec{u}$ , kde ale  $k \in \langle 0, \infty \rangle$ .

Víme, že zobrazení mezi vektory z vektorového prostoru, který je zaměřením afinního bodového prostoru, v němž operuje uvažovaná afinita (obecně však toto zobrazení probíhá mezi různými zaměřenými různými bodovými prostory), zajišťuje tzv. „asociovaný homomorfismus“ (též „lineární zobrazení“), viz definice 14 na str. 14<sup>1</sup>.

Po dosazení do maticové rovnice asociovaného homomorfismu  $\vec{u}' = A \cdot \vec{u}$  tak dostaneme

$$\lambda\vec{u} = A \cdot \vec{u},$$

po úpravě

$$(\lambda I - A) \cdot \vec{u} = \vec{o}, \quad (71)$$

kde  $I$  je jednotková matice stejného řádu jako  $A$  a vektor  $\vec{u}$  je sloupcový (aby bylo definováno násobení  $A \cdot \vec{u}$ ).

### Charakteristická rovnice, vlastní číslo, vlastní vektor

Za rovnicí (71) se skrývá homogenní soustava  $n$  rovnic o  $n$  neznámých  $u_1, u_2, \dots, u_n$ , souřadnicích reprezentanta hledaného samodružného směru. Z teorie řešitelnosti homogenních soustav lineárních rovnic víme, že řešením může být buď jenom nulový vektor  $\vec{o}$ , hovoříme o „triviálním řešení“, nebo je řešením nekonečně mnoho vektorů, které tvoří vektorový podprostor. Nenulové vektory z tohoto prostoru řešení nazýváme „netriviální řešení“. Protože nulový vektor neurčuje žádný směr, zajímají nás při vyšetřování samodružných směrů pouze netriviální řešení homogenní soustavy (71). Homogenní soustava lineárních rovnic má i netriviální řešení (triviální má vždycky) právě tehdy, když je matice soustavy singulární, tj. její determinant je roven nule. Afinita  $X' = A \cdot X + B$  má proto samodružné body právě tehdy, když

$$|\lambda I - A| = 0. \quad (72)$$

---

<sup>1</sup>Zobrazení  $\varphi$  vektorového prostoru  $V$  do vektorového prostoru  $V'$  se nazývá homomorfismus (lineární zobrazení), jestliže pro všechna  $\vec{u}, \vec{v} \in V, k \in \mathbb{T}$  (místo obecného tělesa  $\mathbb{T}$  můžeme uvažovat  $\mathbb{R}$ ) platí:

$$\begin{aligned} (1) \quad \varphi(\vec{u} + \vec{v}) &= \varphi(\vec{u}) + \varphi(\vec{v}), \\ (2) \quad \varphi(k\vec{u}) &= k\varphi(\vec{u}). \end{aligned}$$

Uvažujme afinitu  $f$  prostoru  $E_n$ . Potom „asociovaným (tj. jednoznačně přiřazeným) homomorfismem“ afinity  $f$  rozumíme lineární zobrazení  $\varphi$ , které zobrazuje zaměření  $V_n$  prostoru  $E_n$  do sebe takto:

$$\vec{u} = Y - X \Rightarrow \varphi(\vec{u}) = f(Y) - f(X), \quad (70)$$

kde  $X, Y$  a  $f(X), f(Y)$  jsou body z  $E_2, \vec{u}, \varphi(\vec{u}) \in V_2$ .

Rovnici (72) říkáme „charakteristická rovnice“ příslušného homomorfismu  $\varphi$ . Jedná se o algebraickou rovnici  $n$ -tého stupně pro neznámou  $\lambda$ . Každé číslo  $\lambda$ , které je řešením této charakteristické rovnice, pak nazýváme „vlastní číslo“ homomorfismu  $\varphi$ . Každý vektor  $\vec{u}$ , pro který platí  $\vec{u}' = \varphi(\vec{u}) = \lambda\vec{u}$ , nazýváme „vlastním vektorem“ homomorfismu  $\varphi$  (příslušnou hodnotu  $\lambda$  pak nazýváme „vlastní číslo homomorfismu  $\varphi$ , odpovídající vektoru  $\vec{u}$ “). Místo vlastní vektor a vlastní číslo se také používají termíny „charakteristický vektor“ a „charakteristické číslo“.

Výpočet samodružných směrů si ilustrujeme na příkladu afinity v rovině. Asociovaný homomorfismus  $\varphi$  afinity  $f$  je v tomto případě dán soustavou

$$\begin{aligned}\varphi : u'_1 &= a_{11}u_1 + a_{12}u_2 \\ u'_2 &= a_{21}u_1 + a_{22}u_2,\end{aligned}$$

maticově pak

$$\varphi : \begin{bmatrix} u'_1 \\ u'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix},$$

což lze zapsat ve tvaru

$$\varphi : \vec{u}' = A \cdot \vec{u}. \quad (73)$$

Samodružný směr afinity (tj. vektory těchto směrů, pro které platí  $\vec{u}' = \lambda\vec{u}$ ) jsou potom „ netriviálním“ řešením homogenní soustavy rovnic

$$\begin{aligned}(\lambda - a_{11})u_1 - a_{12}u_2 &= 0 \\ -a_{21}u_1 + (\lambda - a_{22})u_2 &= 0.\end{aligned} \quad (74)$$

Homogenní soustava  $n$  lineárních rovnic o  $n$  neznámých má netriviální řešení právě tehdy, když je determinant soustavy roven nule. Soustava (73) má tedy nekonečně mnoho řešení právě tehdy, když platí rovnost

$$\begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} \end{vmatrix} = 0. \quad (75)$$

Postup určení samodružných směrů afinity v rovině si nyní budeme ilustrovat na zobrazeních použitých v příkladech 7.1 a 7.2.

**PŘÍKLAD 7.3.** Určete samodružné směry afinity dané rovnicemi

$$\begin{aligned}x' &= -x + 4, \\y' &= -y - 6.\end{aligned}$$

*Řešení:* Řešíme homogenní soustavu

$$\begin{aligned}(\lambda + 1)u_1 &= 0, \\(\lambda + 1)u_2 &= 0,\end{aligned}$$

které přísluší charakteristická rovnice

$$\begin{vmatrix}(\lambda + 1) & 0 \\ 0 & (\lambda + 1)\end{vmatrix} = 0,$$

po úpravě ve tvaru

$$(\lambda + 1)^2 = 0.$$

Jejím jediným řešením je vlastní číslo  $\lambda = -1$ , které dosadíme do příslušné homogenní soustavy, abychom dostali soustavu rovnic

$$\begin{aligned}0u_1 &= 0, \\0u_2 &= 0,\end{aligned}$$

jejímž řešením je každý vektor  $\vec{v} = (u_1, u_2) \in R \times R$ .

Vyšetřovaná afinita má tedy všechny směry samodružné.

**Poznámka.** Vzhledem k tomu, že z řešení příkladu 7.1 víme, že daná afinita je shodností a má jediný samodružný bod  $S = [2, -3]$ , po zjištění, že má všechny směry samodružné, je možno učinit závěr, že se jedná o středovou souměrnost se středem  $S$ .

**PŘÍKLAD 7.4.** Určete samodružné směry afinity dané rovnicemi

$$\begin{aligned}x' &= x, \\y' &= -y.\end{aligned}$$

*Řešení:* Řešíme homogenní soustavu

$$\begin{aligned}(\lambda - 1)u_1 &= 0, \\(\lambda + 1)u_2 &= 0,\end{aligned}$$

které přísluší charakteristická rovnice

$$\begin{vmatrix} (\lambda - 1) & 0 \\ 0 & (\lambda + 1) \end{vmatrix} = 0,$$

po úpravě ve tvaru

$$(\lambda - 1)(\lambda + 1) = 0.$$

Charakteristická rovnice má dva kořeny (vlastní čísla)  $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1$ , které postupně dosadíme do příslušné homogenní soustavy a vypočítáme souřadnice příslušných vlastních vektorů daného zobrazení.

Pro  $\lambda_1 = 1$  dostáváme soustavu

$$\begin{aligned} 0u_1 &= 0, \\ 2u_2 &= 0, \end{aligned}$$

jejímž řešením je každý vektor  $\vec{v}_1 = (u_1, 0) \in R^2$ . Samodružný směr určený těmito vektory je rovnoběžný s osou  $x$  (tj. s osou souměrnosti).

Pro  $\lambda_2 = -1$  dostáváme soustavu

$$\begin{aligned} -2u_1 &= 0, \\ 0u_2 &= 0, \end{aligned}$$

jejímž řešením je každý vektor  $\vec{v}_2 = (0, u_2) \in R^2$ . Samodružný směr určený těmito vektory je kolmý k ose  $x$  (tj. k ose souměrnosti).

Daná afinita má tedy dva na sebe kolmé samodružné směry.

**Poznámka.** Zjištění, že daná afinita má dva na sebe kolmé samodružné směry, přitom jeden rovnoběžný s přímkou samodružných bodů a druhý na ni kolmý, je v souladu s poznatkem z řešení příkladu 7.2, že uvažovaná afinita je osovou souměrností.

**PŘÍKLAD 7.5.** Zjistěte, zda existuje shodnost  $E_2$ , při které se bod  $K = [10; 0]$  zobrazí na počátek  $K' = [0; 0]$  a bod  $L = [25; 20]$  na bod  $L' = [0; 25]$ . V kladném případě napište rovnice tohoto zobrazení a najděte jeho samodružné body a směry.

*Řešení:* Začneme tím, že si ověříme, zda zadané body splňují definici shodného zobrazení, tj. zda  $|K'L'| = |KL|$ . V případě této úlohy zvládneme ověření provést z paměti. Výsledkem je, že zadání vyhovuje definici shodnosti.

Další postup řešení úlohy si ilustrujeme pomocí zápisu v programu wxMaxima (viz <http://andrejv.github.io/wxmaxima/>)

```
(%i1) A:matrix([a11,a12],[a21,a22]); B:matrix([b1],[b2]);
```

$$(%o1) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

$$(%o2) \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

Rovnici  $X' = A \cdot X + B$  vyjádříme ve tvaru  $A \cdot X + B - X' = O$  a dosadíme souřadnice daných dvojic bodů  $K, K'$  a  $L, L'$ . Potom zapíšeme podmínku (89) pro to, aby bylo afinní zobrazení shodností ve tvaru  $A^T \cdot A - I = O$ . (V programu wxMaxima zapíšeme jenom levé strany uvedených rovnic. Jednotkovou matici  $I$  druhého stupně zadáme ve wxMaximě příkazem `ident(2)`.)

```
(%i3) s1:A.[10,0]+B-[0,0]; s2:A.[25,20]+B-[0,25];
s3:transpose(A).A-ident(2);
```

$$(%o3) \begin{pmatrix} b_1 + 10 a_{11} \\ b_2 + 10 a_{21} \end{pmatrix}$$

$$(%o4) \begin{pmatrix} b_1 + 20 a_{12} + 25 a_{11} \\ b_2 + 20 a_{22} + 25 a_{21} - 25 \end{pmatrix}$$

$$(%o5) \begin{pmatrix} a_{21}^2 + a_{11}^2 - 1 & a_{21} a_{22} + a_{11} a_{12} \\ a_{21} a_{22} + a_{11} a_{12} & a_{22}^2 + a_{12}^2 - 1 \end{pmatrix}$$

Všechny prvky výše uvedených matic musí být rovny nule (Proč?). Dostaneme tak soustavu sedmi rovnic pro šest neznámých  $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, b_1, b_2$ .

```
(%i6) rov:[s1[1,1],s1[2,1],s2[1,1],s2[2,1],s3[1,1],s3[1,2],s3[2,2]];
```

$$(%o6) [b_1 + 10 a_{11}, b_2 + 10 a_{21}, b_1 + 20 a_{12} + 25 a_{11}, b_2 + 20 a_{22} + 25 a_{21} - 25, a_{21}^2 + a_{11}^2 - 1, a_{21} a_{22} + a_{11} a_{12}, a_{22}^2 + a_{12}^2 - 1]$$

Tato soustava má následující dvě řešení (nejedná se o soustavu lineárních rovnic, proto může mít dvě řešení):

```
(%i7) res:solve(rov,[a11,a12,a21,a22,b1,b2]);
```

$$(%o7) [[a_{11} = \frac{4}{5}, a_{12} = -\frac{3}{5}, a_{21} = \frac{3}{5}, a_{22} = \frac{4}{5}, b_1 = -8, b_2 = -6],$$

$$[a_{11} = -\frac{4}{5}, a_{12} = \frac{3}{5}, a_{21} = \frac{3}{5}, a_{22} = \frac{4}{5}, b_1 = 8, b_2 = -6]]$$

Dvěma řešením odpovídají dvě různé shodnosti. Zjistili jsme tedy, že existují dvě shodnosti, které převádějí body  $K, L$  na body  $K', L'$  (Což se, vzhledem ke *věťě o určenosti shodného (afinního) zobrazení* dalo čekat. Proč?). Pokračujeme v řešení úlohy pro každou z těchto shodností zvlášť. Pro zápis rovnic uvažovaných shodností si nejprve připravíme matici `RovTr`, jejímiž řádky jsou rovnice afinity v obecném tvaru (tato matice není nutnou součástí postupu řešení, jedná se jenom o usnadnění vizuální prezentace rovnic v programu).

```
(%i8) RovTr:matrix([x1=a11*x+a12*y+b1],[y1=a21*x+a22*y+b2]);
```

```
(%o8) (x1 = a12 y + a11 x + b1)
      (y1 = a22 y + a21 x + b2)
```

**Řešení č. 1:**

```
(%i9) A1:ev(A,res[1]); B1:ev(B,res[1]);
```

```
(%o9) (4/5  -3/5)
      (3/5  4/5)
```

```
(%o10) (-8)
      (-6)
```

Příslušná shodnost má rovnice

```
(%i11) R1:ev(RovTr,res[1]);
```

```
(%o11) (x1 = -3y/5 + 4x/5 - 8)
      (y1 = 4y/5 + 3x/5 - 6)
```

Samodružný bod je bod, pro který platí  $X' = X$ . Pro výpočet souřadnic samodružných bodů daného zobrazení tak do rovnice  $X' = A \cdot X + B$  (pro snazší zpracování programem přeepsané do tvaru  $A \cdot X + B - X = 0$ ) za  $X'$  dosadíme  $X$  a řešíme odpovídající soustavu dvou rovnic s neznámými  $x, y$ .

```
(%i12) RovSB1:A1.[x,y]+B1-[x,y]; solve([RovSB1[1,1],RovSB1[2,1]],[x,y]);
```

```
(%o12) (-3y/5 - x/5 - 8)
      (-y/5 + 3x/5 - 6)
```

```
(%o13) [[x = 5, y = -15]]
```

Protože tato soustava má jediné řešení, má daná shodnost jediný samodružný bod  $S = [5, -15]$ .

Pro vyšetření samodružných směrů daného zobrazení řešíme charakteristickou rovnicí (75)

```
(%i14) CharM1:A1-%lambda*ident(2);
CharR1:expand(determinant(CharM1))=0;
solve(CharR1,%lambda);
```

$$(\%o14) \begin{pmatrix} \frac{4}{5} - \lambda & -\frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{4}{5} - \lambda \end{pmatrix}$$

$$(\%o15) \lambda^2 - \frac{8\lambda}{5} + 1 = 0$$

$$(\%o16) \left[ \lambda = -\frac{3i-4}{5}, \lambda = \frac{3i+4}{5} \right]$$

Charakteristická rovnice nemá řešení v oboru reálných čísel. Daná shodnost tak nemá žádný samodružný směr.

Protože uvažované zobrazení má právě jeden samodružný bod a nemá žádný samodružný směr, jedná se o **otočení** se středem  $S = [5, -15]$ .

**Poznámka.** K úplné identifikaci daného zobrazení nám zbývá určit úhel otočení  $\alpha$ . Jak to uděláme?

## Řešení č. 2:

Postupujeme analogicky s řešením č. 1.

```
(%i17) A2:ev(A,res[2]); B2:ev(B,res[2]);
```

$$(\%o17) \begin{pmatrix} -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix}$$

$$(\%o18) \begin{pmatrix} 8 \\ -6 \end{pmatrix}$$

Rovnice zobrazení

```
(%i19) R2:ev(RovTr,res[2]);
```

$$(\%o19) \begin{pmatrix} x1 = \frac{3y}{5} - \frac{4x}{5} + 8 \\ y1 = \frac{4y}{5} + \frac{3x}{5} - 6 \end{pmatrix}$$

Samodružné body:



```
(%i20) RovSB2:A2.[x,y]+B2-[x,y]; solve([RovSB2[1,1],RovSB2[2,1]], [x,y]);
```

$$(\%o20) \begin{pmatrix} \frac{3y}{5} - \frac{9x}{5} + 8 \\ -\frac{y}{5} + \frac{3x}{5} - 6 \end{pmatrix}$$

```
(%o21) []
```

Toto zobrazení tedy nemá žádný samodružný bod.

Samodružné směry:

```
(%i22) CharM2:A2-%lambda*ident(2);  
CharR2:expand(determinant(CharM2))=0;  
solve(CharR2,%lambda);
```

$$(\%o22) \begin{pmatrix} -\lambda - \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{4}{5} - \lambda \end{pmatrix}$$

$$(\%o23) \lambda^2 - 1 = 0$$

$$(\%o24) [\lambda = -1, \lambda = 1]$$

```
(%i25) RovSS2:A2.[u,v]-[%lambda*u,%lambda*v];
```

$$(\%o25) \begin{pmatrix} \frac{3v}{5} - \lambda u - \frac{4u}{5} \\ -\lambda v + \frac{4v}{5} + \frac{3u}{5} \end{pmatrix}$$

```
(%i26) RovSS21:ev(RovSS2,%lambda=-1);  
solve([RovSS21[1,1],RovSS21[2,1]], [u,v]);
```

$$(\%o26) \begin{pmatrix} \frac{3v}{5} + \frac{u}{5} \\ \frac{9v}{5} + \frac{3u}{5} \end{pmatrix} \text{ solve : dependentequationseliminated : (2)}$$

$$(\%o27) [[u = -3 \%r1, v = \%r1]]$$

```
(%i28) RovSS22:ev(RovSS2,%lambda=1);  
solve([RovSS22[1,1],RovSS22[2,1]], [u,v]);
```

$$(\%o28) \begin{pmatrix} \frac{3v}{5} - \frac{9u}{5} \\ \frac{3u}{5} - \frac{v}{5} \end{pmatrix} \text{ solve : dependentequationseliminated : (2)}$$

$$(\%o29) [[u = \frac{\%r2}{3}, v = \%r2]]$$

Zobrazení má dva na sebe kolmé samodružné směry  $\vec{u} = (-3, 1)$ ,  $\vec{v} = (1, 3)$ .

Jedná se o „posunuté zrcadlení“, viz str. 80.

**Poznámka.** K úplné identifikaci výsledného zobrazení nám zbývá určit osu  $o$  a vektor posunutí  $\vec{t}$ . Jak to uděláme?

### 7.3 Homotetie, grupa homotetií

**Definice 17** (Homotetie). *Každé afinní zobrazení, které má všechny směry samostatné, se nazývá „homotetické zobrazení“, též „homotetie“.*

**Poznámka.** Pro homotetie se používá také označení „dilatace“.

Každá homotetie je stejnoolehlost, posunutí nebo identita (tj. posunutí o nulový vektor). V kapitole 12 věnované stejnoolehlosti se dozvíme, že množina těchto tří shodností spolu s operací skládání tvoří grupu, tzv. „grupu homotetií“.

**Poznámka.** Z výše uvedené existence „grupy homotetií“ vyplývá, že složením dvou zobrazení z množiny homotetií, tj. z množiny {stejnoolehlost, posunutí, identita}, vznikne opět jedno z těchto zobrazení.

## 8 Skládání afinních zobrazení

Nechť  $f_1$  je afinní zobrazení prostoru  $A$  do  $A'$ ,  $f_2$  afinní zobrazení prostoru  $A'$  do  $A''$ . Jestliže každému bodu  $X \in A$  je v  $f_1$  přiřazen bod  $f_1(X) \in A'$  a bodu  $f_1(X)$  přiřazen bod  $f_2[f_1(X)] \in A''$ , říkáme, že zobrazení  $f$  přiřazující bodu  $X$  bod  $f_2[f_1(X)]$  vzniklo složením zobrazení  $f_1$  a  $f_2$ . Zapisujeme  $f = f_2 \cdot f_1$ ,  $f = f_2 f_1$  nebo  $f = f_2(f_1(X))$ .

**Věta 10.** Složením dvou afinních zobrazení  $f_1, f_2$  vznikne afinní zobrazení  $f$ . Zobrazení  $\varphi$  asociované k  $f$  vznikne složením zobrazení  $\varphi_1, \varphi_2$  asociovaných po řadě k  $f_1, f_2$ .

**PŘÍKLAD 8.1.** V prostoru  $E_2$  jsou dány dvě středové souměrnosti  $S$  a  $O$ . Určete zobrazení  $Z_1 = SO$  a  $Z_2 = OS$ .

**PŘÍKLAD 8.2.** V prostoru  $E_n$  je dáno posunutí  $T$  a středová souměrnost  $S$ . Určete zobrazení  $Z_1 = TS$  a  $Z_2 = ST$ .

### 8.1 Afinní grupa v $A_n$

**Věta 11** (Inverzní zobrazení). Uvažujme afinní zobrazení  $f$  afinního prostoru  $A_n$  na afinní prostor  $A'_m$ . Nechť je toto zobrazení navíc prosté (prostory  $A_n, A'_m$  mají stejnou dimenzi, tj.  $m = n$ ). Pak k zobrazení  $f$  existuje zobrazení inverzní  $f^{-1}$ , které je rovněž afinním zobrazením.

*Důkaz.* Jsou-li  $B', C', D'$  tři kolineární body v prostoru  $A'_n$  a platí  $(B', C', D') = \lambda$ , uvažujme vzory  $B, C$  bodů  $B', C'$  při zobrazení  $f$  a na jimi určené přímce  $BC$  zvolme bod  $D$  tak, že dělicí poměr  $(B, C, D) = \lambda$ . Pak bod  $f(D)$  leží na přímce  $B'C' = f(B)f(C)$  a platí  $(B', C', f(D)) = \lambda$ . Protože také  $(B', C', D') = \lambda$ , je  $f(D) = D'$  a dělicí poměr  $(B', C', D') = (B, C, D)$ .  $\square$

Jak víme, pojmem „afinita“ se rozumí „vzájemně jednoznačné zobrazení prostoru  $A_n$  na sebe“, tj. speciální případ afinního zobrazení, kdy prostory  $A_n$  a  $A'_m$  splývou.

**Věta 12.** Všechny afinity prostoru  $A_n$  tvoří při obvyklém skládání grupu, tzv. „afinní grupu prostoru  $A_n$ “.

*Důkaz.* Složením dvou afinit prostoru  $A_n$  vznikne opět afinita prostoru  $A_n$ . K afinitě  $f$  existuje inverzní afinita  $f^{-1}$  (viz Věta 11). Neutrálním prvkem je potom identita.  $\square$

## 8.2 Souvislost mezi skládáním afinních zobrazení a násobením matic

Pro zjednodušení budme uvažovat pouze *lineární zobrazení*. To jsou afinní transformace s nulovým vektorem posunutí, tj. v rovnicích (??) mají  $b_1 = b_2 = 0$ .

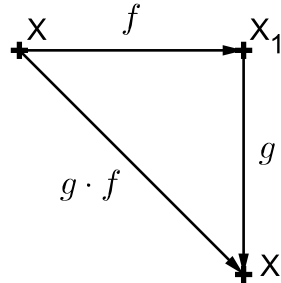
**PŘÍKLAD 8.3.** Jsou dána lineární zobrazení  $f, g$ :

$$f: \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \quad g: \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Určete matici  $M$  složeného zobrazení

$$g \cdot f: \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = M \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

*Řešení:* Uvažujme situaci znázorněnou na Obr. 33. Bod  $X[x, y]$  je afinitou  $f$  zobrazen



Obrázek 33: Skládání afinit  $f$  a  $g$  v rovině

na bod  $X_1[x_1, y_1]$ , ten je pak afinitou  $g$  zobrazen na bod  $X'[x', y']$ . Tuto skutečnost můžeme zapsat rovnicemi

$$X \xrightarrow{f} X_1: \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}; \quad X_1 \xrightarrow{g} X': \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix},$$

odkud po dosazení za  $\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$  z první rovnice do druhé dostáváme

$$X \xrightarrow{g \cdot f} X': \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}. \quad (76)$$

Skládání afinit znázorněné Obr. 33 ale můžeme zapsat i pomocí rovnic. Platí

$$X \xrightarrow{f} X_1: \begin{matrix} x_1 = ax + by \\ y_1 = cx + dy \end{matrix}; \quad X_1 \xrightarrow{g} X': \begin{matrix} x' = Ax_1 + By_1 \\ y' = Cx_1 + Dy_1 \end{matrix}.$$

Potom po dosazení za  $x_1$  a  $y_1$  z první soustavy rovnic do druhé dostaneme

$$X \xrightarrow{g \cdot f} X': \begin{matrix} x' = A(ax + by) + B(cx + dy) = (Aa + Bc)x + (Ab + Bd)y \\ y' = C(ax + by) + D(cx + dy) = (Ca + Dc)x + (Cb + Dd)y \end{matrix},$$

po přepsání do maticového tvaru

$$X \xrightarrow{g \cdot f} X' : \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Aa + Bc & Ab + Bd \\ Ca + Dc & Cb + Dd \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}. \quad (77)$$

Z porovnání (76) a (77) je zřejmé, že pro matici  $M$  složené afinity  $g \cdot f$  platí:

$$M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Aa + Bc & Ab + Bd \\ Ca + Dc & Cb + Dd \end{bmatrix}. \quad (78)$$

Rovnost (78) tak přináší známý algoritmus pro násobení dvou matic.

**PŘÍKLAD 8.4.** Řešení příkladu 8.3 využijte ke zdůvodnění skutečnosti, že skládání afinit v rovině není komutativní. Zobecněte na  $E_n$ .

## 9 Shodnosti v rovině

**Definice 18.** Zobrazení v rovině, které každým dvěma bodům  $X, Y$  přiřazuje body  $X', Y'$  tak, že

$$|X'Y'| = |XY|$$

se nazývá **shodné zobrazení** v rovině (též *izometrické zobrazení*).

**Poznámka.** Můžeme též říci, že shodné zobrazení zachovává vzdálenost bodů, tj. pro shodné zobrazení  $f : X \rightarrow f(X)$  platí:

$$|f(X)f(Y)| = |XY|.$$

**Věta 13.** Každé shodné zobrazení je prosté a afinní.

### Další vlastnosti shodných zobrazení:

1. Úsečka se zobrazí na úsečku.
2. Polopřímka se zobrazí na polopřímku.
3. Přímka se zobrazí na přímku.
4. Rovnoběžky se zobrazí na rovnoběžky.
5. Úhel se zobrazí na úhel s ním shodný.
6. Polorovina se zobrazí na polorovinu.

**PŘÍKLAD 9.1.** V euklidovské rovině  $E_2$  je zvolena kartézská soustava souřadnic. Určete, pro které hodnoty čísel  $a, b$  existuje shodné zobrazení roviny  $E_2$  do sebe, zobrazující body  $[0, 0], [2, 1], [4, a]$  po řadě na body  $[1, 2], [3, 1], [5, b]$ ? Je toto shodné zobrazení určeno jednoznačně?

Z řešení předchozího příkladu vyplývá poznatek, že pro jednoznačné určení shodnosti v rovině nesmí být příslušné trojice bodů kolineární (tj. nesmí ležet v přímce).

**Věta 14** (O určenosti shodného zobrazení v rovině 1). *Shodné zobrazení v rovině je jednoznačně určeno libovolnými třemi nekolineárními body  $K, L, M$  a třemi nekolineárními body  $K', L', M'$ , které jsou po řadě jejich obrazy.*

**Poznámka.** Již víme, že stejná věta platí pro všechna afinní zobrazení v rovině (viz věta 2 o určenosti afinního zobrazení na str. 29 a věta 5 o určenosti afinity v rovině na str. 45).

## 9.1 Rovnice shodnosti v rovině

Každou afinitu  $f$  v rovině můžeme zapsat soustavou rovnic

$$\begin{aligned} f : x' &= a_{11}x + a_{12}y + b_1 \\ y' &= a_{21}x + a_{22}y + b_2, \end{aligned} \quad (79)$$

kterou přepíšeme užitím matic do tvaru

$$f : \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \quad (80)$$

a stručně vyjádříme rovnicí

$$f : X' = A \cdot X + B. \quad (81)$$

### Jak poznáme, že afinita (79) je shodností?

Je-li tato afinita shodností, platí pro všechny dvojice bodů  $X[x_1, x_2]$ ,  $Y[y_1, y_2]$  a jejich obrazy  $X'[x'_1, x'_2]$ ,  $Y'[y'_1, y'_2]$  vztah  $|X'Y'| = |XY|$ , z něhož po dosazení souřadnic uvedených bodů dostaneme

$$\sqrt{(y'_1 - x'_1)^2 + (y'_2 - x'_2)^2} = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2}, \quad (82)$$

po umocnění obou stran na druhou

$$(y'_1 - x'_1)^2 + (y'_2 - x'_2)^2 = (y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2. \quad (83)$$

Nyní do levé strany (83) dosadíme z (79) (protože se body  $X[x_1, x_2]$ ,  $Y[y_1, y_2]$  zobrazují v daném pořadí na body  $X'[x'_1, x'_2]$ ,  $Y'[y'_1, y'_2]$ , dosazujeme takto:  $x'_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + b_1$ ,  $x'_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + b_2$ ;  $y'_1 = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + b_1$ ,  $y'_2 = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + b_2$ ). Dostaneme rovnost

$$\begin{aligned} (a_{11}y_1 + a_{12}y_2 - a_{11}x_1 - a_{12}x_2)^2 + (a_{21}y_1 + a_{22}y_2 - a_{21}x_1 - a_{22}x_2)^2 \\ = (y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2, \end{aligned} \quad (84)$$

kterou postupně upravíme na tvar obsahující výrazy  $(y_1 - x_1)$  a  $(y_2 - x_2)$ . Nejprve vytkneme společné koeficienty

$$\begin{aligned} [a_{11}(y_1 - x_1) + a_{12}(y_2 - x_2)]^2 + [a_{21}(y_1 - x_1) + a_{22}(y_2 - x_2)]^2 \\ = (y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2, \end{aligned} \quad (85)$$

potom umocníme závorky na levé straně a zjednodušíme ji na tvar polynomu s proměnnými  $(y_1 - x_1)$  a  $(y_2 - x_2)$

$$(a_{11}^2 + a_{21}^2)(y_1 - x_1)^2 + 2(a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22})(y_1 - x_1)(y_2 - x_2) + (a_{12}^2 + a_{22}^2)(y_2 - x_2)^2 = (y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2. \quad (86)$$

Nyní diskutujeme, za jakých podmínek je v (86) splněna rovnost levé strany s pravou stranou (využijeme toho, že dva polynomy jsou si rovny pro všechny hodnoty z příslušného oboru právě tehdy, když se rovnají koeficienty u sobě odpovídajících členů). Zjistíme tak, že rovnost  $|X'Y'| = |XY|$  nastává právě tehdy, když jsou pro prvky matice  $A$  (tj. koeficienty soustavy (79)) splněny vztahy

$$\begin{aligned} a_{11}^2 + a_{21}^2 &= 1, \\ a_{12}^2 + a_{22}^2 &= 1, \\ a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22} &= 0, \end{aligned} \quad (87)$$

které lze stručně vyjádřit rovností

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (88)$$

Odpověď na výše uvedenou otázku je tedy taková, že **rovnice (79) je rovnicí shodnosti, právě když platí**

$$A^T \cdot A = E, \quad (89)$$

kde  $E$  je jednotková matice, jinak řečeno, když je matice  $A$  **ortonormální**.

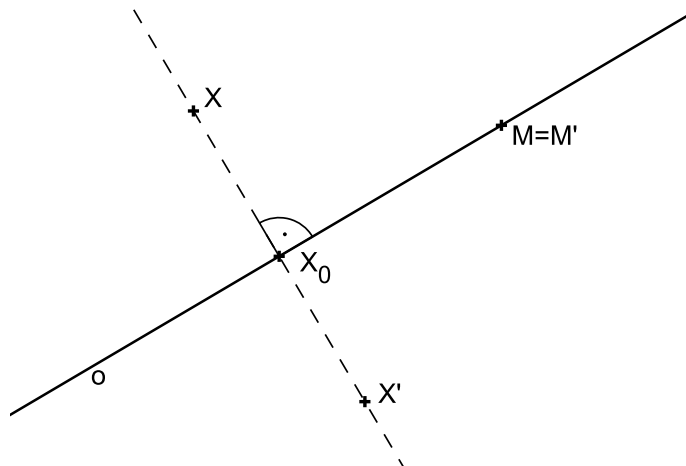
### Poznámky.

1. Platí  $A^T \cdot A = E$ . Potom je ale  $A^T = A^{-1}$  a platí tedy i rovnost  $A \cdot A^T = E$ .
2. Zobrazení, pro která platí  $|\det A| = 1$  nazýváme ekviafinitní zobrazení, stručně **ekviafinita**. Je zřejmé, že každá shodnost je ekviafinita. Platí toto tvrzení i obráceně? Můžeme říci, že každá ekviafinita je shodností?
3. Je třeba si uvědomit, že při shodném zobrazení mezi euklidovskými prostory různých dimenzí není matice  $A$  čtvercová. Potom výše uvedené úvahy o inverzní matici nemají smysl a v platnosti zůstává pouze původní podmínka  $A^T \cdot A = E$ .



## 9.2 Osová souměrnost

**Definice 19.** Nechť je dána přímka  $o$ , kterou nazýváme **osa souměrnosti**. Potom pro obraz  $M'$  libovolného bodu  $M$  této přímky  $o$  platí  $M' \equiv M$ . Ke každému bodu  $X$ , který neleží na přímce  $o$ , sestrojíme obraz  $X'$  následujícím způsobem: Bodem  $X$  vedeme kolmici  $k$  na přímku  $o$  a její patu označíme  $X_0$ . Na polopřímce opačné k polopřímce  $X_0X$  sestrojíme bod  $X'$  tak, že  $|X'X_0| = |XX_0|$ . Takto definované zobrazení nazýváme **osová souměrnost s osou  $o$**  a značíme ho  $\mathcal{O}(o)$ .

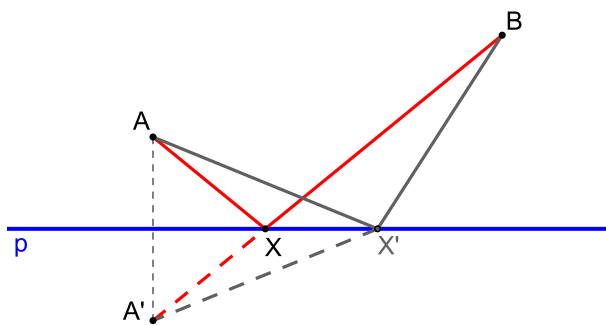


Obrázek 34: Definice osové souměrnosti

### Poznámky:

1. O bodech  $X, X'$  říkáme, že je to dvojice bodů souměrně sdružených podle osy  $o$ .
2. Osová souměrnost je příkladem involutorního zobrazení (involuce).

**PŘÍKLAD 9.2.** Je dána přímka  $p$  a body  $A, B$  v téže polovině s hraniční přímkou  $p$ . Najděte všechny body  $X \in p$  takové, že součet vzdáleností  $|AX| + |BX|$  je minimální.



Obrázek 35: Využití osové souměrnosti ke geometrickému řešení příkladu 35

**Věta 15.** *Osová souměrnost je shodné zobrazení.*

### Samodružné body a směry osově souměrnosti

Každá shodnost je unikátní svou kombinací samodružných bodů a směrů. Později tuto skutečnost využijeme ke klasifikaci shodností.

**Věta 16** (Alternativní definice osově souměrnosti). *Shodné zobrazení, jehož všechny samodružné body vyplní přímku  $o$ , je souměrnost podle osy  $o$ .*

**Věta 17.** *Jestliže existují na přímce dva různé samodružné body, pak každý bod této přímky je samodružný.*

**Věta 18.** *Má-li shodnost aspoň tři nekolineární samodružné body, je to identita.*

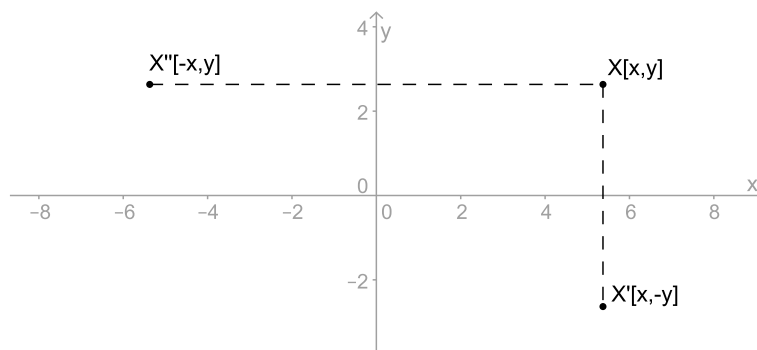
**Věta 19.** *Má-li shodnost dva různé samodružné body a není identitou, pak je osovou souměrností.*

**Věta 20.** *Samodružné přímky osově souměrnosti jsou přímky kolmé na osu souměrnosti.*

### Analytické vyjádření osově souměrnosti $O(o)$ v rovině

**PŘÍKLAD 9.3.** *Napište analytické vyjádření osově souměrnosti s osou v souřadnicové ose  $x$  ( $y$ ).*

*Řešení:* Dle obrázku 36 je zřejmé, že uvedené osově souměrnosti mají níže uvedená analytická vyjádření.



Obrázek 36: Odvození rovnic osově souměrnosti s osou v souřadnicové ose  $x$  ( $y$ )

*Osová souměrnost s osou  $x$ :*

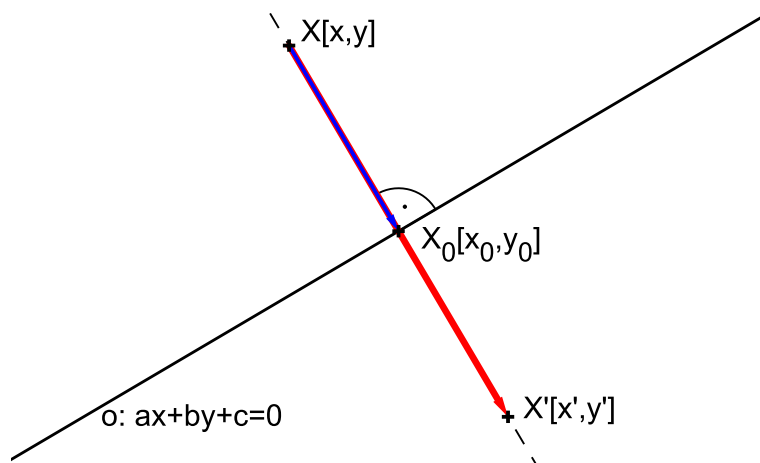
$$\begin{aligned}x' &= x \\y' &= -y\end{aligned}$$

*Osová souměrnost s osou  $y$ :*

$$\begin{aligned}x' &= -x \\y' &= y\end{aligned}$$

Ne vždy je ale možné osu souměrnosti takto výhodně umístit do souřadnicové osy. Proto si odvodíme rovnice osové souměrnosti s obecně umístěnou osou.

**Osová souměrnost podle osy  $o$  dané rovnicí  $o : ax + by + c = 0$**



Obrázek 37: Odvození rovnic osové souměrnosti  $O(o)$

Dle obrázku 37 platí

$$X' - X = 2(X_0 - X),$$

$$X_0 - X = k(a, b).$$

Z druhé rovnosti vyjádříme  $x_0 = x + ka, y_0 = y + kb$  a dosadíme je do obecné rovnice osy  $o$ :  $a(x + ka) + b(y + kb) + c = 0$ . Odsud potom vyjádříme parametr  $k = -\frac{ax + by + c}{a^2 + b^2}$ , který dosadíme do rovnice

$$X' - X = 2k(a, b).$$

Po úpravě a rozepsání po složkách dostáváme rovnice osové souměrnosti  $O(o)$ :

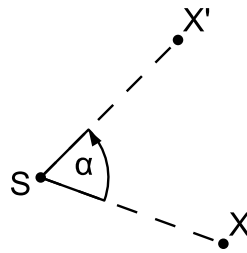
$$x' = x - \frac{2a}{a^2 + b^2} (ax + by + c)$$

$$y' = y - \frac{2b}{a^2 + b^2} (ax + by + c)$$

**PŘÍKLAD 9.4.** V eukleidovské rovině je dána souměrnost podle přímky  $p : 3x - 4y + 1 = 0$ . Napište rovnice této souměrnosti.

### 9.3 Otočení

**Definice 20. Otočení neboli rotace** je zobrazení určené středem  $S$  a orientovaným úhlem velikosti  $\varphi$ , které bodu  $S$  přiřazuje týž bod  $S$  a libovolnému bodu  $X \neq S$  přiřazuje bod  $X'$  tak, že  $|X'S| = |XS|$  a orientovaný úhel  $XSX'$  má velikost  $\varphi$ . Zobrazení značíme  $\mathcal{R}(S, \varphi)$ , bod  $S$  se nazývá střed otočení a orientovaný úhel velikosti  $\varphi$  je úhel otočení.



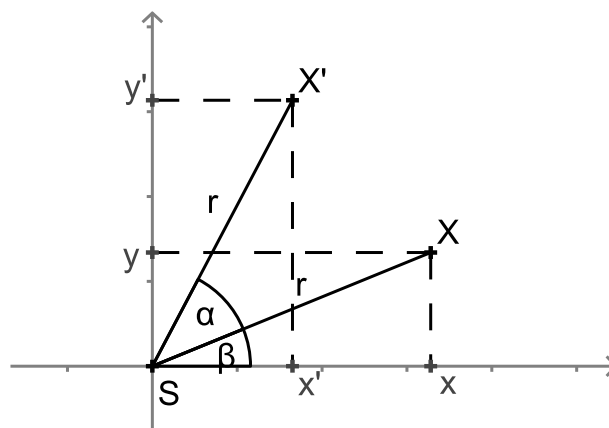
Obrázek 38: Otočení  $\mathcal{R}(S, \alpha)$

Shodnost, která není ani identitou ani osovou souměrností, má nejvýše jeden samodružný bod

**Věta 21** (Alternativní definice otočení). *Shodnost s právě jedním samodružným bodem  $S$  je otočením; bod  $S$  je střed otočení.*

**PŘÍKLAD 9.5.** *Odvoďte analytické vyjádření otočení se středem v počátku souřadnicové soustavy o úhel  $\alpha$ . Potom ukažte, že toto zobrazení má jediný samodružný bod - střed otočení.*

*Řešení:* Postupujeme podle obrázku 39.



Obrázek 39: Otočení  $\mathcal{R}([0, 0], \alpha)$

Rovnice otočení o úhel  $\alpha$  kolem počátku jsou

$$\begin{aligned}x' &= x \cos \alpha - y \sin \alpha \\y' &= x \sin \alpha + y \cos \alpha\end{aligned}$$

**Věta 22.** Složením dvou osových souměrností s různoběžnými osami vznikne otočení, jehož středem je průsečík těchto os.

**Věta 23.** Každé otočení lze složit ze dvou osových souměrností, jejichž osy jsou různoběžky procházející středem otočení. Jednu z těchto os lze volit libovolně tak, že prochází středem otočení. Druhá je touto volbou určena jednoznačně.

**Věta 24.** Otočení se středem  $S$  a úhlem velikosti  $\alpha$  převádí přímku  $p$  v přímku  $p'$  různoběžnou s  $p$ ; přitom dva vrcholové úhly, které  $p$  a  $p'$  tvoří, mají velikost  $\alpha$ .

### Analytické vyjádření otočení (rotace) $R(S, \alpha)$ v rovině

Souřadnice středu:  $S = [s_1, s_2]$

$$\begin{aligned}x' &= (x - s_1) \cos \alpha - (y - s_2) \sin \alpha + s_1 \\y' &= (x - s_1) \sin \alpha + (y - s_2) \cos \alpha + s_2\end{aligned}$$

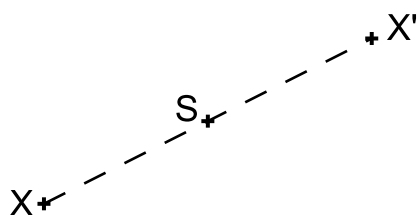
Po úpravě dostaneme:

$$\begin{aligned}x' &= x \cos \alpha - y \sin \alpha + s_1 - s_1 \cos \alpha + s_2 \sin \alpha \\y' &= x \sin \alpha + y \cos \alpha + s_2 - s_1 \sin \alpha - s_2 \cos \alpha\end{aligned}$$

**PŘÍKLAD 9.6.** Afinní zobrazení euklidovské roviny na sebe zobrazuje vrchol  $A$  trojúhelníku  $ABC$  na bod  $B$ , bod  $B$  na bod  $C$  a bod  $C$  na bod  $A$ . Může to být zobrazení shodné? Jestliže ano, napište jeho rovnice vzhledem k vhodně zvolené kartézské soustavě souřadnic.

## 9.4 Středová souměrnost

**Definice 21.** Středová souměrnost se středem  $S$  je shodné zobrazení, které bodu  $S$  přiřazuje týž bod  $S$  a libovolnému bodu  $X \neq S$  přiřazuje bod  $X'$  tak, že bod  $S$  je středem úsečky  $XX'$ . Zobrazení značíme  $\mathcal{S}(S)$ .



Obrázek 40: Středová souměrnost  $\mathcal{S}(S)$

**Poznámka.** Středovou souměrnost můžeme chápat též jako speciální případ rotace  $\mathbf{R}(S, \alpha)$  pro  $\alpha = \pi$ , tj.  $\mathcal{S}(S) = \mathcal{R}(S, \pi)$ .

Vlastnosti středové souměrnosti:

- 1) Lze ji rozložit na dvě osové souměrnosti, jejichž osy jsou navzájem kolmé a procházejí středem souměrnosti  $S$ ; jedna z os je volitelná.
- 2) Vznikne složením libovolných dvou osových souměrností, jejichž osy jsou k sobě kolmé (střed souměrnosti  $S$  odpovídá průsečíku těchto os).
- 3) Je jednoznačně určena svým středem
- 4) Je to *involutorní zobrazení* (též *involuce*).
- 5) Středová souměrnost je *přímá shodnost*.
- 6) Středová souměrnost má jediný samodružný bod, střed  $S$ , a všechny směry samodružné.

**Věta 25.** V souměrnosti podle středu  $S$  je obrazem každé přímky přímka s ní rovnoběžná. Přímka, která prochází středem  $S$  je samodružná.

### Analytické vyjádření středové souměrnosti $\mathbf{S}(S)$ v rovině

Souřadnice středu:  $S = [s_1, s_2]$

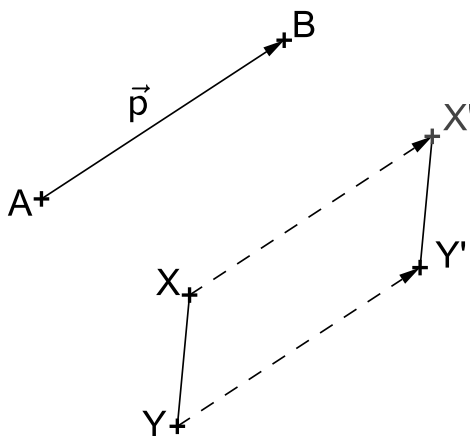
$$x' = -x + 2s_1$$

$$y' = -y + 2s_2$$

**Věta 26.** Každá shodnost v rovině se dá složit z nejvýše tří osových souměrností.

## 9.5 Posunutí

**Definice 22.** Orientovanou úsečkou  $AB$  je dán vektor  $\vec{p} = \overrightarrow{AB}$ . **Posunutí** neboli **translace** je zobrazení, které každému bodu  $X$  roviny přiřazuje bod  $X'$  tak, že platí  $\overrightarrow{XX'} = \vec{p}$ , tj.  $X' = X + \vec{p}$ . Zobrazení značíme  $\mathcal{T}(\vec{p})$ .



Obrázek 41: Posunutí  $\mathcal{T}(\vec{p})$

**Poznámka.** Posunutí (translaci) můžeme definovat též jako shodnost, která vznikne složením dvou osových souměrností s rovnoběžnými a různými osami. Směr posunutí je potom kolmý na směr těchto os a jeho velikost je rovna dvojnásobku jejich vzdálenosti.

**Věta 27.** Každou translaci lze složit ze dvou osových souměrností s rovnoběžnými osami z nichž jednu lze volit libovolně, kolmo na směr translace a druhá je touto volbou určena jednoznačně.

**Věta 28.** Posunutí (translace) nemá žádný samodružný bod a zobrazuje přímku do přímky s ní rovnoběžné (tj. má všechny směry samodružné).

**Věta 29.** Nechť  $X'$  je obraz libovolného (proměnného) bodu  $X$  v dané translaci  $\mathbf{T}$ . Pak všechny přímky  $XX'$  jsou navzájem rovnoběžné a všechny úsečky  $XX'$  jsou navzájem shodné.

### Analytické vyjádření posunutí $\mathbf{T}(\vec{p})$ v rovině

Rovnice posunutí  $\mathcal{T}(\vec{p})$ , kde  $\vec{p} = (p_1, p_2)$ :

$$x' = x + p_1$$

$$y' = y + p_2$$

**PŘÍKLAD 9.7.** Jaké zobrazení může být výsledkem skládání dvou posunutí?

## 9.6 Posunuté zrcadlení

**PŘÍKLAD 9.8.** Je dána přímka  $p$  a dva body  $A, B$  v téže polorovině s hraniční přímkou  $p$ . Na přímce  $p$  sestrojte úsečku  $XY$  délky  $d$  tak, aby součet  $|AX| + |XY| + |YB|$  byl co nejmenší.

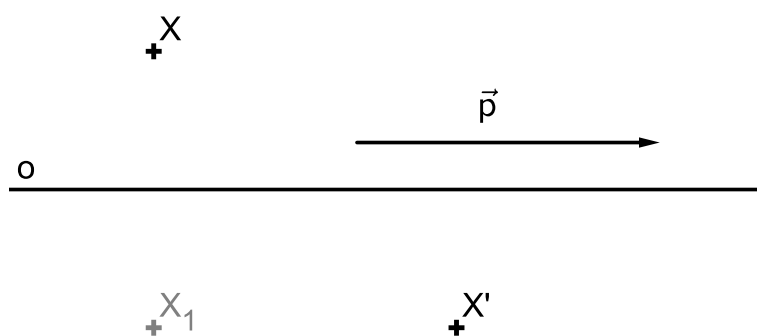
Víme, že každá shodnost v rovině se dá složit z nejvýše tří osových souměrností. V případech jedné a dvou osových souměrností už máme jasno - složením jedné osové souměrnosti může vzniknout samozřejmě jenom tato souměrnost, složením dvou osových souměrností pak lze vytvořit otočení (různoběžné osy), středovou souměrnost (kolmé osy), posunutí (rovnoběžné osy) a identitu (dvě totožné osy). Každé z těchto zobrazení je zároveň unikátní svou skladbou samodružných bodů a směrů

- osová souměrnost má přímku samodružných bodů a dva na sebe kolmé samodružné směry,
- otočení má jediný samodružný bod a žádný samodružný směr,
- středová souměrnost má jediný samodružný bod a všechny směry samodružné,
- identita má všechny body i směry samodružné.

Pokud existuje nějaké další shodné zobrazení, nemůže mít žádný samodružný bod (jinak by to bylo otočení, středová souměrnost, osová souměrnost nebo identita). Naším úkolem je proto vyšetřit, zda **existuje shodné zobrazení bez samodružných bodů, které vznikne složením tří osových souměrností.**

Ukáže se, že takové zobrazení skutečně existuje. Nazveme ho *posunuté zrcadlení* (též *posunutá souměrnost*).

**Definice 23.** Je dána přímka  $o$ . Zobrazení složené z posunutí ve směru přímky  $o$  a osové souměrnosti podle osy  $o$  se nazývá *posunuté zrcadlení* (též *posunutá souměrnost*).



Obrázek 42: Posunuté zrcadlení  $Z : X \rightarrow X'$

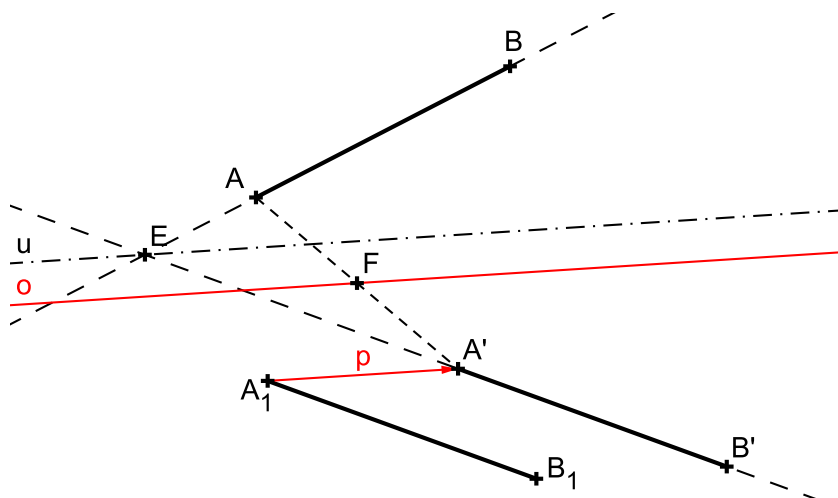


**Věta 30.** Posunuté zrcadlení se dá složit z osové a středové souměrnosti, přičemž střed středové souměrnosti neleží na ose osové souměrnosti.

**Věta 31.** Posunuté zrcadlení nemá samodružné body.

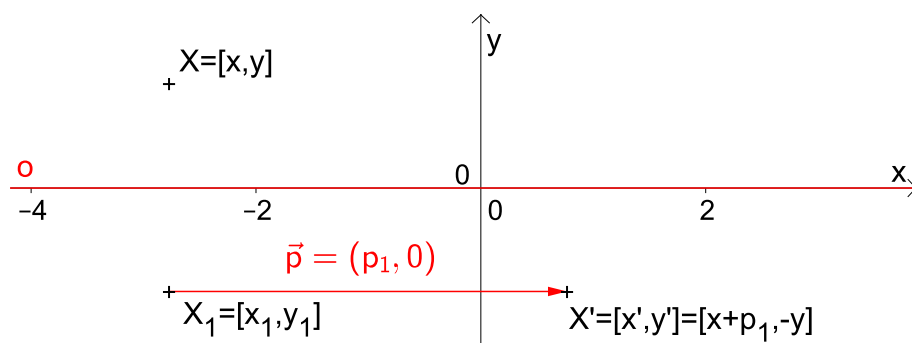
**PŘÍKLAD 9.9.** Necht'  $AB$ ,  $A'B'$  jsou různoběžné a shodné úsečky. Dokažte, že existuje posunuté zrcadlení nebo osová souměrnost, které převádějí body  $A$ ,  $B$  po řadě v body  $A'$ ,  $B'$ .

Řešení:



Obrázek 43: Posunuté zrcadlení  $Z : AB \rightarrow A'B'$

### Analytické vyjádření posunutého zrcadlení



Obrázek 44: Posunuté zrcadlení  $Z : X \rightarrow X'$

Posunuté zrcadlení dané osou souměrnosti v ose  $x$  a vektorem posunutí  $\vec{p} = (p_1, 0)$  (viz Obr. 44)

$$Z : \begin{aligned} x' &= x + p_1, \\ y' &= -y. \end{aligned}$$

## 9.7 Shodnosti v rovině – Cvičení

### Cvičení – Osová souměrnost

4. Napište rovnice souměrnosti podle přímky  $o : 2x - 3y + 1 = 0$ .

5. Sestrojte trojúhelník  $ABC$ , je-li dán obvod  $o = 12\text{cm}$  a úhly  $\alpha = 60^\circ$ ,  $\beta = 45^\circ$ .

6. Dokažte Vivianiho větu.

**Věta 32** (Vivianiho věta). *V rovnostranném trojúhelníku je hodnota součtu vzdáleností libovolného bodu od stran trojúhelníku konstantní, nezávislá na poloze bodu.*

7. Jsou dány dvě různoběžky  $p$ ,  $q$  a bod  $A$  mimo ně. Najděte body  $B \in p$ ,  $C \in q$  tak, aby obvod trojúhelníku  $ABC$  byl minimální.

8. Řešte **Fagnanův problém**: „Danému ostroúhlému trojúhelníku vepište trojúhelník o nejmenším obvodu.“

9. Sestrojte konvexní čtyřúhelník  $ABCD$  se stranami dané velikosti, je-li  $\mapsto AC$  osou vnitřního úhlu při vrcholu  $A$ .

10. Sestrojte čtverec  $ABCD$ , je-li dáno  $a + e = 10\text{cm}$ .

11. Sestrojte obdélník  $ABCD$ , je-li dáno  $e = 7\text{cm}$ ,  $a - b = 1\text{cm}$ .

12. Sestrojte lichoběžník  $ABCD$  ( $AB \parallel CD$ ), je-li dáno  $b = 3\text{cm}$ ,  $c = 2.5\text{cm}$ ,  $d = 2.6\text{cm}$ ,  $\alpha - \beta = 20^\circ$ .

13. **Mascheroniova konstrukce**. Je dána kružnice  $k(S; r)$ ; dále je dána dvěma body  $A$ ,  $B$  (body neleží na kružnici) její sečna  $p$ , která neprochází středem  $S$ . Sestrojte průsečíky přímky  $p$  s kružnicí  $k$ , aniž přitom použijete pravítka.

14. Dokažte, že body souměrně sdružené s průsečíkem výšek podle stran trojúhelníka, leží na kružnici trojúhelníku opsané.

15. Dokažte následující větu

**Věta 33**. *V každém trojúhelníku dělí osa libovolného vnitřního úhlu protější stranu v poměru stran přilehlých.*

16. Napište rovnice osové souměrnosti, zobrazující počátek na bod  $[1, 5]$ .

17. Je dána přímka  $p$  a dvě kružnice  $k_1$ ,  $k_2$  oddělené přímkou  $p$ . Sestrojte rovnostranný trojúhelník tak, aby na každé z kružnic  $k_1$ ,  $k_2$  byl jeden vrchol a jedna z výšek ležela na přímce  $p$ .

**18.** Jsou dány tři různé přímky  $p_1, p_2, p_3$ , procházející bodem  $S$ ; na přímce  $p_1$  je dán bod  $A \neq S$ . Sestrojte trojúhelník  $ABC$ , jehož osy vnitřních úhlů leží v přímkách  $p_1, p_2, p_3$ .

**19.** Jsou dány tři přímky  $o_1, o_2, o_3$  procházející bodem  $O$ . Na  $o_1$  dán bod  $A_1$ . Sestrojte  $\triangle ABC$  tak, aby  $o_1, o_2, o_3$  byly osami jeho stran a bod  $A_1$  středem strany  $BC$ .

**20.** Jsou dány body  $X, Y$  a přímka  $p$ , která je odděluje. Sestrojte rovnoramenný trojúhelník  $ABC$ , jehož hlavním vrcholem je bod  $C$ , osou souměrnosti přímka  $p$  a jehož ramena mají danou velikost  $a$ . Přímka  $AC$  nechť prochází bodem  $X$  a přímka  $BC$  bodem  $Y$ .

**21.** Je dána přímka  $p$  a body  $A, B$ , ležící ve stejné polorovině s hraniční přímkou  $p$ . Sestrojte bod  $X \in p$  tak, aby  $|\angle AXp| = 2|\angle BXp|$ .

**22.** Jsou dány body  $A, B, C$  a přímka  $p$  kolmá k přímce  $AB$  tak, že prochází bodem  $C$  a body  $A, B$  leží v téže polorovině určené přímkou  $p$ . Sestrojte na přímce  $p$  takový bod  $X$ , aby z něho byla vidět úsečka  $AB$  pod stejným úhlem jako úsečka  $BC$ .

**23.** Obrazy středu  $S$  kružnice opsané trojúhelníku  $ABC$  v osových souměrnostech podle přímek  $BC, AC, AB$  jsou vrcholy trojúhelníku  $A_1B_1C_1$ . Dokažte, že je tento trojúhelník shodný s trojúhelníkem  $ABC$ .

## Otočení

**24.** Jsou dány dvě shodné úsečky  $AB, CD$ . Určete otočení, které zobrazí  $A$  na  $C$  a  $B$  na  $D$ . [2]

**25.** Je dána kružnice  $k(S; r)$  a bod  $P \neq S$ . Bodem  $P$  vedte přímku, na které kružnice vytíná úsečku dané velikosti  $d$ .

**26.** Jsou dány různé rovnoběžné přímky  $a, b, c$  a bod  $A$ , který leží na přímce  $a$ . Sestrojte všechny rovnostranné trojúhelníky  $ABC$ , jejichž vrcholy  $B, C$  leží po řadě na přímkách  $b, c$ .

**27.** Je dána kružnice  $k(S; 3cm)$  a bod  $A$  ( $|SA| = 1.5cm$ ). Sestrojte všechny tětivy  $XY$  kružnice  $k$  o délce  $5.5cm$ , které procházejí bodem  $A$ .

**28.** Je dána kružnice  $k(S; r)$ , bod  $B$  a úsečka délky  $d$  ( $d < 2r$ ). Sestrojte tětivu  $XY$  kružnice  $k$  délky  $d$  tak, aby byla vidět z bodu  $B$  pod úhlem  $60^\circ$ .

Otočení - Úlohy na domácí přípravu

- 29.** Jsou dány dvě rovnoběžné přímky  $a, b$  a mimo ně bod  $C$ . Sestrojte rovnostranný trojúhelník  $ABC$  tak, aby jeho vrcholy  $A, B$  ležely po řadě na přímkách  $a, b$ .
- 30.** Jsou dány kružnice  $k$ , přímka  $p$  a bod  $A$  ležící vně  $k$ . Sestrojte rovnostranný trojúhelník s vrcholem v bodě  $A$  tak, aby zbývající vrcholy ležely na  $k$  a na  $p$ .
- 31.** Při odvalování kružnice po přímce se body soustavy spojené s kružnicí pohybují po trajektoriích, kterým se říká **cykloidy**. Rozlišujeme tři typy cykloid, v závislosti na tom, zda bod leží vně, na nebo uvnitř kružnice. Zobraďte tyto křivky pomocí programu GeoGebra.

### Středová souměrnost

- 32.** Je dána kružnice  $k(O; r)$  a přímka  $p$ , která má od středu  $O$  vzdálenost  $v > 0$ ; dále je dán bod  $S$ , který leží uvnitř poloroviny  $pO$ . Sestrojte úsečku se středem  $S$ , která má krajní body  $K, P$  po řadě na kružnici  $k$  a na přímce  $p$ .
- 33.** Je dána kružnice  $k(S, r)$ . Bodem  $P$ , který leží vně kružnice  $k$ , vedte přímku  $p$ , která protíná kružnici v bodech  $A, B$  tak, že  $A$  je středem úsečky  $BP$ .
- 34.** Je dán úhel  $AVB$  a bod  $S$  jeho vnitřku. Sestrojte na rameni  $VA$  bod  $X$  a na rameni  $VB$  bod  $Y$  tak, aby bod  $S$  byl středem úsečky  $XY$ .
- 35.** Je dána úsečka  $AA_1$  ( $|AA_1| = 5\text{cm}$ ). Sestrojte všechny trojúhelníky  $ABC$ , pro které je  $AA_1$  těžnicí  $t_a$  a pro které platí:  $c = 4\text{cm}, b = 7\text{cm}$ .
- 36.** Je dána úsečka  $AA_1$  ( $|AA_1| = 5\text{cm}$ ). Sestrojte všechny trojúhelníky  $ABC$ , pro které je  $AA_1$  těžnicí  $t_a$  a pro které platí:  $\gamma = 45^\circ, \beta = 60^\circ$ .
- 37.** Jsou dány dvě kružnice  $k_1, k_2$ , které se protínají ve dvou bodech  $Q$  a  $R$ . Bodem  $Q$  vedte přímku, která vytíná na obou kružnicích tětivy stejné délky.

### Středová souměrnost - Úlohy na domácí přípravu

- 38.** Je dán trojúhelník  $ABC$  a jeho vnitřní bod  $M$ . Sestrojte všechny úsečky  $XY$  se středem  $M$  a s krajními body  $X, Y$  na hranici trojúhelníku.
- 39.** Vepište danému rovnoběžníku  $ABCD$  čtverec  $XYUV$  tak, aby na každé straně rovnoběžníku ležel jeden vrchol čtverce.
- 40.** Je dán úhel  $AVB$  a bod  $S$  jeho vnitřku. Sestrojte na rameni  $VA$  bod  $X$  a na rameni  $VB$  bod  $Y$  tak, aby  $XY S$  byl rovnoramenný pravoúhlý trojúhelník s přeponou  $XY$ .
- 41.** Je dána úsečka  $AA_1$ ;  $|AA_1| = 4.5\text{cm}$ . Sestrojte všechny pravoúhlé trojúhelníky  $ABC$  s pravým úhlem při vrcholu  $C$ , v nichž  $AA_1$  je těžnicí  $t_a$  a  $t_b = 6\text{cm}$ .

## Posunutí

- 42.** Jsou dány přímka  $p$  a dvě nesoustředné kružnice  $k_1(S_1, r_1)$ ,  $k_2(S_2, r_2)$ . Veďte přímku rovnoběžnou s přímkou  $p$  tak, aby na ní kružnice  $k_1, k_2$  vytínaly shodné tětivy.
- 43.** Sestrojte čtyřúhelník  $ABCD$ , jehož úhlopříčky svírají pravý úhel, jsou-li dány velikosti úhlopříček  $|AC| = e$ ,  $|BD| = f$  a velikosti úhlů  $|\angle ABC| = 90^\circ$ ,  $|\angle ADC| = \delta$ .
- 44.** Sestrojte lichoběžník, jsou-li dány velikosti jeho stran  $a, b, c, d$ .
- 45.** Sestrojte čtyřúhelník  $ABCD$ , jsou-li dány velikosti jeho stran  $|AB| = a$ ,  $|BC| = b$ ,  $|CD| = c$ ,  $|DA| = d$  a odchylka  $\omega$  přímek  $AD, BC$ .
- 46.** Sestrojte rovnoběžník, jsou-li dány délky jeho stran a velikost úhlu jeho úhlopříček.
- 47.** Sestrojte lichoběžník  $ABCD$ , jsou-li dány délky obou jeho základů  $a, c$  a obou jeho úhlopříček  $e, f$ .
- 48.** Jsou dány dvě různoběžky  $a, b$  a úsečka délky  $r$ . Sestrojte všechny kružnice  $k$  se středem na přímce  $a$ , poloměrem  $r$ , které na přímce  $b$  vytínají tětivu délky  $r$ .

## Posunuté zrcadlení

- 49.** Jsou dány dvě různoběžky  $a, b$  a na nich dva body  $A \neq B$  ( $A$  na  $a$ ,  $B$  na  $b$ ). Určete bod  $X$  na  $a$  a bod  $Y$  na  $b$  tak, aby platilo  $|AX| = |BY|$  a dále aby:
- $XY \parallel p$ , kde  $p$  je daná přímka; [1]
  - $XY = d$ , kde  $d$  je předem daná úsečka; [1]
  - střed úsečky  $XY$  ležel na dané přímce  $q$ . [1]

## 10 Grupa shodností eukleidovského prostoru

**Věta 34.** Každou shodnost v rovině lze složit z nejvýše tří osových souměrností.<sup>12</sup>

### 10.1 Skládání shodných zobrazení

(a) Přímoúhelnou shodnost lze rozložit v sudý počet osových souměrností, nepřímou shodnost v lichý počet osových souměrností.

(b) Složíme-li dvě shodnosti přímé nebo dvě shodnosti nepřímé, dostaneme shodnost přímou; složíme-li shodnost přímou a nepřímou, vznikne shodnost nepřímá.

### 10.2 Grupa shodností v rovině

Poznatky získané řešením výše uvedených příkladů nasvědčují tomu, že množina shodností v rovině spolu s operací skládání zobrazení tvoří grupu. Některé podmnožiny množiny shodností navíc tvoří spolu s operací skládání zobrazení podgrupy.

**PŘÍKLAD 10.1.** *Ověřte následující tvrzení:*

(a) *Všechny shodnosti v rovině tvoří grupu  $G_S$ .*

(b) *Všechny přímé shodnosti tvoří podgrupu  $G'_S$  grupy  $G_S$ .*

(c) *Množina všech translací doplněná identitou, tvoří grupu, která je podgrupou grupy přímých shodností.*

(d) *Množina všech translací a středových souměrností, doplněná identitou, tvoří podgrupu grupy  $G'_S$ .*

**PŘÍKLAD 10.2.** *Trojúhelník  $ABC$  byl převeden otočením daného smyslu se středem  $S$  a úhlem velikosti  $\omega = 120^\circ$  v trojúhelník  $A_1B_1C_1$ , který byl dále převeden posunutím  $\mathcal{T}(A_1 \rightarrow A_2)$  v trojúhelník  $A_2B_2C_2$ . Určete otočení, které převádí přímo  $\triangle ABC$  v  $\triangle A_2B_2C_2$ .*

**PŘÍKLAD 10.3.** *Je dán rovnostranný trojúhelník  $ABC$ . Najděte všechny shodnosti, které převádějí tento trojúhelník do něho samého. Zkoumejte vlastnosti množiny těchto shodností spolu s operací skládání shodností.*

---

<sup>12</sup>viz též str. 78, věta 26

### 10.3 Klasifikace shodností roviny

Cílem klasifikace shodností v rovině (obecně afinních zobrazení v prostoru  $A_n$ ) je získat úplný (vyčerpávající) přehled těchto zobrazení a jejich analytických vyjádření. Postupujeme od obecné podoby rovnice zobrazení. Z té analýzou všech možných konfigurací samodružných bodů a směrů, které toto zobrazení připouští, dostaneme úplný přehled všech jeho variant.

**Myšlenka úplné klasifikace shodností:** Klasifikace shodností roviny je založena na zkoumání možných samodružných bodů a směrů zobrazení, které je dáno rovnicí (soustavou lineárních rovnic)

$$f : X' = A \cdot X + B. \quad (90)$$

Tento postup si nejprve ilustrujeme řešením následujícího příkladu, poté provedeme obecnou klasifikaci shodností roviny  $E_2$ , viz str. 91, a trojrozměrného prostoru  $E_3$ , viz str. 96.

**PŘÍKLAD 10.4.** Zjistěte, zda existuje shodnost  $E_2$ , při které se bod  $K = [10; 0]$  zobrazí na počátek  $K' = [0; 0]$  a bod  $L = [25; 20]$  na bod  $L' = [0; 25]$ . V kladném případě napište rovnice tohoto zobrazení a najděte jeho samodružné body.

Než začneme aplikovat níže uvedený postup, stojí za to si u takovýchto úloh ověřit, zda je vůbec splněna definice shodného zobrazení, tj. zda  $|K'L'| = |KL|$ .

*Řešení v programu wxMaxima:*

Definujeme obecnou podobu matic  $A$ ,  $B$  z rovnice (90).

```
(%i30) A:matrix([a11,a12],[a21,a22]); b:matrix([b1],[b2]);
```

```
(%o30)  $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ 
```

```
(%o31)  $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ 
```

Do rovnice (90) dosadíme dané body a jejich obrazy, dostaneme dvojici rovnic  $s_1$  a  $s_2$ . Třetí skupinu rovnic  $s_3$  dostaneme z podmínky  $A^T \cdot A - I = 0$ .

```
(%i32) s1:A.[10,0]+b-[0,0]; s2:A.[25,20]+b-[0,25];  
s3:transpose(A).A-ident(2);
```

```
(%o32)  $\begin{pmatrix} b_1 + 10 a_{11} \\ b_2 + 10 a_{21} \end{pmatrix}$ 
```

$$(\%o33) \begin{pmatrix} b1 + 20 a12 + 25 a11 \\ b2 + 20 a22 + 25 a21 - 25 \end{pmatrix}$$

$$(\%o34) \begin{pmatrix} a21^2 + a11^2 - 1 & a21 a22 + a11 a12 \\ a21 a22 + a11 a12 & a22^2 + a12^2 - 1 \end{pmatrix}$$

Dohromady tak máme soustavu sedmi rovnic o šesti naznamých  $a11$ ,  $a12$ ,  $a21$ ,  $a22$ ,  $b1$ ,  $b2$ .

**(%i35)** `rov:[s1[1,1],s1[2,1],s2[1,1],s2[2,1],s3[1,1],s3[1,2],s3[2,2]];`

$$(\%o35) [b1 + 10 a11, b2 + 10 a21, b1 + 20 a12 + 25 a11, b2 + 20 a22 + 25 a21 - 25, a21^2 + a11^2 - 1, a21 a22 + a11 a12, a22^2 + a12^2 - 1]$$

Soustavu má dvě řešení (nejedná se o soustavu lineárních rovnic, proto může mít dvě řešení).

**(%i36)** `res:solve(rov,[a11,a12,a21,a22,b1,b2]);`

$$(\%o36) [[a11 = \frac{4}{5}, a12 = -\frac{3}{5}, a21 = \frac{3}{5}, a22 = \frac{4}{5}, b1 = -8, b2 = -6], [a11 = -\frac{4}{5}, a12 = \frac{3}{5}, a21 = \frac{3}{5}, a22 = \frac{4}{5}, b1 = 8, b2 = -6]]$$

Dvěma řešeními odpovídají dvě různé shodnosti. Zjistili jsme tedy, že existují dvě shodnosti, které převádějí body  $K, L$  na body  $K', L'$  (což se, vzhledem ke větě o určenosti shodného (afinního) zobrazení dalo čekat). Pokračujeme v řešení úlohy pro každou z těchto shodností zvlášť. Nejprve si připravíme matici `RovTr` pro zápis rovnic uvažovaných shodností (není nutnou součástí postupu řešení, jedná se jenom o usnadnění vizuální prezentace rovnic v programu).

**(%i37)** `RovTr:matrix([x1=a11*x+a12*y+b1],[y1=a21*x+a22*y+b2]);`

$$(\%o37) \begin{pmatrix} x1 = a12 y + a11 x + b1 \\ y1 = a22 y + a21 x + b2 \end{pmatrix}$$

I. Shodnost daná rovnicemi

$$\begin{aligned} x1 &= \frac{4x}{5} - \frac{3y}{5} - 8 \\ y1 &= \frac{3x}{5} + \frac{4y}{5} - 6 \end{aligned}$$

Definujeme matice  $A1$ ,  $B1$  tohoto zobrazení a zapíšeme jeho rovnice.



```
(%i38) A1:ev(A,res[1]); B1:ev(b,res[1]);
```

```
(%o38)  $\begin{pmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix}$ 
```

```
(%o39)  $\begin{pmatrix} -8 \\ -6 \end{pmatrix}$ 
```

```
(%i40) R1:ev(RovTr,res[1]);
```

```
(%o40)  $\begin{pmatrix} x1 = -\frac{3y}{5} + \frac{4x}{5} - 8 \\ y1 = \frac{4y}{5} + \frac{3x}{5} - 6 \end{pmatrix}$ 
```

Samodružné body najdeme řešením rovnice  $X = A \cdot X + B$ , pro snazší zpracování programem přepsané do tvaru  $A \cdot X + B - X = 0$ .

```
(%i41) RovSB1:A1.[x,y]+B1-[x,y]; solve([RovSB1[1,1],RovSB1[2,1]],[x,y]);
```

```
(%o41)  $\begin{pmatrix} -\frac{3y}{5} - \frac{x}{5} - 8 \\ -\frac{y}{5} + \frac{3x}{5} - 6 \end{pmatrix}$ 
```

```
(%o42) [[x = 5, y = -15]]
```

Uvažované shodné zobrazení má tedy jediný samodružný bod  $S = [5, -15]$ .

Pro určení samodružných směrů řešíme charakteristickou rovnici (75) homomorfismu asociovaného s daným shodným zobrazením.

```
(%i43) CharA1:A1-%lambda*ident(2);  
CharR1:expand(determinant(CharA1))=0;  
solve(CharR1,%lambda);
```

```
(%o43)  $\begin{pmatrix} \frac{4}{5} - \lambda & -\frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{4}{5} - \lambda \end{pmatrix}$ 
```

```
(%o44)  $\lambda^2 - \frac{8\lambda}{5} + 1 = 0$ 
```

```
(%o45)  $[\lambda = -\frac{3i-4}{5}, \lambda = \frac{3i+4}{5}]$ 
```

Charakteristická rovnice nemá reálné kořeny. To znamená, že uvažované shodné zobrazení nemá samodružné směry.

Protože uvažované zobrazení má právě jeden samodružný bod a nemá žádný samodružný směr, jedná se o OTOČENÍ.

II. Shodnost daná rovnicemi

$$\begin{aligned}x_1 &= -\frac{4x}{5} + \frac{3y}{5} + 8 \\y_1 &= \frac{3x}{5} + \frac{4y}{5} - 6\end{aligned}$$

Definujeme matice A2, B2 tohoto zobrazení a zapíšeme jeho rovnice.

```
(%i46) A2:ev(A,res[2]); B2:ev(b,res[2]);
```

```
(%o46)  $\begin{pmatrix} -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix}$ 
```

```
(%o47)  $\begin{pmatrix} 8 \\ -6 \end{pmatrix}$ 
```

```
(%i48) R2:ev(RovTr,res[2]);
```

```
(%o48)  $\begin{pmatrix} x_1 = \frac{3y}{5} - \frac{4x}{5} + 8 \\ y_1 = \frac{4y}{5} + \frac{3x}{5} - 6 \end{pmatrix}$ 
```

Samodružné body najdeme řešením rovnice  $X = A \cdot X + B$ , pro snazší zpracování programem přepsané do tvaru  $A \cdot X + B - X = 0$ .

```
(%i49) RovSB2:A2.[x,y]+B2-[x,y]; solve([RovSB2[1,1],RovSB2[2,1]],[x,y]);
```

```
(%o49)  $\begin{pmatrix} \frac{3y}{5} - \frac{9x}{5} + 8 \\ -\frac{y}{5} + \frac{3x}{5} - 6 \end{pmatrix}$ 
```

```
(%o50) []
```

Uvažované shodné zobrazení tedy nemá žádný samodružný bod.

Pro určení samodružných směrů řešíme charakteristickou rovnici (75) homomorfismu asociovaného s daným shodným zobrazením.

```
(%i51) CharA2:A2-%lambda*ident(2);  
CharR2:expand(determinant(CharA2))=0;  
solve(CharR2,%lambda);
```

```
(%o51)  $\begin{pmatrix} -\lambda - \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{4}{5} - \lambda \end{pmatrix}$ 
```

```
(%o52)  $\lambda^2 - 1 = 0$ 
```

```
(%o53)  $[\lambda = -1, \lambda = 1]$ 
```

Charakteristická rovnice má dva reálné kořeny (vlastní čísla). Každému z nich odpovídá jeden vlastní (charakteristický) vektor určující samodružný směr. Postupně dosadíme získaná vlastní čísla  $\lambda$  do soustavy (její matice) (74) a řešíme.

(%i54) `RovSS2:A2.[u,v]-[%lambda*u,%lambda*v];`

$$(%o54) \begin{pmatrix} \frac{3v}{5} - \lambda u - \frac{4u}{5} \\ -\lambda v + \frac{4v}{5} + \frac{3u}{5} \end{pmatrix}$$

(%i55) `RovSS21:ev(RovSS2,%lambda=-1);`  
`solve([RovSS21[1,1],RovSS21[2,1]],[u,v]);`

$$(%o55) \begin{pmatrix} \frac{3v}{5} + \frac{u}{5} \\ \frac{9v}{5} + \frac{3u}{5} \end{pmatrix} \text{ solve : dependentequationseliminated : (2)}$$

$$(%o56) [[u = -3 \%r3, v = \%r3]]$$

První samodružný směr je určen vektorem  $\vec{u}_1 = (-3, 1)$ .

(%i57) `RovSS22:ev(RovSS2,%lambda=1);`  
`solve([RovSS22[1,1],RovSS22[2,1]],[u,v]);`

$$(%o57) \begin{pmatrix} \frac{3v}{5} - \frac{9u}{5} \\ \frac{3u}{5} - \frac{v}{5} \end{pmatrix} \text{ solve : dependentequationseliminated : (2)}$$

$$(%o58) [[u = \frac{\%r4}{3}, v = \%r4]]$$

Druhý samodružný směr je určen vektorem  $\vec{u}_2 = (1, 3)$ .

Protože uvažované zobrazení nemá žádný samodružný bod a má dva (na sebe kolmé) samodružné směry, jedná se o POSUNUTÉ ZRCADLENÍ.

## Klasifikace shodností roviny

Z podmínky  $A^T \cdot A = E$  plyne, že afinní zobrazení určené rovnicemi

$$\begin{aligned} x' &= a_{11}x + a_{12}y + b_1 \\ y' &= a_{21}x + a_{22}y + b_2, \end{aligned}$$

je shodností právě tehdy, když platí následující rovnosti:

$$\begin{aligned} a_{11}^2 + a_{21}^2 &= a_{12}^2 + a_{22}^2 = 1 \\ a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22} &= a_{12}a_{11} + a_{22}a_{21} = 0 \end{aligned}$$

Potom je zřejmé, že existuje úhel  $\alpha \in \langle 0^\circ; 360^\circ \rangle$  takový, že lze napsat

$$\begin{aligned} a_{11} &= \cos \alpha, \\ a_{21} &= \sin \alpha, \\ a_{12} \cos \alpha + a_{22} \sin \alpha &= 0, \\ a_{22} &= \varepsilon \cos \alpha, \\ a_{12} &= -\varepsilon \sin \alpha, \text{ kde } \varepsilon = \pm 1. \end{aligned}$$

Hodnota  $\varepsilon$  určuje, zda se jedná o shodnost přímou ( $\varepsilon = 1$ ) nebo nepřímou ( $\varepsilon = -1$ ).

## I. Přímé shodnosti

Každou přímou shodnost v rovině můžeme vyjádřit rovnicemi ve tvaru

$$\begin{aligned} x'_1 &= x_1 \cos \alpha - x_2 \sin \alpha + b_1 \\ x'_2 &= x_1 \sin \alpha + x_2 \cos \alpha + b_2 \end{aligned}$$

### Samodružné body

Samodružné body přímé shodnosti jsou řešením soustavy rovnic

$$\begin{aligned} x_1(1 - \cos \alpha) + x_2 \sin \alpha &= b_1 \\ -x_1 \sin \alpha + x_2(1 - \cos \alpha) &= b_2. \end{aligned} \tag{91}$$

Nejprve nás bude zajímat přímá shodnost v rovině, která má právě jeden samodružný bod. Soustava (91) má právě jedno řešení, pokud je regulární, tj. pokud pro její determinant platí

$$\begin{vmatrix} (1 - \cos \alpha), & \sin \alpha \\ -\sin \alpha, & (1 - \cos \alpha) \end{vmatrix} \neq 0.$$

Po úpravě dostaneme

$$2(1 - \cos \alpha) \neq 0,$$

což vede k podmínce

$$\cos \alpha \neq 1.$$

Tak dostáváme

### 1) OTOČENÍ (ROTACI).

Stačí volit počátek soustavy souřadné v onom jediném samodružném bodě a dostaneme známé vyjádření rotace kolem počátku o úhel  $\alpha$ :

$$\begin{aligned}x'_1 &= x_1 \cos \alpha - x_2 \sin \alpha \\x'_2 &= x_1 \sin \alpha + x_2 \cos \alpha\end{aligned}$$

### Samodružné směry

Samodružné směry (tj. vektory těchto směrů) přímé shodnosti jsou **netriviálním** řešením soustavy homogenních rovnic

$$\begin{aligned}u_1(\lambda - \cos \alpha) + u_2 \sin \alpha &= 0 \\-u_1 \sin \alpha + u_2(\lambda - \cos \alpha) &= 0.\end{aligned}\tag{92}$$

Ta má netriviální (tj. nekonečně mnoho) řešení právě tehdy, když je splněna charakteristická rovnice přímé shodnosti v rovině

$$\begin{vmatrix}(\lambda - \cos \alpha) & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & (\lambda - \cos \alpha)\end{vmatrix} = 0.\tag{93}$$

Úpravou (93) dostaneme rovnici

$$(\lambda - \cos \alpha)^2 + \sin^2 \alpha = 0,$$

která je splněna za předpokladu, že  $\sin \alpha = 0$  a zároveň  $\cos \alpha = 1 = \lambda$  nebo  $\cos \alpha = -1 = \lambda$ . Pro  $\cos \alpha = -1$  tak dostáváme

### 2) STŘEDOVOU SOUMĚRNOST

s analytickým vyjádřením

$$\begin{aligned}x'_1 &= -x_1 + b_1 \\x'_2 &= -x_2 + b_2.\end{aligned}$$

Za podmínky, že  $\cos \alpha = 1$  dostaneme, pro  $b_1 = b_2 = 0$ ,

### 3) IDENTITU

$$\begin{aligned}x'_1 &= x_1 \\x'_2 &= x_2\end{aligned}$$

a pro  $b_1 \neq 0 \vee b_2 \neq 0$  dostáváme

### 4) POSUNUTÍ

$$\begin{aligned}x'_1 &= x_1 + b_1 \\x'_2 &= x_2 + b_2.\end{aligned}$$

## II. Nepřímé shodnosti

Každou nepřímou shodnost v rovině můžeme vyjádřit rovnicemi ve tvaru

$$\begin{aligned}x'_1 &= x_1 \cos \alpha + x_2 \sin \alpha + b_1 \\x'_2 &= x_1 \sin \alpha - x_2 \cos \alpha + b_2.\end{aligned}$$

### Samodružné směry

K vyšetření nepřímých shodností použijeme samodružné směry. Řešením charakteristické rovnice

$$\begin{vmatrix}(\lambda - \cos \alpha) & -\sin \alpha \\ -\sin \alpha & (\lambda + \cos \alpha)\end{vmatrix} = 0, \quad (94)$$

dostaneme podmínku

$$\lambda = \pm 1,$$

kteřá odpovídá tomu, že uvažované zobrazení má dva navzájem kolmé samodružné směry. Jeden, pro  $\lambda = 1$ , se zachovává, druhý, pro  $\lambda = -1$ , se mění v opačný. Volme soustavu souřadnou tak, aby osa  $x$  měla směr odpovídající  $\lambda = 1$ . Směr osy  $y$  pak zřejmě odpovídá  $\lambda = -1$ . Potom je nepřímá shodnost popsána rovnicemi

$$\begin{aligned}x'_1 &= x_1 + b_1 \\x'_2 &= -x_2 + b_2.\end{aligned}$$

Pokud je  $b_1 = 0$ , má uvažované zobrazení **přímku samodružných bodů** a jedná se tedy o

#### 5) OSOVOU SOUMĚRNOST

$$\begin{aligned}x'_1 &= x_1 \\x'_2 &= -x_2 + b_2.\end{aligned}$$

Pokud je ale  $b_1 \neq 0$ , má pouze **samodružnou přímku** a jedná se o

#### 6) POSUNUTÉ ZRCADLENÍ.

## 10.4 Cvičení – Shodnosti v rovině

**50.** Určete parametr  $s$  tak, aby existovala shodnost roviny zobrazující body  $[0, 0]$ ,  $[3, 4]$  po řadě na body  $[5, 0]$ ,  $[9, s]$ . Napište rovnice tohoto zobrazení a souřadnice obrazu bodu  $[5, 0]$ . [2]

**51.** Určete  $a$ ,  $b$ ,  $c$  tak, aby rovnice  $x' = \frac{3}{4}x + by + 1$ ,  $y' = ax + cy - 1$  vyjadřovaly shodnost. [3]

**52.** Shodné zobrazení euklidovské roviny do euklidovského prostoru je dáno vzhledem ke kartézským soustavám souřadnic rovnicemi

a)  $x' = x + \frac{1}{2}y + 1$ ,  $y' = ax + \frac{1}{2}y - 1$ ,  $z' = bx + cy + 3$ ,

b)  $x' = x + by - 2$ ,  $y' = \frac{1}{2}y + 1$ ,  $z' = ax + cy - 3$ .

Určete koeficienty  $a$ ,  $b$ ,  $c$ .

**53.** Najděte souřadnice obrazu bodu  $B = [1, 2]$  v otočení v  $E_2$  kolem středu  $S = [3, -4]$  o úhel  $\alpha = 420^\circ$ . Napište rovnice této shodnosti.

**54.** Určete  $p$ ,  $q$  tak, aby existovala shodnost zobrazující body  $[3, 0]$ ,  $[1, 2]$ ,  $[-1, -1]$  po řadě na body  $[1, 4]$ ,  $[p, 2]$ ,  $[2, q]$ . Najděte samodružné body a směry tohoto zobrazení.

**55.** Napište rovnice středové souměrnosti v  $E_2$  podle středu  $S = [-4, 5]$ .

**56.** Napište rovnice shodnosti roviny  $E_2$ , která vznikne složením tří osových souměrností s osami o rovnicích:  $x = 0$ ,  $y = 0$ ,  $x - 2y = 0$ .

**57.** Rotace kolem bodu  $S = [2; 1]$  v  $E_2$  zobrazuje bod  $A = [1; 1]$  na bod  $A'$ . Najděte souřadnice bodu  $A'$ , jestliže pro úhel rotace  $\alpha$  platí  $\alpha = \frac{2}{3}\pi$ .

**58.** Najděte souřadnice středu a úhel rotace, která je dána rovnicemi:  $x' = \frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y + 1$ ,  $y' = \frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y - 2$ .

**59.** Najděte rovnice obrazu přímky  $p$  v rotaci v  $E_2$  kolem středu  $S = [-2; 1]$  o úhel  $\alpha = \frac{\pi}{6}$ , jestliže  $p : x - y + 1 = 0$ .

## 10.5 Klasifikace shodností prostoru $E_3$

**Věta 35.** Každé shodné zobrazení v prostoru  $E_3$  lze složit z nejvýše čtyř rovinových souměrností.

**Některá shodná zobrazení v prostoru:**

- Otočení kolem osy
- Posunutí
- Osová souměrnost
- Středová souměrnost
- Šroubový pohyb (torze)

Postup klasifikace shodností v trojrozměrném prostoru lze nečekaně zjednodušit. Vhodné umístění soustavy souřadnic nám dovolí využívat poznatky z klasifikace shodností v rovině.

Každé shodné zobrazení  $f$  v prostoru můžeme zapsat soustavou rovnic

$$\begin{aligned}f : \quad x'_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + b_1 \\x'_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + b_2 \\x'_3 &= a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + b_3,\end{aligned}$$

kterou lze užitím matic přepsat do tvaru

$$f : \begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

a pak stručně vyjádřit rovnicí

$$f : X' = A \cdot X + B. \tag{95}$$

Stejně jako v rovině i v prostoru platí, že (95) je shodností právě tehdy, když je

$$A^T \cdot A = E, \tag{96}$$

Důležitou skutečností je, že charakteristická rovnice tohoto zobrazení, která se dá stručně zapsat ve tvaru

$$\det(A - \lambda E) = 0, \tag{97}$$



kde  $E$  je jednotková matice, je algebraickou rovnicí **třetího stupně** vzhledem k neznámé  $\lambda$ . Vzhledem k tomu, že imaginární kořeny se vyskytují vždy ve dvojicích (navzájem komplexně sdružených čísel), má algebraická rovnice třetího stupně vždy alespoň jeden kořen reálný. V případě rovnice (97) ho označme  $\lambda_0$ . Shodnost v  $E_3$  má tak vždy alespoň jeden samodružný směr  $\vec{u}$ ;  $\vec{u}' = \lambda_0 \vec{u}$ . V případě shodností se zachovává velikost vektoru, tj. platí  $\|\vec{u}'\| = \|\lambda_0 \vec{u}\| = \|\vec{u}\|$ . Potom je zřejmé, že hodnota  $\lambda_0$  bude 1 nebo  $-1$ . Předpokládejme, že vektor  $\vec{u}$  je jednotkový a volme soustavu souřadnou tak, aby měla osa  $z$  směr tohoto vektoru. Při takto zvolené soustavě souřadné se rovnice shodnosti zjednoduší na tvar

$$\begin{aligned} x'_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 && + b_1 \\ x'_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 && + b_2 \\ x'_3 &= && \pm x_3 + b_3. \end{aligned}$$

Potom je požadavek, aby byla matice tohoto zobrazení

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \pm 1 \end{bmatrix}$$

ortonormální, splněn právě tehdy, když je ortonormální matice

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}.$$

To je ale úloha, kterou jsme řešili při klasifikaci shodností v rovině. Víme tedy, že při vhodné volbě os  $x, y$  připadají v úvahu následující možnosti, jak může tato matice vypadat:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}; \quad \text{pro } \sin \alpha \neq 0.$$

Ke každé z těchto matic existují dvě soustavy rovnic (protože uvažujeme  $\pm z$ ). Posouzením množin samodružných bodů příslušných zobrazení a vhodnými volbami soustavy souřadné se dobereme k výsledné klasifikaci:

**1) IDENTITA** ( $b_1 = b_2 = b_3 = 0$ ) nebo **POSUNUTÍ**

$$\begin{aligned} x'_1 &= x_1 + b_1 \\ x'_2 &= x_2 + b_2 \\ x'_3 &= x_3 + b_3. \end{aligned}$$

**2) SOUMĚRNOST PODLE ROVINY** ( $b_1 = b_2 = 0$ ) nebo

SOUMĚRNOST PODLE ROVINY složená s POSUNUTÍM podél této roviny

$$\begin{aligned}x'_1 &= x_1 + b_1 \\x'_2 &= x_2 + b_2 \\x'_3 &= -x_3 + b_3.\end{aligned}$$

3) SOUMĚRNOST PODLE OSY rovnoběžné se  $z$  ( $b_3 = 0$ ) nebo

SOUMĚRNOST PODLE OSY rovnoběžné se  $z$  složená s POSUNUTÍM podél této osy

$$\begin{aligned}x'_1 &= -x_1 + b_1 \\x'_2 &= -x_2 + b_2 \\x'_3 &= x_3 + b_3.\end{aligned}$$

4) STŘEDOVÁ SOUMĚRNOST

$$\begin{aligned}x'_1 &= -x_1 + b_1 \\x'_2 &= -x_2 + b_2 \\x'_3 &= -x_3 + b_3.\end{aligned}$$

5) OTOČENÍ kolem osy rovnoběžné se  $z$  ( $b_3 = 0$ ) nebo

OTOČENÍ kolem osy rovnoběžné se  $z$  složené s POSUNUTÍM podél této osy

$$\begin{aligned}x'_1 &= x_1 \cos \alpha - x_2 \sin \alpha + b_1 \\x'_2 &= x_1 \sin \alpha + x_2 \cos \alpha + b_2 \\x'_3 &= x_3 + b_3.\end{aligned}$$

6) OTOČENÍ kolem osy rovnoběžné se  $z$  složené se SOUMĚRNOSTÍ podle roviny kolmé k této ose

$$\begin{aligned}x'_1 &= x_1 \cos \alpha - x_2 \sin \alpha + b_1 \\x'_2 &= x_1 \sin \alpha + x_2 \cos \alpha + b_2 \\x'_3 &= -x_3 + b_3.\end{aligned}$$

### Poznámky.

1. Každá přímá shodnost v prostoru se dá složit z otočení kolem přímky a posunutí podél této přímky. Potom můžeme říci, že každá dvě shodná tělesa v prostoru můžeme ztotožnit posunutím, otočením nebo šroubovým pohybem.

2. Nepřímá shodnost se dostane z přímé přidáním souměrnosti podle roviny.

## 10.6 Cvičení – Shodnosti prostoru $E_3$

60. Ověřte, že rovnicemi

$$\begin{aligned}x' &= \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}y + \frac{2}{3}z + \frac{2}{3} \\y' &= \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}y - \frac{2}{3}z - \frac{2}{3} \\z' &= -\frac{2}{3}x - \frac{2}{3}y - \frac{1}{3}z + \frac{2}{3}\end{aligned}$$

je dáno shodné zobrazení  $E_3$  na sebe, najděte jeho samodružné body a směry.

61. Napište rovnice posunutí v  $E_3$ , v němž se bod  $M = [-2, 3, 1]$  zobrazí na bod  $M' = [5, 0, -4]$ . Najděte souřadnice obrazu bodu  $A = [1, 1, 1]$  v tomto posunutí.

## 10.7 Shodná zobrazení v prostoru $E_n$

**Věta 36.** *Ke každé shodnosti  $f$  v  $E_n$  existuje  $k$  souměrností podle nadrovin tak, že  $f$  je jejich složením,  $k < n + 2$ .*

# 11 Grupa podobností eukleidovského prostoru

## 11.1 Podobné zobrazení

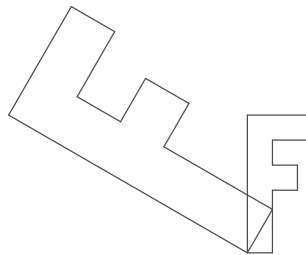
**Definice 24.** Zobrazení  $f$  eukleidovského prostoru  $E$  do eukleidovského prostoru  $E'$  se nazývá **podobné zobrazení**, jestliže existuje kladné reálné číslo  $k$  tak, že pro každé dva body  $X, Y$  prostoru  $E$  a jejich obrazy  $f(X), f(Y)$  z  $E'$  platí:

$$|f(X)f(Y)| = k|XY|. \quad (98)$$

Číslo  $k$  se nazývá *koeficient podobného zobrazení*  $f$ .

**Poznámka.** Podobnosti s koeficientem  $k \neq 1$  nazýváme **vlastní podobnosti**.

**PŘÍKLAD 11.1.** Napište rovnice pro zobrazení v rovině, které každý útvar otočí kolem počátku o úhel  $\alpha$  a dvakrát zvětší, viz Obr. 45.



Obrázek 45: Podobné zobrazení v rovině

**Věta 37.** Každé podobné zobrazení eukleidovského prostoru  $E$  do eukleidovského prostoru  $E'$  lze složit ze **stejnolehlosti prostoru  $E$**  a **shodného zobrazení  $E$  do  $E'$** .

**Věta 38.** Každé podobné zobrazení je *afinní*.

Protože podobná zobrazení jsou afinními zobrazeními, platí pro ně také věta o určenosti. Samozřejmě v podobě, která koresponduje s definicí podobného zobrazení.

**Věta 39** (O určenosti podobného zobrazení). *Nechť jsou  $P_0, P_1, \dots, P_n$  lineárně nezávislé body  $n$ -rozměrného eukleidovského prostoru  $E_n$  a  $P'_0, P'_1, \dots, P'_n$  body eukleidovského prostoru  $E'$ . Afinní zobrazení prostoru  $E_n$  do prostoru  $E'$ , které zobrazuje bod  $P_i$  na bod  $P'_i$  pro  $i = 0, 1, \dots, n$  je právě tehdy podobné, existuje-li číslo  $k > 0$  tak, že pro všechny dvojice  $i, j = 0, 1, \dots, n$  platí  $|P'_i P'_j| = k|P_i P_j|$ .*

**Poznámka.** Body prohlásíme ze *lineárně nezávislé* tehdy, když jimi určené vektory jsou lineárně nezávislé.

**PŘÍKLAD 11.2.** Formulujte „větu o určenosti podobného zobrazení“ pro rovinu, tj. eukleidovský prostor  $E_2$ .<sup>13</sup>

**PŘÍKLAD 11.3.** V euklidovské rovině je dán čtverec  $ABCD$  se středem  $S$ . Existuje právě jedno podobné zobrazení roviny čtverce do sebe, při kterém se body  $A, B, S$  zobrazí po řadě na body  $D, B, C$ . Rozložte toto podobné zobrazení na stejnoolehlost a shodné zobrazení.

**PŘÍKLAD 11.4.** Ukažte, že každé dvě paraboly jsou podobné, tzn. že existuje podobné zobrazení roviny jedné paraboly na rovinu druhé paraboly, při kterém se jedna parabola zobrazí na druhou.

**Věta 40.** Každá „vlastní podobnost“ má právě jeden samodružný bod.

*Důkaz.* Nejprve dokážeme, že vlastní podobnost (tj. podobnost s koeficientem  $k \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$ ) nemůže mít více než jeden samodružný bod, potom dokážeme, že musí mít aspoň jeden. Tak nám vyjde, že musí mít právě jeden.

(i) Skutečnost, že vlastní podobnost nemůže mít více než jeden samodružný bod dokážeme sporem. Nechť má vlastní podobnost  $f$  nejméně dva samodružné body  $K$  a  $L$ ;  $K \xrightarrow{f} K' = K, L \xrightarrow{f} L' = L$ . Potom  $|K'L'| = |KL|$ , což je ve sporu s definicí vlastní podobnosti (98), kde  $k \neq 1$ . Vlastní podobnost tedy nemůže mít více než jeden samodružný bod.

(ii) Nyní dokážeme, že vlastní podobnost musí mít aspoň jeden samodružný bod. Uvažujme podobnost  $f$  s rovnicí  $X' = A \cdot X + B$ , kde  $A^T \cdot A = k^2 I$ . Její samodružné body jsou potom řešením soustavy lineárních rovnic odpovídající maticové rovnici  $(I - A) \cdot X = -B$ . Klíčová pro náš důkaz je skutečnost, že determinant matice této soustavy je pro vlastní podobnost různý od nuly,  $|I - A| \neq 0$ . Pokud by byl roven nule, tj. pokud by platila rovnost  $|I - A| = 0$ , znamenalo by to, že řešením charakteristické rovnice  $|\lambda I - A| = 0$  (viz str. 58) homomorfismu  $\varphi$  asociovaného s  $f$  je vlastní číslo  $\lambda = 1$ . Kdyby tomu tak bylo, existoval by (vlastní) vektor  $\vec{u} = Q - P$ , pro jehož obraz  $\varphi(\vec{u}) = f(Q) - f(P)$  platí  $\varphi(\vec{u}) = \vec{u}$ . Protože se zobrazí sám na sebe, nemění se jeho velikost, tj.  $|f(P)f(Q)| = |PQ|$ , což je ve sporu s definicí vlastní podobnosti (98), kde  $k \neq 1$ . Determinant  $|I - A|$  tedy nemůže být roven nule, soustava  $(I - A) \cdot X = -B$  je proto regulární a má právě jedno řešení.  $\square$

## Grupa podobností

Množina všech podobností eukleidovského prostoru  $E_n$  spolu s operací skládání tvoří grupu - tzv. *grupu podobností prostoru  $E_n$* .

<sup>13</sup>Své řešení porovnejte s větou 42 na str. 102.

## 11.2 Podobnosti eukleidovské roviny

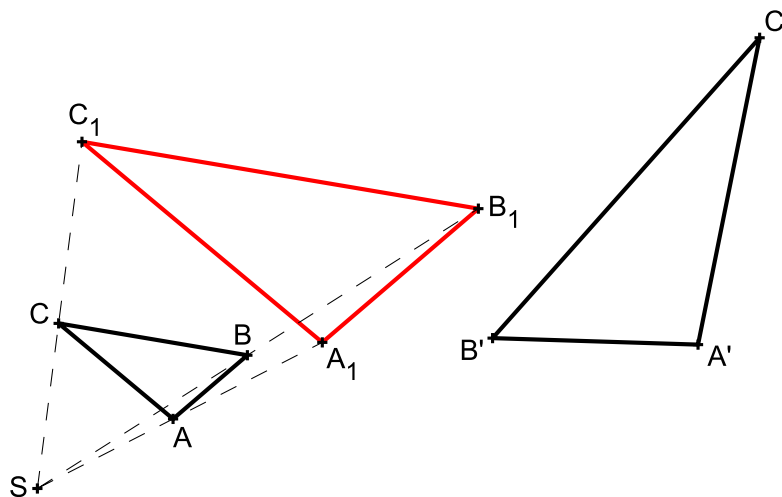
Zopakujme si definici *podobného zobrazení v rovině* (stručně *podobnosti*): Zobrazení  $f$  roviny (eukleidovského prostoru  $E_2$ ) na sebe se nazývá „*podobnou transformací roviny*“ (též „*podobností v rovině*“), jestliže existuje kladné reálné číslo  $k$  tak, že pro každé dva body  $X, Y$  roviny a jejich obrazy  $X', Y'$  platí:

$$|X'Y'| = k|XY|.$$

Číslo  $k$  se nazývá *koeficient podobnosti*  $f$ .

### Poznámky.

1. Každé podobné zobrazení je afinní.
2. Podobnosti s koeficientem  $k \neq 1$  nazýváme *vlastní podobností*.



Obrázek 46: Každou podobnost lze rozložit na stejnolehlost a shodnost

**Věta 41.** Každou podobnost v rovině s poměrem podobnosti  $k$  lze rozložit na stejnolehlost  $H(S, k)$  a shodnost  $Z$ . Přitom střed stejnolehlosti můžeme volit libovolně a shodnost  $Z$  je tím určena jednoznačně.

**Věta 42** (O určenosti podobnosti v rovině). Každá podobnost v rovině je jednoznačně určena trojúhelníkem  $ABC$  a jeho obrazem  $A'B'C'$  takovým, že  $|A'B'| = k|AB|$ ,  $|B'C'| = k|BC|$ ,  $|A'C'| = k|AC|$ , kde  $k, k > 0$ , je koeficient této podobnosti.

Víme, že každé podobné zobrazení eukleidovské roviny do sebe lze složit ze *stejnolehlosti a shodnosti*.

**1. Stejnolehlost**  $H$  volíme se středem v počátku soustavy souřadnic a s koeficientem  $k > 0$  :

$$H : X \mapsto \bar{X}; \quad \bar{x} = kx \\ \bar{y} = ky.$$

**2. Shodnost**  $S$  je buď přímá nebo nepřímá:

$$S : \bar{X} \mapsto X'; \quad x' = \bar{x} \cos \alpha \mp \bar{y} \sin \alpha + p \\ y' = \bar{x} \sin \alpha \pm \bar{y} \cos \alpha + q.$$

Výsledkem složení  $S \circ H$  je potom přímá nebo nepřímá podobnost.

Přímá podobnost	Nepřímá podobnost:
$x' = kx \cos \alpha - ky \sin \alpha + p \\ y' = kx \sin \alpha + ky \cos \alpha + q.$	$x' = kx \cos \alpha + ky \sin \alpha + p \\ y' = kx \sin \alpha - ky \cos \alpha + q.$
$x' = ax - by + p \\ y' = bx + ay + q.$	$x' = ax + by + p \\ y' = bx - ay + q.$
$A^T \cdot A = (a^2 + b^2) \cdot I; \quad k = \sqrt{a^2 + b^2}$	

**Věta 43.** *Každá vlastní podobnost eukleidovské roviny je buď stejnoolehlost, nebo stejnoolehlost složená s otočením kolem středu stejnoolehlosti, nebo stejnoolehlost složená s osovou souměrností, jejíž osa prochází středem stejnoolehlosti.*

### 11.3 Cvičení – Podobnosti

1. Najděte všechny podobnosti euklidovské roviny, při kterých se bod  $[1, 0]$  zobrazí na bod  $[4, -2]$  a bod  $[2, 3]$  na bod  $[2, -8]$ . [2]

2. **Eulerovými body** se nazývají středy úseček spojujících vrcholy trojúhelníku s průsečíkem jeho výšek.

Dokažte následující tvrzení:

Středy stran, paty výšek a Eulerovy body libovolného trojúhelníku leží na jedné kružnici. (*Tato kružnice se nazývá kružnice devíti bodů, Eulerova kružnice nebo Feuerbachova kružnice.*)

3. Najděte podobnost euklidovské roviny, při které se zobrazí počátek na bod  $[0, 2]$ , bod  $[1, 1]$  na počátek a bod  $[2, 0]$  na bod  $[2, p]$ . Určete  $p$  a najděte samodružné body a směry nalezené podobnosti.

4. Najděte rovnice podobnosti, při které je počátek samodružný a obrazem bodu  $[5, -3]$  je bod  $[1, 1]$ .

5. Určete všechny podobnosti, pro které jsou bod  $[1, 1]$  a směr vektoru  $(1, 1)$  samodružné.

6. Napište rovnice všech podobností zobrazujících body  $[1, 2]$  a  $[0, 1]$  po řadě na body  $[3, -1]$ ,  $[4, 2]$ . Rozložte je na stejnoolehlost a shodnost.

7. V rovině je dán čtverec  $ABCD$  se středem  $S$ . Určete obraz bodu  $C$  v podobnosti, která zobrazuje body  $A, B, S$  po řadě na body  $B, D, C$ . Určete samodružný bod této podobnosti.

8. Sestrojte alespoň jeden trojúhelník  $ABC$ , pro který platí  $|AB| : |AC| = 3 : 5$ ,  $\alpha = 60^\circ$ ,  $\rho = 1,8\text{cm}$  (poloměr kružnice vepsané).

9. Sestrojte kosodélník  $ABCD$ , je-li dáno  $|\angle DAB| = \alpha$ ,  $|\angle ABD| = \varepsilon$ ,  $|AC| = e$ .

10. Je dána kružnice  $k$  a bod  $A$ , který je bodem vnější oblasti kružnice  $k$ . Sestrojte všechny sečny kružnice  $k$ , které procházejí bodem  $A$  a pro jejichž průsečíky  $X, Y$  s kružnicí platí  $|AX| = 2|AY|$ .

11. Je dána kružnice  $k(S; 4\text{cm})$ , její tečna  $t$  a bod  $M \in k$  tak, že  $|Mt| = 2\text{cm}$ . Sestrojte úsečku  $XY$  procházející bodem  $M$  tak, aby  $X \in k, Y \in t$  a  $|MX| : |MY| = 3 : 2$ .



**12.** Jsou dány dvě různoběžky  $a, b$  a kružnice  $k$  tak, že  $P \in a \cap b$  je bodem vnitřní oblasti kružnice  $k$ . Sestrojte všechny kružnice, které se dotýkají přímek  $a, b$  i kružnice  $k$ .

**13.** Dokažte následující věty:

**Věta 44** (Menelaova věta). *Je dán trojúhelník  $ABC$  a přímka  $p$ , která neprochází žádným z bodů  $A, B, C$ , ale protíná přímky  $AB, BC, CA$  v bodech  $C', A', B'$ . Potom platí:*

$$(ABC') \cdot (BCA') \cdot (CAB') = 1.$$

*Naopak, platí-li uvedený vztah, body  $A', B', C'$  leží na přímce.*

**Věta 45** (Pappova věta). *Nechť jsou  $A', B', C', D'$  rovnoběžné nebo středové průměty čtyř navzájem různých bodů  $A, B, C, D$  přímky  $p$  na přímku  $p'$ ;  $p' \neq p$ . Potom:*

$$(A'B'C'D') = (ABCD)$$

**Věta 46** (Cevaova věta). *Nechť je dán trojúhelník  $ABC$  a bod  $M$ , který neleží na žádné z přímek  $AB, BC, CA$ . Průsečíky přímek  $AM, BM, CM$  s přímkami  $BC, CA, AB$  (různé od bodů  $A, B, C$ ) označme postupně  $A', B', C'$ . Potom platí:*

$$(ABC') \cdot (BCA') \cdot (CAB') = -1.$$

*Naopak, platí-li uvedený vztah, jsou přímky  $AA', BB', CC'$  buď navzájem rovnoběžné nebo se protínají v jediném bodě.*

**14.** Zobrazení  $f$  euklidovské roviny do euklidovského trojrozměrného prostoru je vzhledem k zvoleným kartézským soustavám souřadnic dáno rovnicemi:  $x' = 2x + ay - 1$ ,  $y' = x + by + 2$ ,  $z' = y + 1$ . Určete koeficienty  $a, b$  tak, aby bylo zobrazení  $f$  podobné. Jaký je koeficient tohoto podobného zobrazení  $f$ ?

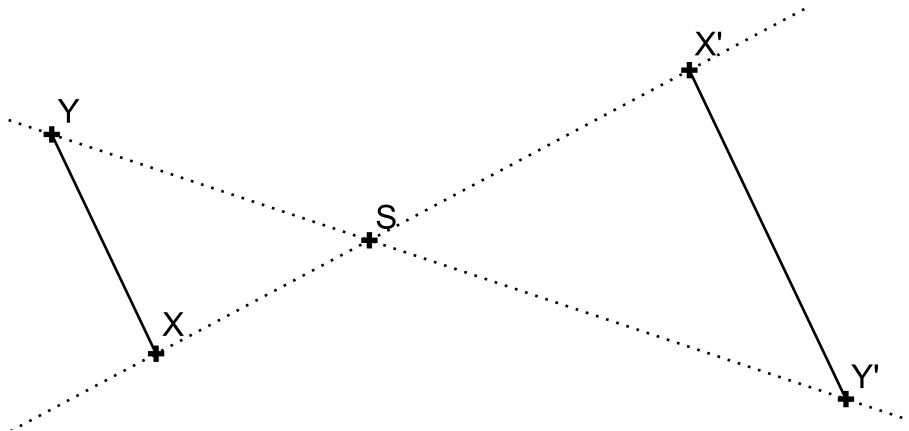
**15.** Určete  $p, q, r$  tak, aby byla rovnicemi  $x' = x - 2y + 2z + 4$ ,  $y' = px + 2y + z - 2$ ,  $z' = qx + ry + 2z - 2$  dána vzhledem ke kartézské soustavě souřadnic podobnost. Určete její samodružný bod a samodružné směry.

## 12 Stejnolehlost

Patří mezi tzv. homotetie, tj. afinní zobrazení, která mají všechny směry samodružné.

**Definice 25.** Budiž dán bod  $S$  a reálné číslo  $\kappa$  (různé od 0 a 1). **Stejnolehlost**  $H(S; \kappa)$  se středem  $S$  a koeficientem  $\kappa$  je zobrazení, které každému bodu  $X$  roviny přiřadí bod  $X'$  tak, že

$$\overrightarrow{SX'} = \kappa \overrightarrow{SX}.$$



Obrázek 47: Stejnolehlost  $H(S, \kappa = -1.5)$

**Poznámka.** Stejnolehlost můžeme definovat i více popisně: Budiž dán bod  $S$  a reálné číslo  $\kappa$  (různé od 0 a 1). **Stejnolehlost**  $H(S; \kappa)$  se středem  $S$  a koeficientem  $\kappa$  je zobrazení, které každému bodu  $X$  roviny přiřadí bod  $X'$  tímto způsobem:

1. Pro  $X \equiv S$  je  $X' \equiv X$ ,
2. Pro  $X \neq S$  je  $|X'S| = |\kappa| \cdot |XS|$ ,

pro  $\kappa > 0$  leží  $X'$  leží na polopřímce  $\overrightarrow{SX}$  a

pro  $\kappa < 0$  leží  $X'$  leží na polopřímce opačné k  $\overrightarrow{SX}$ .

**Poznámka.** Zobrazení inverzní k stejnohlosti  $H(S; \kappa)$  je stejnohlost  $H^{-1}\left(S; \frac{1}{\kappa}\right)$ .

**Základní vlastnosti stejnohlosti  $H(S, \kappa)$ :**

1. Obrazem přímky je přímka s ní rovnoběžná.
2. Obrazem úsečky  $AB$  je úsečka  $A'B'$ ;  $|A'B'| = |\kappa| \cdot |AB|$ .

3. Obrazem polopřímky je polopřímka s ní souhlasně ( $\kappa > 0$ ) nebo nesouhlasně ( $\kappa < 0$ ) rovnoběžná .

4. Obrazem úhlu  $\angle AVB$  je úhel  $\angle A'V'B'$ ;  $|\angle A'V'B'| = |\angle AVB|$ .

**PŘÍKLAD 12.1.** Jsou dány dva různé body  $A, B$  a reálné číslo  $\lambda \neq 0, 1$ . Najděte na přímce  $AB$  bod  $C$  tak, aby platilo  $(ABC) = \lambda$ .

## 12.1 Analytické vyjádření stejnolehlosti

Rovnice stejnolehlosti  $H(S; \kappa)$ :  $H : X' = \kappa X + (1 - \kappa)S$ .

**PŘÍKLAD 12.2.** Napište rovnice stejnolehlosti afinní roviny  $\mathbf{A}_2$ , která zobrazuje bod  $B = [2, 0, -1]$  na bod  $C = [0, 1, 3]$  a má koeficient  $\kappa = -2$ . Najděte souřadnice jejího středu.

Řešení v programu wxMaxima:

```
(%i1) B:[2,0,-1]$ C:[0,1,3]$ S:[s1,s2,s3]$
```

```
(%i4) H:C-S=-2*(B-S);
```

```
(%o4) [-s1, 1 - s2, 3 - s3] = [-2 (2 - s1), 2 s2, -2 (-s3 - 1)]
```

```
(%i5) res:solve(lhs(H)-rhs(H), [s1,s2,s3])[1];
```

```
(%o5) [s1 = 4/3, s2 = 1/3, s3 = 1/3]
```

```
(%i6) S:ev(S,res);
```

```
(%o6) [4/3, 1/3, 1/3]
```

## 12.2 Skládání stejnolehlostí

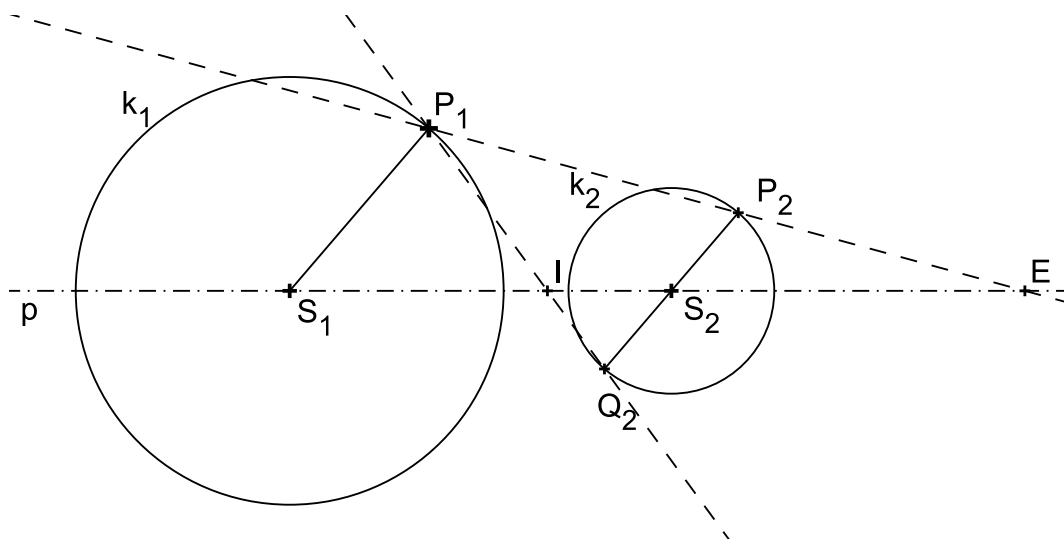
**Věta 47** (O skládání stejnolehlosti a translace). Zobrazení složené ze stejnolehlosti  $H(S; \kappa)$  a translace  $X' = X + \vec{t}$  je stejnolehlost  $H'(Q; \kappa)$ , kde  $Q = S + \frac{1}{1 - \kappa}\vec{t}$ .

**Věta 48** (O skládání stejnolehlostí). Složením dvou stejnolehlostí  $H_1(S_1, \kappa_1)$ ,  $H_2(S_2, \kappa_2)$  vznikne

1. IDENTITA, jestliže  $\kappa_1\kappa_2 = 1$  a  $S_1 = S_2$ ,
2. POSUNUTÍ, jestliže  $\kappa_1\kappa_2 = 1$  a  $S_1 \neq S_2$ ,
3. STEJNOLEHLOST  $H(S, \kappa)$  s koeficientem  $\kappa = \kappa_1\kappa_2$ , jestliže  $\kappa_1\kappa_2 \neq 1$ . Přitom, pro  $S_1 = S_2$  je také  $S = S_1 = S_2$ , pro  $S_1 \neq S_2$  leží bod  $S$  na přímce  $S_1S_2$ .

### 12.3 Stejnolehlost kružnic

Pro dvě kružnice  $k_1(S_1; r_1)$ ,  $k_2(S_2; r_2)$  s různými poloměry existují právě dvě stejnolehlosti, které převádějí kružnici  $k_1$  do kružnice  $k_2$ :  $H_1(E, r_2/r_1)$  a  $H_2(I, -r_2/r_1)$  (Bod  $E$  se někdy označuje jako „vnější střed stejnolehlosti“, bod  $I$  potom jako „vnitřní střed stejnolehlosti“.). Jestliže se kružnice dotýkají v bodě  $T$ , je  $T = I$  v případě vnějšího dotyku a  $T = E$  v případě vnitřního dotyku kružnic.



Obrázek 48: Stejnolehlost kružnic

**PŘÍKLAD 12.3.** Je dána kružnice  $k$ , přímka  $p$ , která je vnější přímkou kružnice  $k$ , a bod  $A \in p$ . Sestrojte všechny kružnice, které se dotýkají přímky  $p$  v bodě  $A$  a kružnice  $k$ .

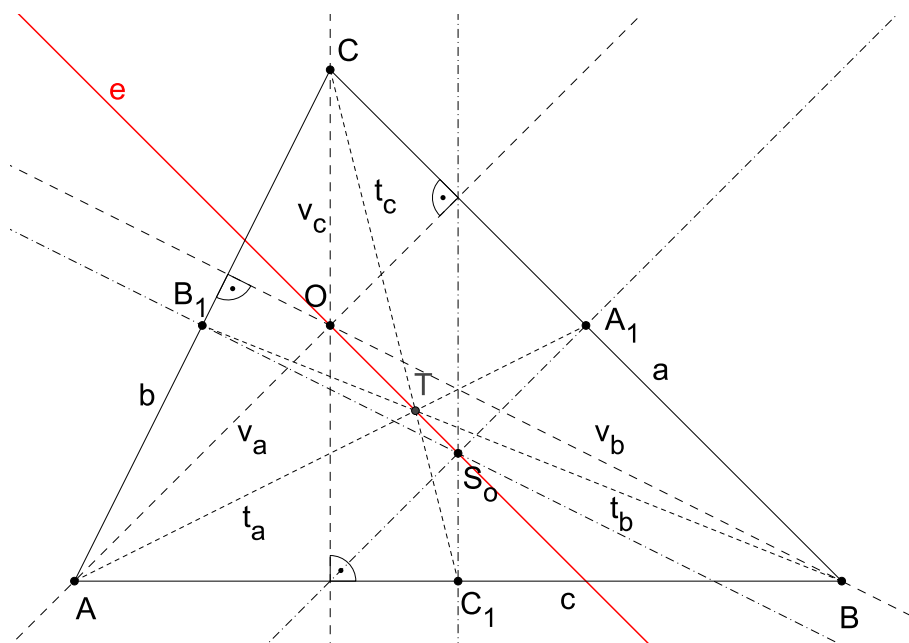
**PŘÍKLAD 12.4.** Jsou dány dvě různoběžky  $a, b$  a bod  $M$ , který leží uvnitř jednoho jejich úhlu. Sestrojte všechny kružnice, které procházejí bodem  $M$  a dotýkají se přímkou  $a, b$ .

**PŘÍKLAD 12.5.** Jsou dány dvě různoběžky  $m, n$  a kružnice  $k$  ležící uvnitř jednoho jejich úhlu. Sestrojte všechny kružnice, které se dotýkají přímkou  $m, n$  i kružnice  $k$ .

**PŘÍKLAD 12.6. (Eulerova přímka)** V trojúhelníku  $ABC$  označme  $T$  těžiště,  $V$  průsečík výšek a  $S$  střed kružnice trojúhelníku opsané. Máme dokázat, že buď všechny tři body splynou v jediný, nebo jsou navzájem různé a leží na jedné přímce (Eulerova přímka) tak, že platí  $(S, V; T) = -\frac{1}{2}$ .

### Eulerova přímka

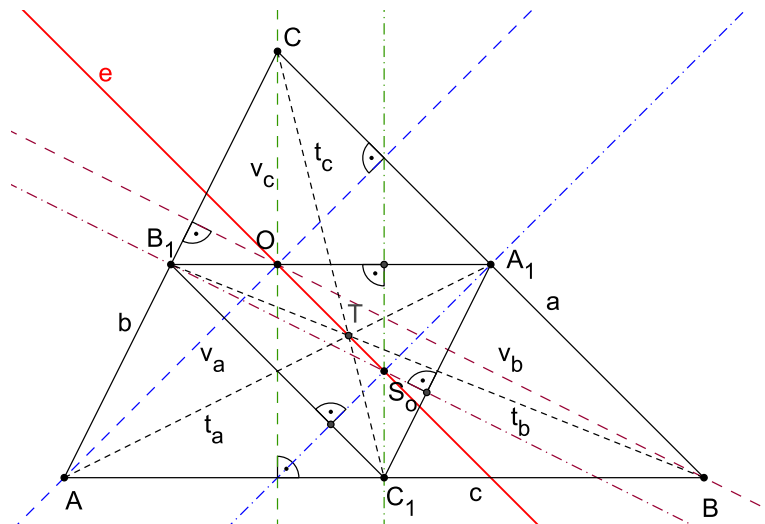
V trojúhelníku  $ABC$  označme  $T$  těžiště,  $O$  průsečík výšek a  $S_o$  střed kružnice trojúhelníku opsané. Potom buď všechny tyto tři body splývají v jediný, nebo jsou navzájem různé a leží na společné přímce tak, že platí  $(S_oOT) = -\frac{1}{2}$ . Tuto přímku nazýváme *Eulerova přímka*, viz Obr. 60.



Obrázek 49: Eulerova přímka

K důkazu výše uvedeného tvrzení využijeme stejnoolehlost  $H(T, -\frac{1}{2})$ . Z Obr. 61 je patrné, že v této stejnoolehlosti se  $\triangle ABC$  zobrazí na  $\triangle A_1B_1C_1$ . Protože výškami (výšky teď chápeme jako přímky)  $\triangle A_1B_1C_1$  jsou osy stran původního  $\triangle ABC$ , můžeme říci, že výšky trojúhelníku  $ABC$  se ve stejnoolehlosti  $H(T, -\frac{1}{2})$  zobrazí na osy jeho stran. Potom se ale průsečík výšek  $O$  zobrazí na průsečík os stran (tj. střed kružnice opsané  $\triangle ABC$ )  $S_o$ . Z vlastností stejnoolehlosti plyne, že příslušné tři body  $O, S_o, T$  leží v přímce a platí pro ně  $(S_oOT) = -\frac{1}{2}$ .

Konstrukce Eulerovy přímky a její souvislost s kružnicí devíti bodů (viz str. 121) je znázorněna v apletu „Eulerova přímka. Kružnice devíti bodů.“



Obrázek 50:  $H(T, -\frac{1}{2}) : \triangle ABC \rightarrow \triangle A_1B_1C_1$

**PŘÍKLAD 12.7. (Kružnice devíti bodů, též Feuerbachova či Eulerova kružnice)** V trojúhelníku  $ABC$  označme  $V$  průsečík výšek,  $S$  střed kružnice opsané,  $C_1, A_1, B_1$  středy stran  $AB, BC, CA$ . Nechť  $k_0$  je kružnice procházející body  $A_1, B_1, C_1$ . Dokažte:

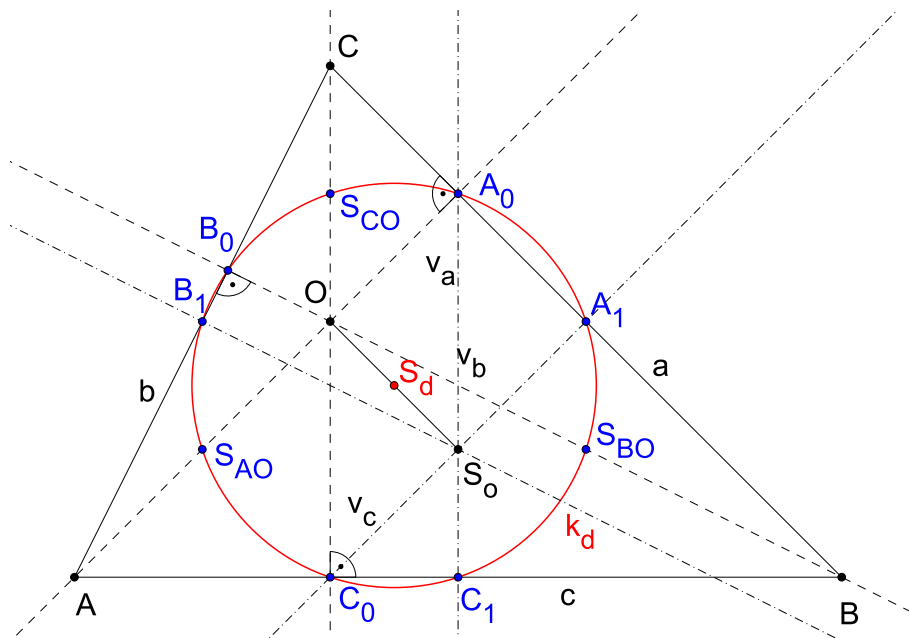
- 1) Na kružnici  $k_0$  leží též paty  $A_0, B_0, C_0$  výšek  $v_a, v_b, v_c$  a středy úseček  $AV, BV, CV$ .
- 2) Střed kružnice  $k_0$  je středem úsečky  $SV$ , pokud  $S \neq V$ ; pokud je  $S \equiv V$  splyne střed  $k_0$  s bodem  $S$ .
- 3) Poloměr kružnice  $k_0$  je roven polovině poloměru kružnice trojúhelníku opsané.

### Kružnice devíti bodů

V trojúhelníku  $ABC$  označme  $O$  průsečík výšek,  $S_o$  střed kružnice opsané,  $C_1, A_1, B_1$  středy stran  $AB, BC$  a  $CA$ . Jestliže  $k_d$  je kružnice procházející body  $A_1, B_1$  a  $C_1$ , potom na ni leží také paty  $A_0, B_0, C_0$  výšek  $v_a, v_b, v_c$  a středy úseček  $AO, BO, CO$ . Tato kružnice se nazývá *kružnice devíti bodů* (též *Feuerbachova* či *Eulerova kružnice*), viz Obr. 59

Střed kružnice  $k_d$  je středem úsečky  $S_oO$ , její poloměr je roven polovině poloměru kružnice trojúhelníku  $ABC$  opsané.

Konstrukce kružnice devíti bodů a její souvislost s Eulerovou přímkou (viz str. 122) je znázorněna v apletu „*Eulerova přímka. Kružnice devíti bodů.*“



Obrázek 51: Kružnice devíti bodů

**PŘÍKLAD 12.8.** Platí tato věta: Jsou-li dány dvě rovnoběžné úsečky různých délek, existují právě dvě stejnolehlosti, které zobrazí první úsečku na druhou. Dokážete je vždy najít?

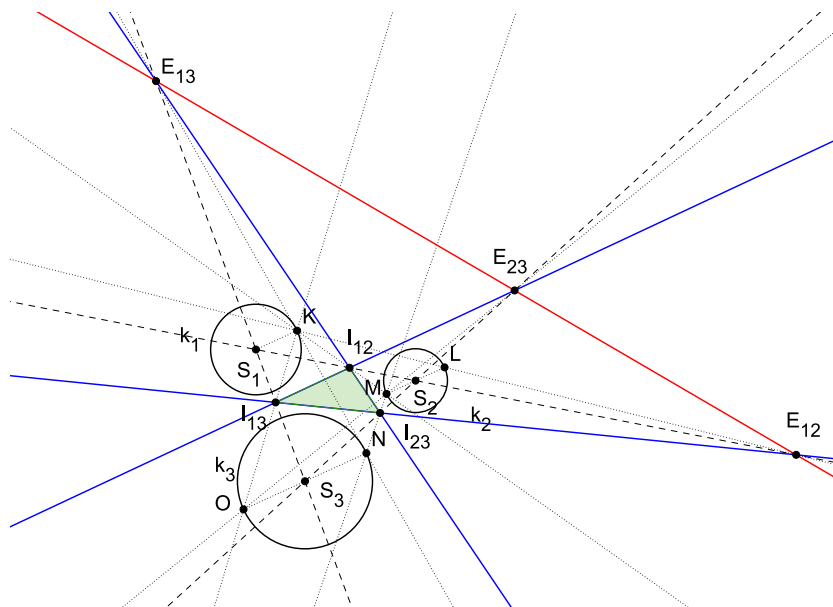
## 12.4 Mongeova věta

Jsou-li dány tři různé kružnice v rovině, vnitřní a vnější středy příslušející každým dvěma z nich jsou dohromady spjaty zajímavými geometrickými vztahy, viz Obr. 52. Ty jsou předmětem *Mongeovy věty*.

**Věta 49** (Mongeova věta). Jsou-li  $k_1, k_2, k_3$  tři kružnice, které mají různé poloměry a jejichž středy neleží v přímce, platí pro vnější a vnitřní středy stejnolehlostí každých dvou z nich následující vztahy:

- i) Všechny tři vnější středy stejnolehlosti  $E_{12}, E_{13}, E_{23}$  leží v přímce.
- ii) Každé dva vnitřní středy stejnolehlosti a jeden vnější leží v přímce.
- iii) Tři vnitřní středy stejnolehlosti  $I_{12}, I_{13}, I_{23}$  neleží v přímce.

*Důkaz.* V důkazu využijeme tvrzení věty 48, že složením stejnolehlostí s různými středy vznikne pro  $\kappa_1\kappa_2 \neq 1$  stejnolehlost, jejíž střed leží na přímce určené středy těchto stejnolehlostí. Pak už stačí mezi danými třemi kružnicemi najít tři stejnolehlosti takové, že jedna z nich je složením zbývajících dvou. Dynamický GeoGebra aplet k důkazu je na adrese <https://www.geogebra.org/m/osR9mHs8>.  $\square$



Obrázek 52: Mongeova věta o třech kružnicích v rovině

## 12.5 Cvičení – Stejnolehlost

**62.** Do půlkruhu s průměrem  $AB$  vepište čtverec  $KLMN$  tak, aby strana  $KL$  ležela na úsečce  $AB$  a další dva vrcholy  $M, N$  na dané půlkružnici.

**63.** Je dána přímka  $p$ , kružnice  $k$  a bod  $A$ . Sestrojte všechny úsečky  $XY$  tak, aby platilo:  $X \in p, Y \in k, A \in XY, |AY| = 3|AX|$ .

**64.** Jsou dány dvě různoběžky  $a, b$  a kružnice  $k$  tak, že  $a$  je sečnou a  $b$  je vnější přímkou kružnice  $k$ . Sestrojte všechny kružnice, které se dotýkají přímkou  $a, b$  i kružnice  $k$ .

**65.** Sestrojte trojúhelník  $ABC$ , je-li dáno:

a)  $v_a = 5\text{cm}, a : b : c = 2 : 3 : 4$ ,

b)  $\alpha, \beta, v_c$ ,

c)  $\alpha, \beta, t_c$ ,

d)  $a : b = 3 : 5, \gamma = 60^\circ, t_c = 6\text{cm}$ .

Stejnolehlost – Úlohy na domácí přípravu

**66.** Určete  $p$  tak, aby existovala stejnohlost se středem  $[3, 2]$ , zobrazující bod  $[1, 4]$  na bod  $[2, p]$ . Napište rovnice této stejnohlosti. [2]

**67.** Je dána kružnice  $k$  a bod  $M$  uvnitř této kružnice. Sestrojte všechny tětivy kružnice, které jsou bodem  $M$  rozděleny na části v poměru  $2 : 3$ . [1]

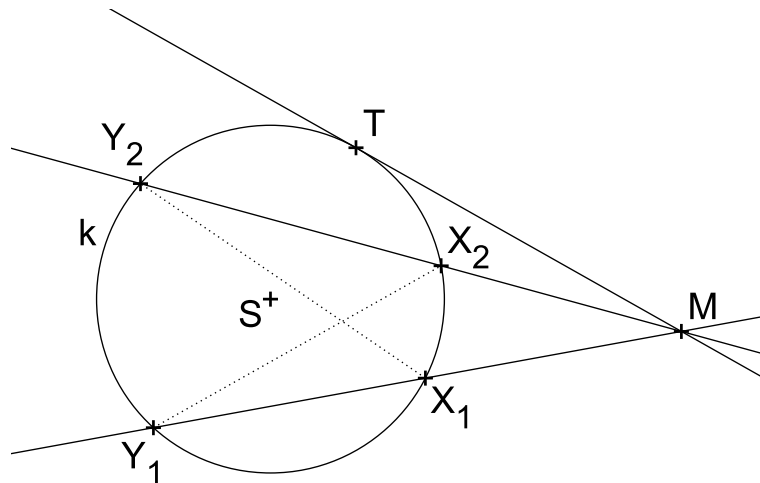
**68.** Narýsujte libovolný trojúhelník  $ABC$ . Uvnitř strany  $AC$  sestrojte bod  $X$  a uvnitř strany  $BC$  bod  $Y$  tak, aby platilo  $|AX| = |XY|$  a  $XY \parallel AB$ . [2]



### 13 Mocnost bodu ke kružnici

**Definice 26.** Mocností bodu  $M$  ke kružnici  $k(S; r)$  rozumíme reálné číslo  $m$ , pro které platí:

- (1)  $|MX| \cdot |MY| = |m|$ , kde  $X, Y$  jsou průsečíky kružnice  $k$  s její libovolnou sečnou procházející bodem  $M$ .
- (2) Je-li  $M$  vnějším bodem kružnice  $k$ , je  $m > 0$ .
- (3) Je-li  $M$  vnitřním bodem kružnice  $k$ , je  $m < 0$ .
- (4) Je-li  $M \in k$ , je  $m = 0$ .



Obrázek 53: Mocnost bodu  $M$  ke kružnici  $k$

**Věta 50.** Je dána kružnice  $k(S; r)$  a bod  $M$ , který na ní neleží. Potom pro libovolné dvě sečny kružnice  $k$ , které procházejí bodem  $M$ , jejichž průsečíky s kružnicí  $k$  označíme  $X_1, Y_1$  a  $X_2, Y_2$ , platí

$$|MX_1| \cdot |MY_1| = |MX_2| \cdot |MY_2|.$$

**Věta 51.** Nechť je dána kružnice  $k(S; r)$  a bod  $M$ . Potom pro mocnost  $m$  bodu  $M$  ke kružnici  $k$  platí

$$m = d^2 - r^2,$$

kde  $d = |MS|$  je vzdálenost bodu  $M$  od středu kružnice  $k$ .

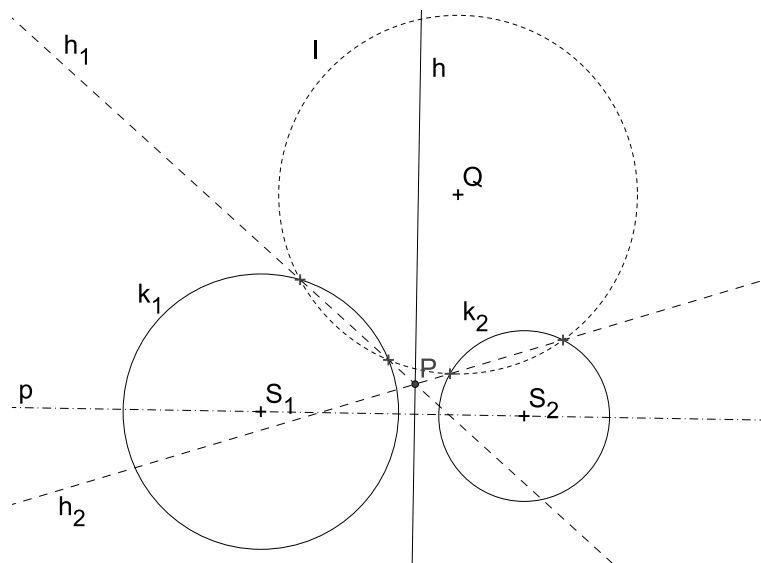
**Věta 52.** Nechť  $M$  je vnější bod kružnice  $k(S; r)$ ,  $m$  jeho mocnost ke kružnici  $k$ . Jestliže  $T$  je dotykový bod tečny vedené z bodu  $M$  ke kružnici  $k$ , tak platí  $|MT|^2 = m$ .

### 13.1 Chordála a potenční střed

**Věta 53** (Chordála dvojice kružnic). *Nechť jsou  $k_1(S_1; r_1), k_2(S_2; r_2)$  dvě nesoustředné kružnice. Množina bodů  $X$ , které mají k oběma kružnicím stejnou mocnost, je přímka  $h \perp S_1S_2$ . Jestliže kružnice  $k_1, k_2$  mají společný bod  $M$ , potom přímka  $h$  prochází tímto bodem.*

**Poznámka.** Přímka  $h$ , která je množinou bodů  $X$ , majících stejnou mocnost k nesoustředným kružnicím  $k_1, k_2$  se nazývá **chordála** (též potenční přímka) kružnic  $k_1, k_2$ .

**Poznámka.** Bod, který má ke třem vzájemně různým kružnicím stejnou mocnost se nazývá **potenční bod** (též potenční střed).



Obrázek 54: Chordála  $h$  kružnic  $k_1, k_2$ , potenční bod  $P$  kružnic  $k_1, k_2, l$

#### Analytické vyjádření chordály

Chordálu kružnic  $k_1(S_1[m_1, n_1], r_1), k_2(S_2[m_2, n_2], r_2)$  s rovnicemi  $k_1 : (x - m_1)^2 + (y - n_1)^2 = r_1^2$  a  $k_2 : (x - m_2)^2 + (y - n_2)^2 = r_2^2$  můžeme analyticky vyjádřit rovnicí:

$$(x - m_1)^2 + (y - n_1)^2 - r_1^2 = (x - m_2)^2 + (y - n_2)^2 - r_2^2 \quad (99)$$

**PŘÍKLAD 13.1.** *Sestrojte chordálu dvou nesoustředných kružnic  $k_1, k_2$ , které nemají společný bod.*

**PŘÍKLAD 13.2.** Určete analyticky množinu všech bodů roviny, které mají ke dvěma daným kružnicím stejnou mocnost.

**PŘÍKLAD 13.3.** Sestrojte kružnici  $k$ , která prochází danými body  $A \neq B$  a dotýká se dané přímky  $t$ .

### 13.2 Cvičení – Mocnost bodu ke kružnici

**69.** Je dán úhel  $\angle AVB$  a uvnitř něho bod  $M$ . Sestrojte kružnici, která prochází bodem  $M$  a dotýká se přímek  $AV, BV$ .

**70.** Obdélník má velikosti stran  $a, b$ . Máme sestrojit

a) libovolný obdélník stejného obsahu,

b) obdélník stejného obsahu, jehož jedna strana má danou velikost  $c$ .

**71.** Jsou dány dvě nesoustředné kružnice  $k_1, k_2$  a přímka  $p$ . Na této přímce určete bod  $P$  tak, aby tečny z něho vedené ke kružnicím  $k_1, k_2$  měly stejnou délku.

**72.** Sestrojte kružnici, která se dotýká dané kružnice  $k(S; r)$  a prochází dvěma různými body  $A, B$ , které leží vně dané kružnice  $k$ .

**73.** Je dán lichoběžník  $ABCD$  se základnami  $AB, CD$ ,  $|AB| > |CD|$ . Uvnitř úsečky  $AD$  sestrojte bod  $P$  a uvnitř úsečky  $BC$  bod  $Q$  tak, aby platilo zároveň  $PQ \parallel AB$  a  $PC \parallel AQ$ .

**74.** Sestrojte lichoběžník  $ABCD$ , jsou-li dány délky jeho ramen  $|BC| = 4.5\text{cm}$ ,  $|DA| = 3\text{cm}$  a velikost  $75^\circ$  úhlu, který svírají přímky  $BC$  a  $AD$ , platí-li navíc  $|AB \parallel CD| = |AC|^2$ .

## 14 Vybrané věty z planimetrie

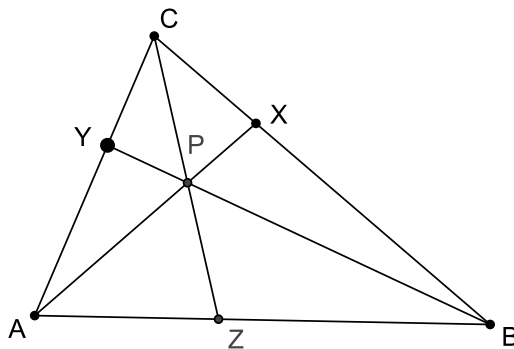
### 14.1 Cevova věta a její užití

*Giovanni Ceva* byl italský matematik žijící na přelomu 17. a 18. století. *Cevova věta* stanovuje podmínku, kdy mají tři přímky procházející vrcholy trojúhelníku společný bod.

**Věta 54** (Cevova věta). *V trojúhelníku  $ABC$  se přímky  $AX$ ,  $BY$  a  $CZ$ , kde body  $X, Y, Z$  leží na stranách protilehlých odpovídajícím vrcholům, protínají v jednom bodě právě tehdy, když platí:*

$$\frac{|AZ|}{|ZB|} \cdot \frac{|BX|}{|XC|} \cdot \frac{|CY|}{|YA|} = 1.$$

*Důkaz:* Poměry úseček, které figurují v Cevově větě, převedeme na poměry obsahů trojúhelníků, které mají tyto úsečky jako základny a přitom mají stejné výšky, viz Obr. 55.



Obrázek 55: Cevova věta

$$\frac{|AZ|}{|ZB|} = \frac{S_{AZC}}{S_{BZC}} = \frac{S_{AZP}}{S_{BZP}} = \frac{S_{AZC} - S_{AZP}}{S_{BZC} - S_{BZP}} = \frac{S_{ACP}}{S_{BPC}},$$

$$\frac{|BX|}{|XC|} = \frac{S_{BXA}}{S_{CXA}} = \frac{S_{BXP}}{S_{CXP}} = \frac{S_{BXA} - S_{BXP}}{S_{CXA} - S_{CXP}} = \frac{S_{BPA}}{S_{CPA}},$$

$$\frac{|CY|}{|YA|} = \frac{S_{CYB}}{S_{AYB}} = \frac{S_{CYP}}{S_{AYP}} = \frac{S_{CYB} - S_{CYP}}{S_{AYB} - S_{AYP}} = \frac{S_{CPB}}{S_{APB}}.$$

Potom

$$\frac{|AZ|}{|ZB|} \cdot \frac{|BX|}{|XC|} \cdot \frac{|CY|}{|YA|} = \frac{S_{ACP}}{S_{BPC}} \cdot \frac{S_{BPA}}{S_{CPA}} \cdot \frac{S_{CPB}}{S_{APB}} = 1.$$

*Q.E.D.*

Klasický, ale i počítačový důkaz Cevovy věty, spolu s jejím zobecněním, najde zájemce také v online dostupné publikaci [11].

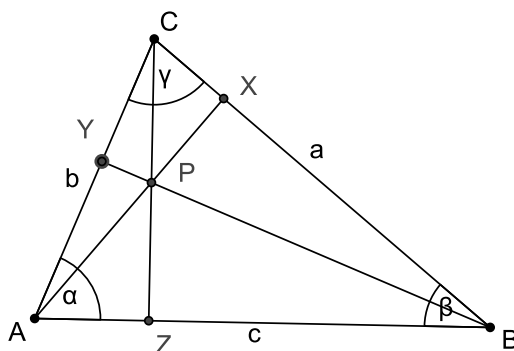
**PŘÍKLAD 14.1.** *Užitím Cevovy věty dokažte, že se těžnice v trojúhelníku protínají v jednom bodě.*

*Řešení:* Body  $X, Y, Z$  jsou středy stran trojúhelníku. Potom

$$\frac{|AZ|}{|ZB|} \cdot \frac{|BX|}{|XC|} \cdot \frac{|CY|}{|YA|} = \frac{1}{1} \cdot \frac{1}{1} \cdot \frac{1}{1} = 1.$$

**PŘÍKLAD 14.2.** *Užitím Cevovy věty dokažte, že se výšky v trojúhelníku protínají v jednom bodě (tj. ceviány kolmé na protilehlé strany trojúhelníku mají jeden společný bod).*

*Řešení:* Viz Obr. 56.



Obrázek 56: Cevova věta pro výšky

$$\frac{|AZ|}{|ZB|} \cdot \frac{|BX|}{|XC|} \cdot \frac{|CY|}{|YA|} = \frac{b \cos \alpha}{a \cos \beta} \cdot \frac{c \cos \beta}{b \cos \gamma} \cdot \frac{a \cos \gamma}{c \cos \alpha} = 1.$$

**PŘÍKLAD 14.3.** *Užitím Cevovy věty dokažte, že osy vnitřních úhlů trojúhelníku se protínají v jednom bodě.*

**Věta 55.** *Osa vnitřního úhlu trojúhelníku rozděluje protilehlou stranu na dvě části, jejichž délky jsou ve stejném poměru jako jim přilehlé strany trojúhelníku.*

### Cvičení – Cevova věta

**75.** Nechť  $X, Y, Z$  jsou body dotyku stran trojúhelníku s jemu vepsanou kružnicí. Dokažte, že jim odpovídající ceviány se protínají v jednom bodě.

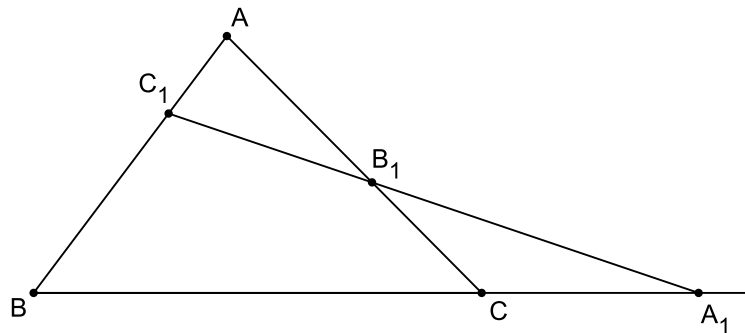
**76.** Nechť  $ABC, A'B'C'$  jsou dva různé trojúhelníky, které mají rovnoběžné sobě odpovídající strany. Potom mají přímky  $AA', BB'$  a  $CC'$  společný bod. Dokažte.

## 14.2 Menelaova věta

*Menelaus z Alexandrie* byl řecký matematik žijící na přelomu 1. a 2. století n. l. *Menelaova věta* se zabývá vztahem trojúhelníku a přímky, která neprochází žádným z jeho vrcholů a není rovnoběžná s žádnou z jeho stran<sup>14</sup>. Tak, jako *Ceova věta* poskytuje kritérium pro existenci společného bodu tří přímk, tak *Menelaova věta* poskytuje kritérium kolineárnosti tří bodů.

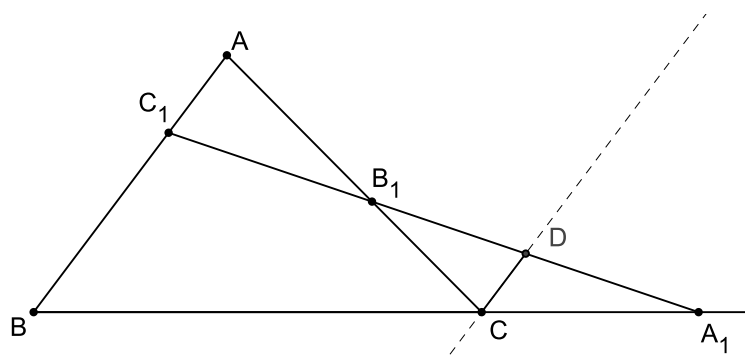
**Věta 56** (Menelaova věta). *Body  $A_1, B_1, C_1$  ležící na stranách trojúhelníku  $ABC$  nebo na jejich prodlouženích jsou kolineární právě tehdy, když platí:*

$$\frac{|BA_1|}{|A_1C|} \cdot \frac{|CB_1|}{|B_1A|} \cdot \frac{|AC_1|}{|C_1B|} = 1. \quad (100)$$



Obrázek 57: Menelaova věta

*Důkaz.* K důkazu věty využijeme podobnosti trojúhelníků. Vyjdeme z Obr. 58, který dostaneme z Obr. 57 doplněním úsečky  $CD$  rovnoběžné se stranou  $AB$ , bod  $D$  přitom leží na přímce  $A_1C_1$ . Vidíme v něm dvě dvojice podobných trojúhelníků:



Obrázek 58: Důkaz Menelaovy věty užitím podobnosti trojúhelníků

<sup>14</sup>Vztahu takové přímky a daného trojúhelníku se týká též *Paschův axiom*: Jestliže přímka prochází vnitřním bodem jedné strany trojúhelníku, potom prochází vnitřním bodem už jenom právě jedné ze dvou zbývajících stran, pokud neprochází vrcholem. Třetí stranu protíná v jejím „vnějším“ bodě. Moritz Pasch (1843–1930) byl německý matematik.

$\triangle C_1B_1A \sim \triangle DB_1C$  a  $\triangle BA_1C_1 \sim \triangle CA_1D$ . Přitom z podobnosti první uvedené dvojice trojúhelníků vyplývá vztah

$$\frac{|AC_1|}{|AB_1|} = \frac{|CD|}{|CB_1|}, \quad (101)$$

z podobnosti druhé dvojice trojúhelníků pak vyplývá

$$\frac{|BA_1|}{|C_1B|} = \frac{|A_1C|}{|CD|}. \quad (102)$$

Po vydělení rovnosti (101) rovností (102) a následné úpravě dostaneme dokazovaný vztah

$$\frac{|BA_1|}{|A_1C|} \cdot \frac{|CB_1|}{|B_1A|} \cdot \frac{|AC_1|}{|C_1B|} = 1.$$

□

Vztah (100) uvedený v Menelaově větě lze formulovat také pomocí *dělicího poměru* (viz str. 17). Připomeňme si, že zlomky ze vztahu (100) lze psát takto:

$$\frac{|BA_1|}{|A_1C|} = |(BCA_1)|, \quad \frac{|CB_1|}{|B_1A|} = |(CAB_1)|, \quad \frac{|AC_1|}{|C_1B|} = |(ABC_1)|.$$

Protože je zřejmé, že přímka  $A_1C_1$  nemůže protnout všechny tři strany trojúhelníku  $ABC$  v jejich vnitřních bodech, bude součin uvedených dělicích poměrů vždy kladný. Vztah (100) tak můžeme přepsat do podoby

$$(ABC_1) \cdot (BCA_1) \cdot (CAB_1) = 1. \quad (103)$$

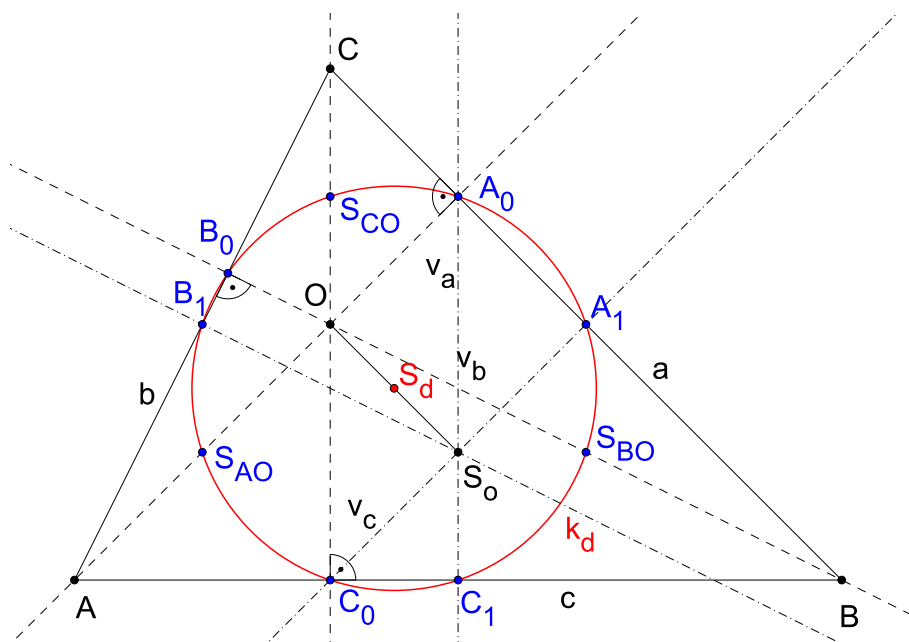
Klasický i počítačový důkaz této věty, spolu s jejím zobecněním, najde zájemce také v online dostupné publikaci [11].



### 14.3 Kružnice devíti bodů

V trojúhelníku  $ABC$  označme  $O$  průsečík výšek,  $S_o$  střed kružnice opsané,  $C_1, A_1, B_1$  středy stran  $AB, BC$  a  $CA$ . Jestliže  $k_d$  je kružnice procházející body  $A_1, B_1$  a  $C_1$ , potom na ni leží také paty  $A_0, B_0, C_0$  výšek  $v_a, v_b, v_c$  a středy úseček  $AO, BO, CO$ . Tato kružnice se nazývá *kružnice devíti bodů* (též *Feuerbachova* či *Eulerova kružnice*), viz Obr. 59

Střed kružnice  $k_d$  je středem úsečky  $S_oO$ , její poloměr je roven polovině poloměru kružnice trojúhelníku  $ABC$  opsané.

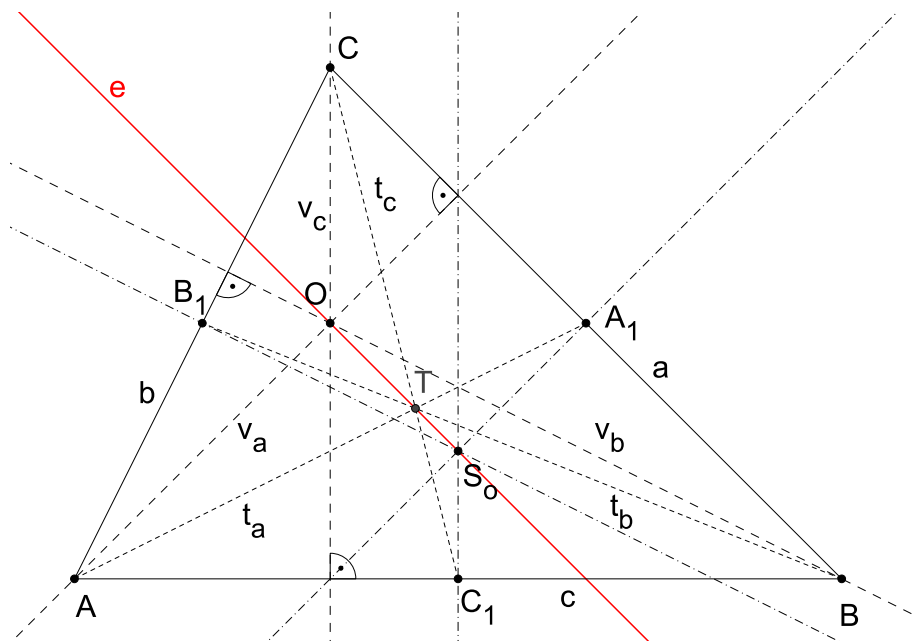


Obrázek 59: Kružnice devíti bodů

Konstrukce kružnice devíti bodů a její souvislost s Eulerovou přímkou (viz str. 122) je znázorněna v apletu „*Eulerova přímka. Kružnice devíti bodů.*“

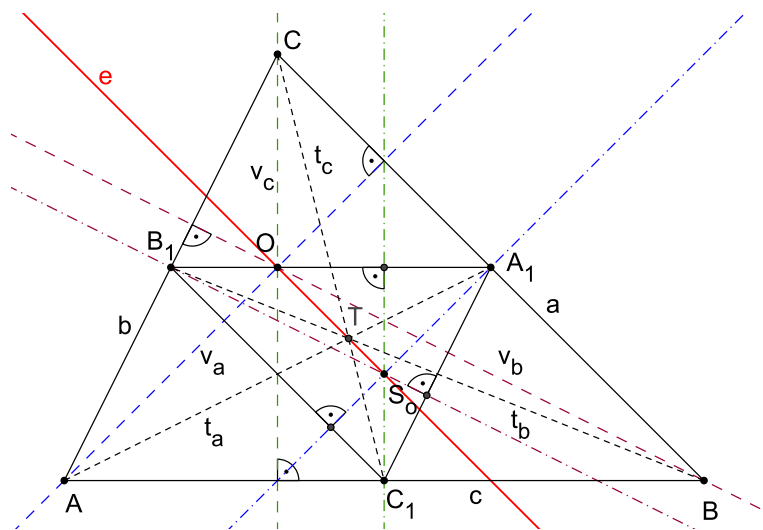
## 14.4 Eulerova přímka

V trojúhelníku  $ABC$  označme  $T$  těžiště,  $O$  průsečík výšek a  $S_o$  střed kružnice trojúhelníku opsané. Potom buď všechny tyto tři body splývají v jediný, nebo jsou navzájem různé a leží na společné přímce tak, že platí  $(S_oOT) = -\frac{1}{2}$ . Tuto přímku nazýváme *Eulerova přímka*, viz Obr. 60.



Obrázek 60: Eulerova přímka

K důkazu výše uvedeného tvrzení využijeme stejnoolehlost  $H(T, -\frac{1}{2})$ . Z Obr. 61 je patrné, že v této stejnoolehlosti se  $\triangle ABC$  zobrazí na  $\triangle A_1B_1C_1$ . Protože výškami



Obrázek 61:  $H(T, -\frac{1}{2}) : \triangle ABC \rightarrow \triangle A_1B_1C_1$

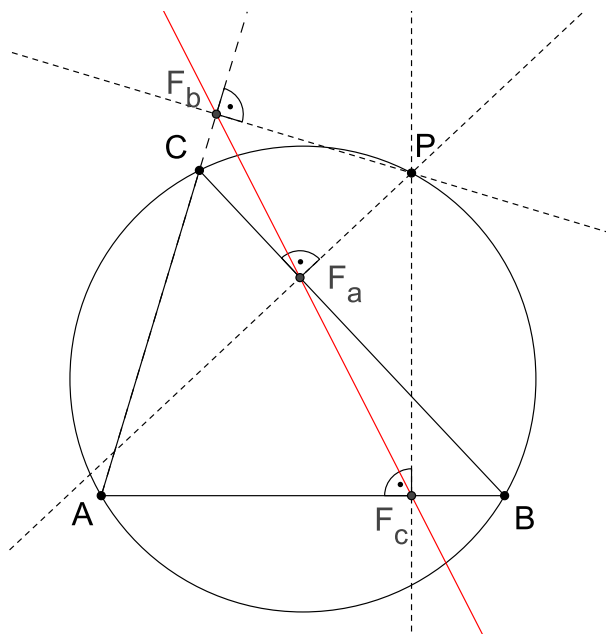
(výšky teď chápeme jako přímky)  $\triangle A_1B_1C_1$  jsou osy stran původního  $\triangle ABC$ , můžeme říci, že výšky trojúhelníku  $ABC$  se ve stejnolehlosti  $H(T, -\frac{1}{2})$  zobrazí na osy jeho stran. Potom se ale průsečík výšek  $O$  zobrazí na průsečík os stran (tj. střed kružnice opsané  $\triangle ABC$ )  $S_o$ . Z vlastností stejnolehlosti plyne, že příslušné tři body  $O, S_o, T$  leží v přímce a platí pro ně  $(S_oOT) = -\frac{1}{2}$ .

Konstrukce Eulerovy přímky a její souvislost s kružnicí devíti bodů (viz str. 121) je znázorněna v apletu „*Eulerova přímka. Kružnice devíti bodů.*“

## 14.5 Simsonova přímka

*Robert Simson* (1687–1768) byl skotský matematik. I když se přímka zmiňovaná v této kapitole většinou spojuje s jeho jménem, uvedenou vlastnost zřejmě objevil až v roce 1797 jiný skotský matematik, *William Wallace* (1768–1843).

Uvažujme libovolný bod  $P$  roviny trojúhelníku  $ABC$ , jehož kolmé průměty na (dle potřeby prodloužené) strany  $BC$ ,  $CA$  a  $AB$  tohoto trojúhelníku označíme po řadě  $F_a$ ,  $F_b$  a  $F_c$ . Potom body  $F_a$ ,  $F_b$  a  $F_c$  leží na přímce (jsou kolineární) právě tehdy, když bod  $P$  leží na kružnici opsané trojúhelníku  $ABC$ . Takováto přímka potom existuje ke každému bodu  $P$  opsané kružnice a nazývá se *Simsonova přímka* bodu  $P$ .



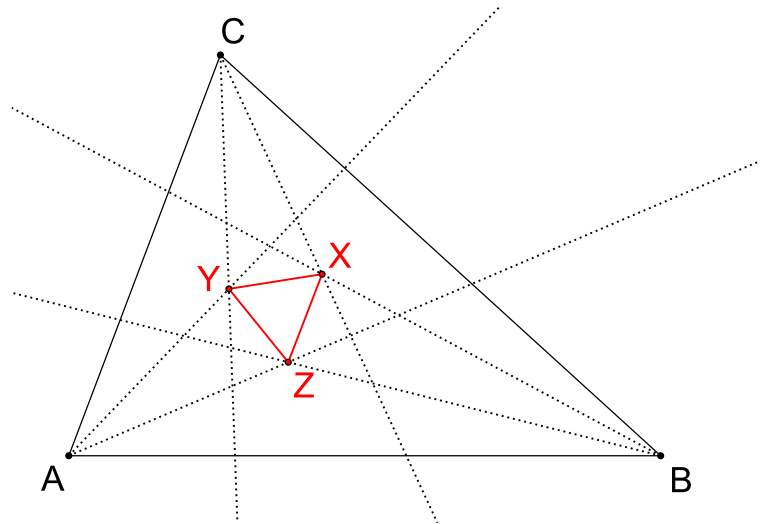
Obrázek 62: Simsonova přímka

Tvrzení o Simsonově přímce je známo též jako *Wallace–Simsonova věta*. Klasický i počítačový důkaz této věty, spolu s jejím zobecněním, najde zájemce v online dostupné publikaci [11]. Důkaz tvrzení lze najít také v [9], str. 82.

## 14.6 Morleyova věta

*Morleyova věta* představuje jednu z nejpřekvapivějších vlastností elementární geometrie, kterou v roce 1899 objevil a dokázal anglo-americký matematik *Frank Morley* (1860–1937).

**Věta 57** (Morleyova věta). *Polopřímky, které dělí vnitřní úhly libovolného trojúhelníku na třetiny, se protínají ve vrcholech rovnostranného trojúhelníku (viz Obr. 63).*



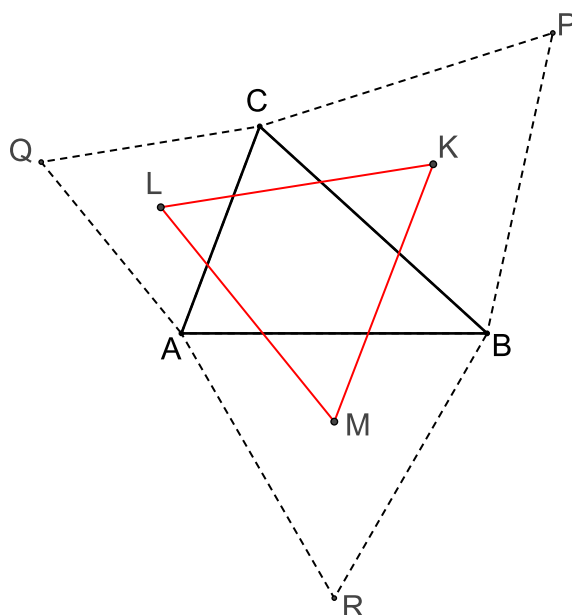
Obrázek 63: Morleyova věta: Pro libovolný  $\triangle ABC$  je  $\triangle XYZ$  rovnostranný

Důkaz viz [9], str. 86.

## 14.7 Napoleonova věta

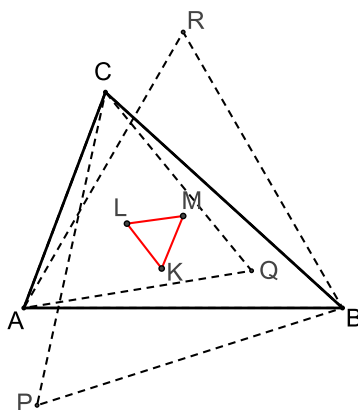
Stejně jako *Morleyova věta*, tak i následující věta, pojmenovaná podle *Napoleona Bonaparta* (1769–1821), popisuje vlastnost, která obecnému trojúhelníku přiřazuje trojúhelník rovnostranný.

**Věta 58** (Napoleonova věta). *Jestliže jsou nad stranami libovolného trojúhelníku sestaveny rovnostranné trojúhelníky, potom jejich středy (tj. např. těžiště) tvoří rovnostranný trojúhelník.*



Obrázek 64: Napoleonova věta: Pro libovolný  $\triangle ABC$  je  $\triangle KLM$  rovnostranný

**Poznámka.** Stejná vlastnost platí i pro středy rovnostranných trojúhelníků sestavených nad stranami libovolného trojúhelníku ve směru dovnitř, viz Obr. 65.



Obrázek 65: „Vnitřní Napoleonův trojúhelník“

## 15 Inverze

V této kapitole se nejprve seznámíme s inverzí jako takovou, potom se zaměříme na její konkrétní příklady, *sférickou inverzi* v trojrozměrném prostoru a *kruhovou inverzi* v rovině. Kruhové inverzi se budeme podrobně věnovat i v příští kapitole. Otázka inverzí je pojednána v [14] na str. 83–92.

**Definice 27** (Inverze). *Inverze se středem  $S$  a koeficientem  $\kappa$  ( $\kappa \neq 0$ ) v eukleidovském prostoru  $E_n$  je zobrazení množiny  $E_n - \{S\}$  na sebe, které každý bod  $X$  zobrazí na bod  $X'$  tak, že*

a) pro  $\kappa > 0$  jsou polopřímky  $SX, SX'$  totožné, pro  $\kappa < 0$  jsou potom opačné,

$$b) |SX| = \frac{|\kappa|}{|SX'|}.$$

Je zřejmé, že body  $S, X$  (vzor) a  $X'$  (obraz) jsou kolineární. K určení inverze stačí zadat střed  $S$  a dvojici bodů, např.  $A, A'$ , ve vztahu *vzor a obraz*.

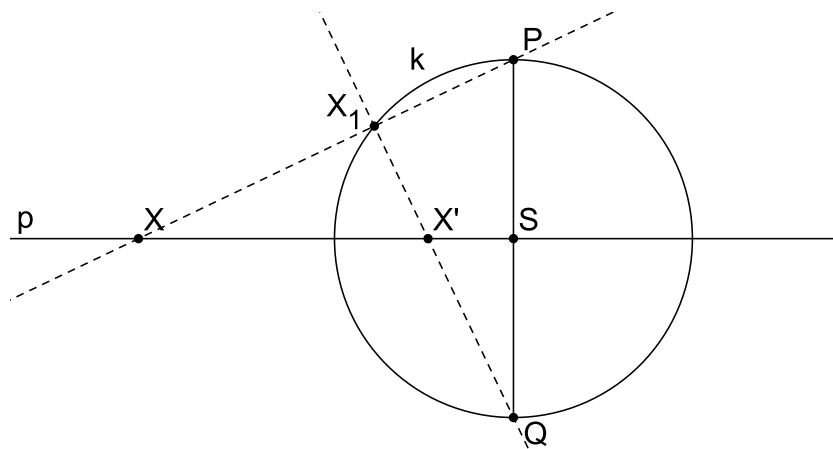
**Poznámka.** Definice inverze je na první pohled analogická s definicí stejnolehlosti. Definice těchto dvou zobrazení v eukleidovském prostoru se liší akorát ve vztahu mezi vzdálenostmi  $|SX'|$  a  $|SX|$ . Zatímco u stejnolehlosti je  $|SX'|$  přímo úměrná  $|SX|$  (tj.  $|SX'| = \kappa|SX|$ , kde  $\kappa$  je koeficient stejnolehlosti), u inverze je  $|SX'|$  nepřímo úměrná  $|SX|$  (tj.  $|SX'| = \frac{\kappa}{|SX|}$ , kde  $\kappa$  je koeficient inverze).

**PŘÍKLAD 15.1.** *Dokažte, že zobrazení v rovině, jehož princip je naznačen na Obr. 66 (kružnice  $k$  má střed  $S$  a poloměr  $r$ ; body  $X, X'$  a  $S$  leží v přímce  $p$ ), splňuje definici inverze.*

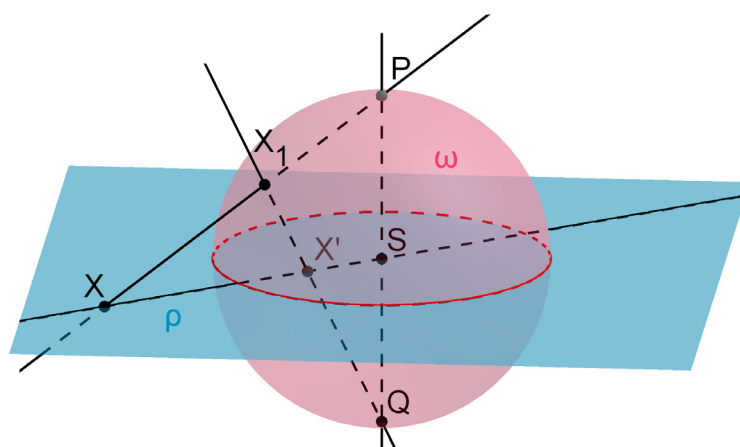
*Řešení:* Z podobnosti trojúhelníků  $\triangle SXP \sim \triangle SQX'$  vyplývá vztah  $|SX'| = \frac{r^2}{|SX|}$ . Zobrazení tak splňuje definici inverze dané středem  $S$  a koeficientem  $\kappa = r^2$ , kde  $r$  je poloměr dané kružnice  $k$ . Jedná se o tzv. *kruhovou inverzi* určenou kružnicí  $k$ . Tomuto zobrazení se budeme podrobně věnovat v kapitole 16. Tam si také uvedeme ještě jeden mechanismus přiřazení obrazu danému bodu v kruhové inverzi.

### 15.1 Sférická inverze

Nyní uvažujme trojrozměrnou variantu Obr. 66, kde místo kružnice  $k$  figuruje sféra (kulová plocha)  $\omega$  se středem  $S$  a poloměrem  $r$  a místo přímky  $p$  je dána rovina  $\rho$



Obrázek 66: Inverze v rovině



Obrázek 67: Inverze v prostoru – Sférická inverze

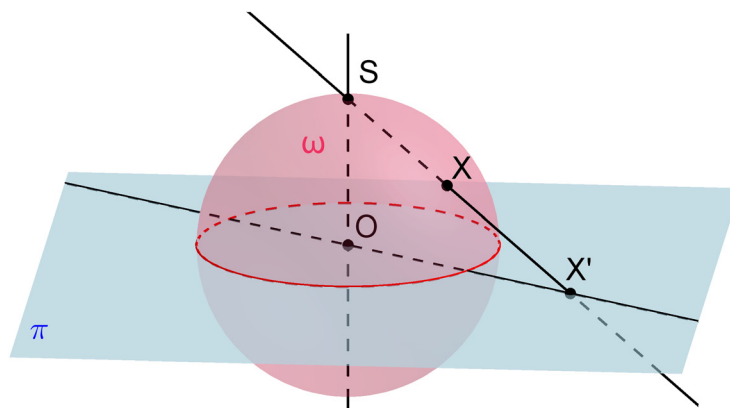
procházející bodem  $S$ , kolmo na spojnici dvou diametrálně protilehlých bodů (pólů)  $P, Q$ , viz Obr. 67.

Jedná se o tzv. *sférickou inverzi* určenou sférou (kulovou plochou)  $\omega$  se středem  $S$  a poloměrem  $r$ . Opět, tak jako v případě rovinné varianty z příkladu 15.1, není obtížné dokázat, že toto zobrazení přiřazující bodu  $X \in \rho$  obraz  $X' \in \rho$  splňuje definici 27. Postup tohoto přiřazení lze přitom popsat pomocí složení dvou zobrazení, z nichž jedno je tzv. *stereografická projekce* a druhé je zobrazení k této projekci inverzní.

## 15.2 Stereografická projekce

Pojednání o tomto zobrazení a jeho vlastnostech lze najít např. v [7]. Zde je také uvedena informace, že se stereografickým průmětem pracoval již Hipparchos kolem roku 150 př. n. l.





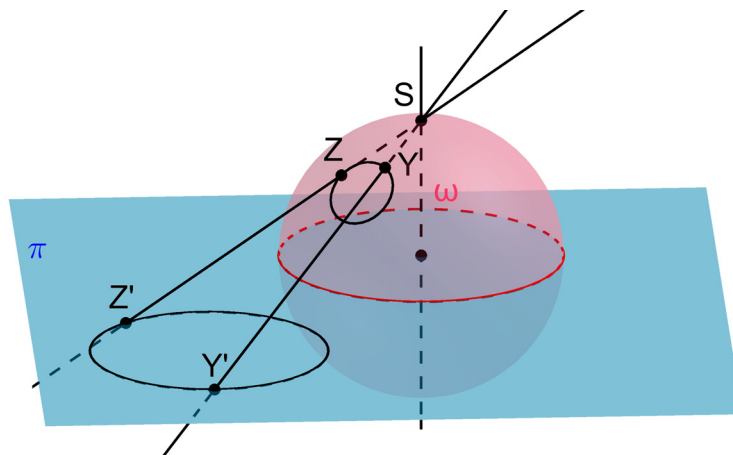
Obrázek 68: Stereografická projekce

**Definice 28** (Stereografická projekce). *Stereografický průmět kulové plochy je středovým průmětem kulové plochy pro střed promítání  $S$  ležící na kulové ploše  $\omega$  a pro průmětnu  $\pi$  rovnoběžnou s tečnou rovinou kulové plochy ve středu promítání  $S$ , viz Obr. 68. [7]*

**Poznámka.** Průmětna  $\pi$  se většinou volí tak, jak je znázorněno na Obr. 68, tj. prochází středem  $O$  kulové plochy kolmo na přímkou  $OS$ .

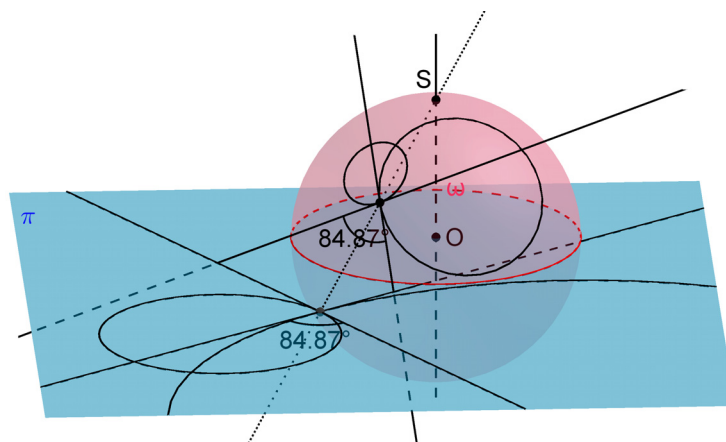
Stereografická projekce má dvě důležité vlastnosti:

- (1) Kružnice kulové plochy  $\omega$  se promítají opět do kružnic, viz Obr. 69.



Obrázek 69: Obrazem kružnice je opět kružnice

- (2) Úhel dvou křivek kulové plochy  $\omega$  se u jejich obrazů zachovává (zobrazení, která zachovávají velikost úhlu nazýváme *konformní*), viz Obr. 70.



Obrázek 70: Velikost úhlu se zachovává

### 15.3 Vybrané vlastnosti sférické inverze

Podíváme-li se zpět na Obr. 67 vidíme, že sférickou inverzi lze složit ze dvou zobrazení. Bod  $X$  se nejprve zobrazí na bod  $X_1$  prostřednictvím inverzního zobrazení ke stereografické projekci z bodu  $P$  na rovinu  $\pi$ , potom se bod  $X_1$  zobrazí na  $X'$  ve stereografické projekci z bodu  $Q$  na rovinu  $\pi$ .

Inverze je *involutorní zobrazení*, to znamená, že je-li obrazem bodu  $X$  bod  $X'$ , je obrazem bodu  $X'$  bod  $X$ .

Přitom body uvnitř sféry (v případě kruhové inverze pak kružnice) se zobrazují vně, a naopak body vně sféry (kružnice) se zobrazují dovnitř. Body sféry (kružnice) jsou potom samodružné.

Snadno ověříme skutečnost, že přibližuje-li se bod  $X$  ke středu  $S$  inverze, jeho obraz  $X'$  se neomezeně vzdaluje. Přirozeně se tak nabízí myšlenka, že obrazem bodu  $S$ , který je v definici 27 z eukleidovského prostoru vyňat, je bod v nekonečnu. Tuto myšlenku precizuje zavedení tzv. *Möbiova prostoru*, viz např. [14], str. 85 (August Ferdinand Möbius, 1790–1868).

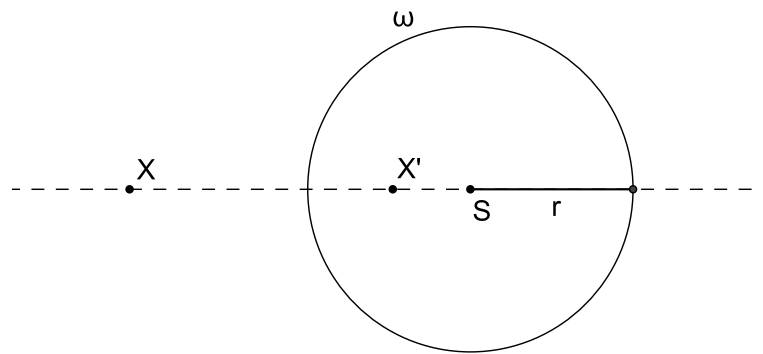
*Möbiovým prostorem* rozumíme eukleidovský prostor  $E_n$  rozšířený o tzv. *nevlastní bod* (tj. bod „v nekonečnu“). Značíme ho  $M_n = E_n \cup \{\infty\}$ . Tento nevlastní bod je potom v Möbiově prostoru obrazem středu inverze  $S$ .

## 16 Kruhová inverze

**Definice 29.** Kruhová inverze určená kružnicí  $\omega(S, r)$  (viz Obr. 71) je zobrazení, které každému bodu  $X \neq S$  přiřadí bod  $X'$  tímto způsobem:

$$(1) X' \in \text{line } SX,$$

$$(2) |SX| \cdot |SX'| = r^2.$$



Obrázek 71: Kruhová inverze

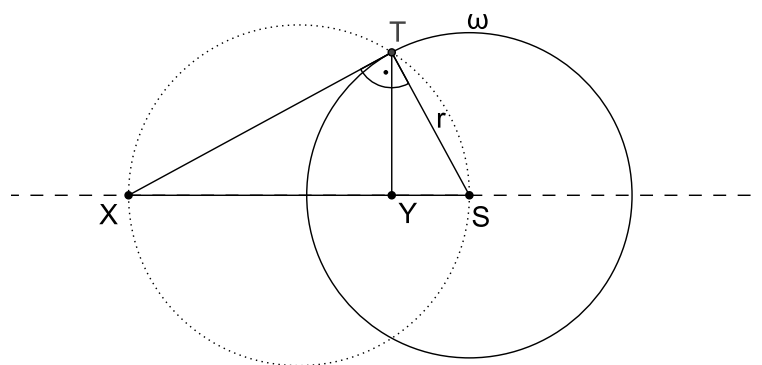
Z definice vyplývá, že kruhová inverze je *involutorní* zobrazení, tj. obrazem bodu  $X'$  je bod  $X$ .

Otázkou je, jak toto zobrazení konstrukčně provést<sup>15</sup>. Na Obr. 66 je jeden možný způsob, založený, jak už víme, na projekcích z bodů  $P$  a  $Q$ . Obvykle se však používá jiný způsob, založený na Eukleidově větě o odvěsně. Nyní se s ním pomocí Obr. 72 seznámíme. Jestliže  $T$  je bod dotyku tečny kružnice  $\omega$  vedené z bodu  $X$ , je  $\triangle XST$  pravoúhlý trojúhelník s přeponou  $XS$ . Potom pro patu  $Y$  výšky sestrojené z vrcholu  $T$  na přeponu  $XS$  dle *Eukleidovy věty o odvěsně pravoúhlého trojúhelníku* platí

$$|SY| \cdot |SX| = r^2.$$

Je tedy zřejmé, že bod  $Y$  je obrazem bodu  $X$  v souladu s definicí 29. Příslušnou konstrukci proto můžeme použít k sestrojení obrazu bodu v kruhové inverzi. Přitom je třeba mít na paměti, že kruhová inverze je involutorním zobrazením. Obrazem bodu  $Y$  (vnitřní bod kružnice  $\omega$ ) je tedy naopak zase bod  $X$  (vnější bod kružnice  $\omega$ ). Pro úplnost připomeňme, že body kružnice  $\omega$  jsou samodružné, zobrazí se samy na sebe, opět v souladu s definicí 29.

<sup>15</sup>Při rýsování v GeoGebře tuto otázku řešit nemusíme. Program má implementován nástroj *Kruhová inverze*. Při jeho použití stačí zadat bod, který chceme zobrazit a určující kružnici.



Obrázek 72: Kruhová inverze – konstrukce obrazu bodu  $X$

## 16.1 Vybrané vlastnosti kruhové inverze

Kruhová inverze je příkladem *nelineárního zobrazení*, nejedná se o afinní zobrazení, přímka se až na speciální případy nezobrazuje na přímku (přímky, které neprocházejí středem inverze, se zobrazují na kružnice).

Z definice inverze je patrné, že vnitřní body určující kružnice (sféry) se zobrazují na vnější body a naopak.

Inverze je tzv. *konformní zobrazení*, tj. zachovává velikost úhlu.

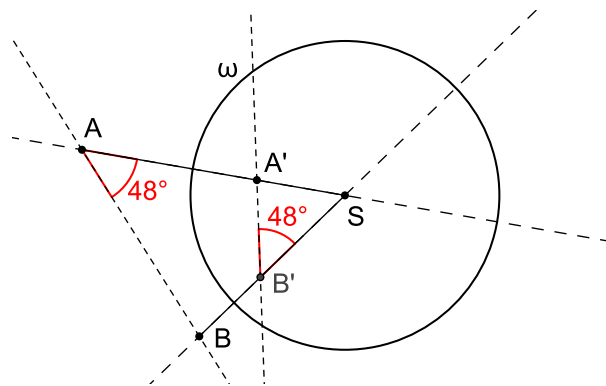
Jak je na tom kruhová inverze se *samodružnými útvary*? Samodružnými body jsou body určující kružnice. Samodružnými přímkami jsou přímky procházející středem inverze. Samodružné jsou ty kružnice, které ortogonálně protínají určující kružnici.

Nyní si tyto vlastnosti uvedeme formou vět (jejichž důkaz je však většinou přenechán čtenáři).

**Věta 59.** *Vnitřní body určující kružnice se zobrazí na vnější body této kružnice a naopak, vnější body se zobrazí na vnitřní.*

**Věta 60.** *Jestliže jsou  $A', B'$  obrazy bodů  $A, B$  v kruhové inverzi, jejíž střed  $S$  neleží na přímce  $AB$  (viz Obr. 73), potom  $|\angle SAB| = |\angle SB'A'|$ .*

*Důkaz.* Z definice kruhové inverze vyplývá  $|SA'| \cdot |SA| = |SB'| \cdot |SB| = r^2$ , tj.  $\frac{|SA'|}{|SB'|} = \frac{|SB|}{|SA|}$ . Protože trojúhelníky  $ABS$  a  $B'A'S$  mají společný úhel při vrcholu  $S$ , jsou podle věty *sus* podobné. □

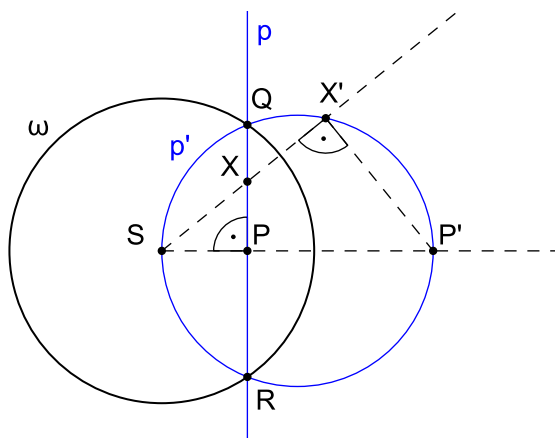


Obrázek 73:  $|\angle SAB| = |\angle SB'A'|$

**Věta 61.** *Body přímky procházející středem inverze  $S$  se zobrazují opět na tuto přímku.  $S$  výjimkou středu  $S$ .*

**Věta 62.** *Obrazem přímky  $p$ , která neprochází středem inverze  $S$ , je kružnice  $p'$  procházející středem  $S$ . Kromě bodu  $S$ .*

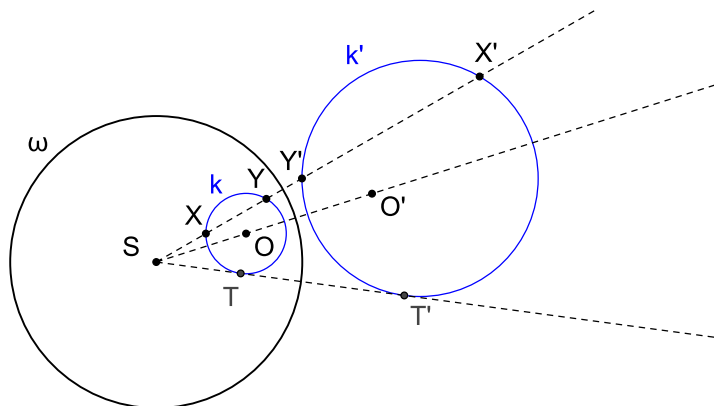
**Věta 63.** *Obrazem kružnice procházející středem inverze  $S$  (kromě bodu  $S$ ) je přímka, která neprochází středem inverze  $S$ .*



Obrázek 74: Obrazem přímky  $p$  je kružnice  $p'$  a naopak.

*Důkaz.* Při znalosti Thaletovy kružnice lze tuto větu dokázat jako důsledek věty 60, viz Obr. 74. □

**Věta 64.** *Obrazem kružnice, která neprochází středem inverze  $S$  je kružnice.*

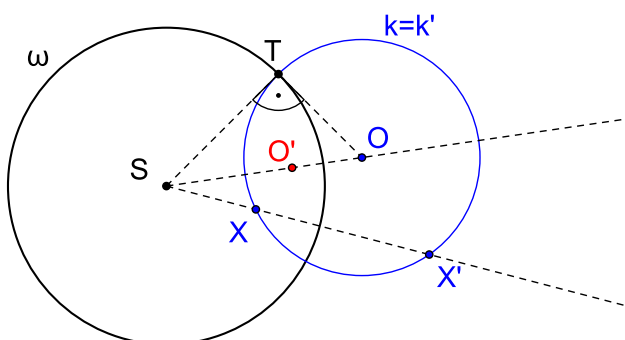


Obrázek 75: Obrazem kružnice  $k$ , která neprochází středem  $S$ , je kružnice  $k'$  a naopak.

*Důkaz.* K důkazu lze využít mocnost bodu ke kružnici, konkrétně mocnosti bodu  $S$  ke kružnicím  $k$  a  $k'$ , viz Obr. 75. □

**Poznámka.** Na Obr. 75 je patrná jedna typická vesměs však opomíjená vlastnost kruhové inverze, že obrazem středu kružnice  $k$  není střed kružnice  $k'$ , viz body  $O$  a  $O'$  na obrázku.

**Věta 65.** *Nutnou a postačující podmínkou, aby kružnice  $k$  se středem  $O$ , různá od určující kružnice  $\omega$ , byla v kruhové inverzi samodružná je, aby ortogonálně protínala určující kružnici inverze  $\omega$ .*



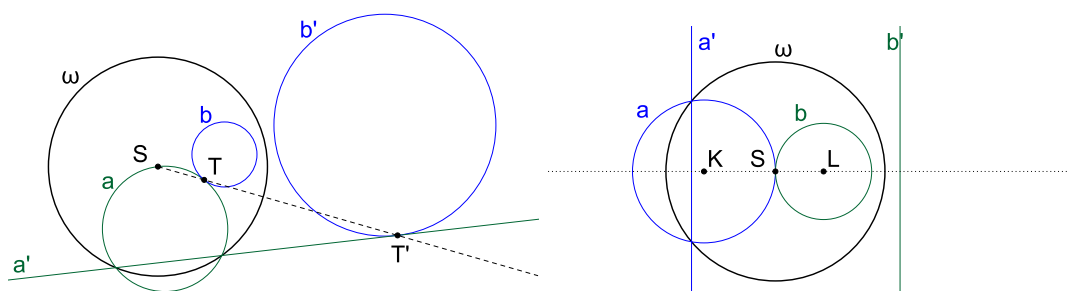
Obrázek 76: Samodružná kružnice  $k$  ortogonálně protíná určující kružnici  $\omega$ .

*Důkaz.* K důkazu opět využijeme mocnost bodu ke kružnici, konkrétně mocnost bodu  $S$  ke kružnici  $k$ , viz Obr. 76. □

**Poznámka.** Na Obr. 76 opět stojí za pozornost fakt, že ačkoliv se kružnice  $k$  zobrazuje sama na sebe, její střed  $O$  se zobrazuje na jiný bod  $O'$ .

**Věta 66.** *Nechť jsou  $a, b$  dvě kružnice nebo přímka a kružnice, které se dotýkají. Potom:*

- a) *Jestliže se dotýkají v bodě  $T \neq S$ , kde  $S$  je střed inverze, potom se dotýkají i jejich obrazy v bodě  $T'$ , který je obrazem bodu  $T$ .*
- a) *Jestliže se dotýkají ve středu inverze  $S$ , potom jsou jejich obrazem přímky  $a' \parallel b'$ .*



Obrázek 77: Zachování incidence v kruhové inverzi

## 16.2 Analytické vyjádření kruhové inverze

Při odvození analytického vyjádření kruhové inverze se středem  $S$  a koeficientem  $\kappa$  vyjdeme z Obr. 78, kde je uvažovaná inverze zadána určující kružnicí  $\omega$  se středem  $S$  a poloměrem  $r$  (víme, že platí  $r^2 = \kappa$ ). Vztah mezi body  $S, X$  a  $X'$  můžeme v každém okamžiku popsat rovností

$$|SX'| = k \cdot |SX|, \quad (104)$$

kteřá sice připomíná stejnoolehlost, liší se však od ní tím, že hodnota  $k$  není konstantní, ale závisí na  $X$  (místo  $k$  by asi bylo vhodnější psát  $k(X)$ ). Víme přece, že kruhová inverze je definována vztahem

$$|SX'| = \frac{\kappa}{|SX|}. \quad (105)$$

Dáme-li vztahy (104) a (105) dohromady, dostaneme pro  $k$  vztah

$$k = \frac{\kappa}{|SX|^2}. \quad (106)$$

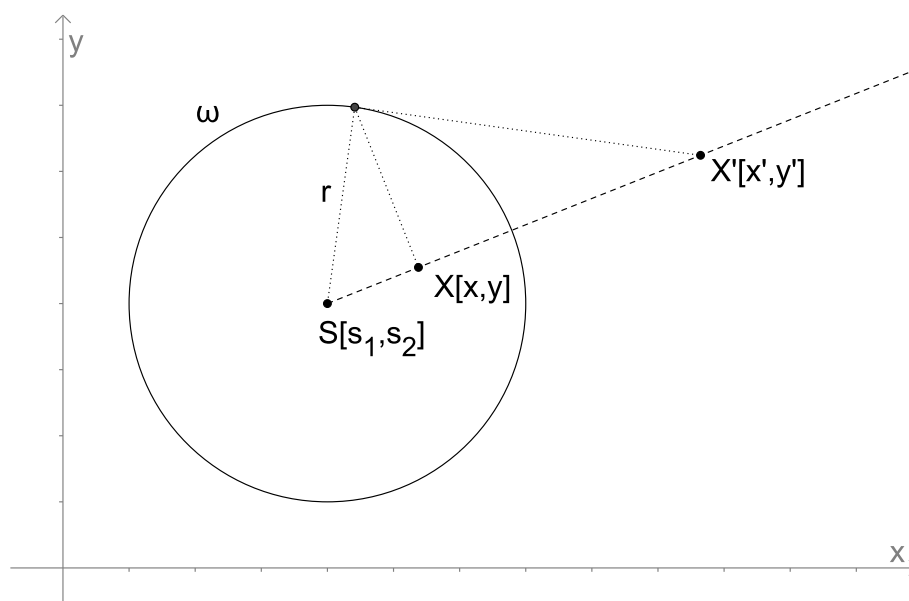
Nyní stačí rovnost (104) přepsat do tvaru  $X' - S = k \cdot (X - S)$ , odkud po dosazení z (106) odvodíme konečné analytické vyjádření kruhové inverze. Pro obraz  $X'$  bodu  $X$  v kruhové inverzi se středem  $S$  a koeficientem  $\kappa$  tak platí

$$X' = S + \frac{\kappa}{|SX|^2} \cdot (X - S), \quad (107)$$

případně

$$X' = S + \frac{r^2}{|SX|^2} \cdot (X - S), \quad (108)$$

pro určující kružnici  $\omega$  se středem  $S$  a poloměrem  $r$ .



Obrázek 78: Analytické vyjádření kruhové inverze.

### 16.3 Cvičení – kruhová inverze

1. V jaký útvar převede kruhová inverze kružnici a její dvě tečny, které jsou
  - a) různoběžné, b) rovnoběžné?
2. Prozkoumejte obrazy těchto dvou útvarů v kruhové inverzi:
  - a) dvě na sebe kolmé přímky, b) kružnice a přímka, která prochází jejím středem.
3. Je dána přímka  $p$ , která protíná danou kružnici  $k$  v bodech  $K, L$  a je dán bod  $B$ , ležící mimo přímku  $p$  i kružnici  $k$ . Bodem  $B$  veďte kružnici, která se dotýká  $p$  i  $k$ .



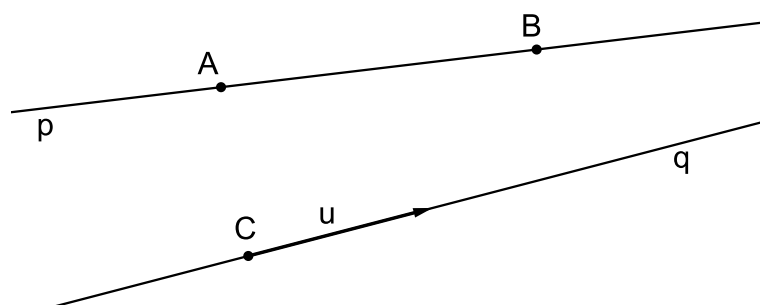
4. Sestrojte kružnici procházející danými body  $A$ ,  $B$  a dotýkající se dané kružnice  $k$ ; body  $A$ ,  $B$  jsou vnější body kružnice  $k$ .
5. Jsou dány tři kružnice  $k_1$ ,  $k_2$ ,  $k_3$ , které se navzájem protínají a všechny procházejí bodem  $O$ . Sestrojte kružnici  $k$ , která se dotýká kružnic  $k_1$ ,  $k_2$ ,  $k_3$ .
6. Jsou dány tři kružnice  $k_1$ ,  $k_2$ ,  $k_3$ , z nichž se každé dvě zvenku dotýkají. Sestrojte kružnici  $k$ , dotýkající se daných kružnic.
7. Jsou dány dvě dotýkající se kružnice  $k_1$ ,  $k_2$  a přímka  $p$ . Sestrojte kružnici, která se dotýká kružnic  $k_1$ ,  $k_2$  a přímky  $p$ .
8. Jsou dány dvě přímky  $p_1$ ,  $p_2$  a kružnice  $k$ , která se dotýká přímky  $p_1$ . Sestrojte kružnici, která se dotýká přímek  $p_1$ ,  $p_2$  a kružnice  $k$ .
9. Jsou dány dvě dotýkající se kružnice  $k_1$ ,  $k_2$  a přímka  $p$ . Sestrojte kružnici se středem na přímce  $p$ , která se dotýká kružnic  $k_1$ ,  $k_2$ .
10. Jsou dány tři kružnice  $k_1$ ,  $k_2$ ,  $k_3$ , z nichž  $k_1$  a  $k_2$  se protínají v bodech  $A$ ,  $B$ ;  $k_3$  leží vně  $k_1$  i  $k_2$ . Sestrojte kružnici  $k$ , která se dotýká kružnic  $k_1$ ,  $k_2$ ,  $k_3$ .
11. V rovině je dán trojúhelník  $ABC$ . Najděte střed kruhové inverze zobrazující bod  $A$  na bod  $B$ , je-li bod  $C$  samodružný.
12. Určete střed kruhové inverze s koeficientem 2, při které se bod  $[1, 0]$  zobrazí na bod  $[2, 0]$ .
13. Existuje kruhová inverze, při níž jsou body  $[-1, 0]$ ,  $[1, 0]$  samodružné a bod  $[0, 0]$  se zobrazí na bod  $[0, 1]$ ? Při kladné odpovědi určete střed této inverze, koeficient a analytické vyjádření.
14. Při kterých kruhových inverzích se zobrazí bod  $[0, 1]$  na bod  $[0, 9]$  a bod  $[2, 0]$  do vlastního bodu na ose  $x$ ? Určete vždy střed a koeficient inverze.
15. V omezené nákresně je dána přímka  $t$  a na ní přístupný bod  $T$ . Dále je dán nepřístupný bod  $M = p \cap q$ ;  $p$ ,  $q$  jsou přímky. Sestrojte kružnici  $k$ , která prochází bodem  $M$  a přímky  $t$  se dotýká v bodě  $T$ .
16. V omezené nákresně sestrojte střed  $S$  kružnice  $k$  procházející nepřístupnými body  $A = x \cap y$ ,  $B = u \cap v$  a přístupným bodem  $C$  ( $x$ ,  $y$ ,  $u$ ,  $v$  jsou dané přístupné přímky).

## 17 Projektivní rozšíření $\bar{E}_n$ prostoru $E_n$

Projektivním rozšířením eukleidovského prostoru  $E_n$  rozumíme jeho doplnění o *nevlastní body*. Výsledný prostor značíme  $\bar{E}_n$ . Takovéto rozšíření eukleidovského prostoru nám podstatně zjednodušuje popis a zkoumání některých geometrických vztahů. Využívá se třeba při výkladu perspektivy, zavádění kolineace nebo při zkoumání kuželoseček a kvadrik.

### 17.1 Projektivní rozšíření roviny $E_2$

Přímka je určena buď *dvěma body*, nebo *bodem a směrem* (směrovým vektorem), viz Obr. 79. Dvě přímky v rovině, které nejsou totožné, mají buď *jeden společný bod*, nebo nemají žádný společný bod, ale mají *společný směr*.



Obrázek 79: Přímka je určena buď *dvěma body*, nebo *bodem a směrem* (směrovým vektorem).

Kdybychom směry ztotožnili s body, mohli bychom výše uvedená tvrzení nahradit těmito jednoduššími: *Přímka je určena dvěma body. Dvě přímky v rovině mají vždy alespoň jeden společný bod.*

Řešením je doplnění roviny o tzv. *nevlastní body*  $N_\infty$ , tj. body *v nekonečnu*, které si můžeme představovat jako směry všech přímek roviny. Důsledkem zavedení těchto nevlastních bodů do eukleidovské roviny je její doplnění také o tzv. *nevlastní přímku*  $n_\infty$ , která je z nevlastních bodů složena.

Prvotní představa o nevlastním bodu přímky je taková, že je to bod této přímky, který leží v nekonečnu. Proto je logické, že *nevlastní bod přímky ztotožňujeme s jejím směrem*.

**Definice 30** (Směr). *Je-li  $\vec{u}$  libovolný nenulový vektor, potom množinu všech vektorů  $k\vec{u}$ ,  $k \in \mathbb{R}$  nazýváme směrem, značíme  $\langle \vec{u} \rangle$ . Libovolný vektor daného směru pak nazýváme reprezentantem tohoto směru.*

Potom můžeme projektivně rozšířený prostor  $\bar{E}_2$  chápat jako sjednocení eukleidovského prostoru  $E_2$  s množinou všech směrů  $\langle V_2 \rangle$  (kde  $V_2$  je zaměřením  $E_2$ ), tj. s množinou všech nevlastních bodů  $N_\infty$ ;

$$\bar{E}_2 = E_2 \cup N_\infty = E_2 \cup \langle V_2 \rangle.$$

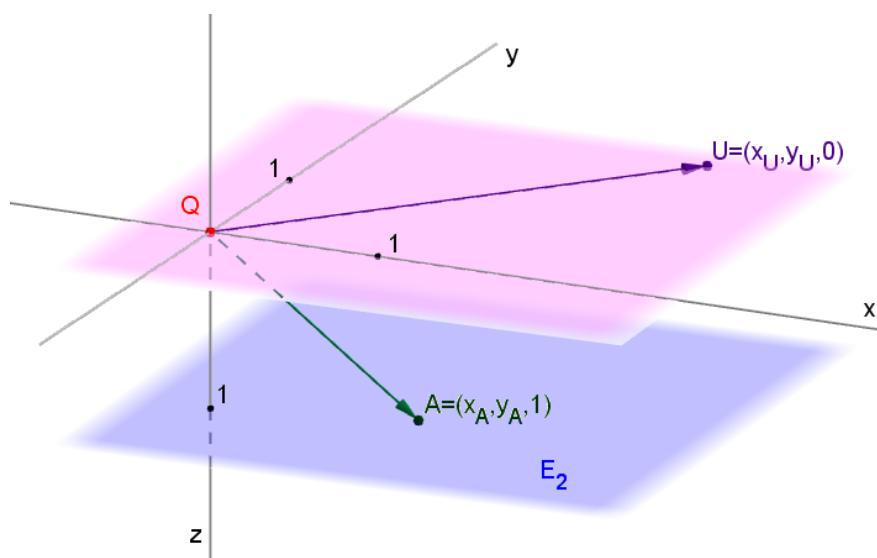
Bodem prostoru  $\bar{E}_2$  tak je jak bod, tak jak jej známe (tj. vlastní bod), tak i směr (tj. nevlastní bod).

**Poznámka.** Každá vlastní přímka má právě jeden nevlastní bod (směr).

## 17.2 Homogenní souřadnice v $\bar{E}_2$

Je otázka, jak reprezentovat body projektivně rozšířeného prostoru  $\bar{E}_2$ . Tato reprezentace by měla být na jedné straně jednotná, na druhé straně by však měla dovolovat rozlišovat mezi body vlastními (tj. body původního eukleidovského prostoru  $E_2$ ) a nevlastními (tj. směry zaměření  $V_2$  původního eukleidovského prostoru  $E_2$ ).

Tento na první pohled obtížný úkol elegantně řeší zavedení tzv. *homogenních souřadnic*. Homogenní souřadnice v  $\bar{E}_2$  jsou výsledkem projektivního rozšíření, to jest ztotožnění vlastních i nevlastních bodů prostoru  $\bar{E}_2$  se směry  $\langle V_3 \rangle$  prostoru  $E_3$ . Souřadnice vektoru z  $V_3$ , který ukazuje na konkrétní bod prostoru  $\bar{E}_2$  potom nazýváme *aritmetickým zástupcem* tohoto bodu.



Obrázek 80: Myšlenka zavedení homogenních souřadnic.

Myšlenka zavedení homogenních souřadnic je založena na tom, že celou projektivně rozšířenou eukleidovskou rovinu  $\bar{E}_2$  „umístíme“ do eukleidovského trojrozměrného

prostoru  $E_3$ , vhodně v něm zvolíme pevný bod  $Q$  a všechny body prostoru  $\bar{E}_2$  ztotožníme se směry „pohledů“ z tohoto bodu, tj. s vektory z vektorového prostoru  $V_3$ . Možné řešení je zachyceno na Obr. 80. Eukleidovský prostor  $E_2$  je znázorněn modrou (spodní) rovinou, ta tedy představuje množinu *vlastních bodů*. *Nevlastním bodům*, tj. směrům přímk z  $E_2$ , potom odpovídají vektory rovnoběžné s touto rovinou. Pro zjednodušení našich představ volíme umístění všech těchto vektorů v bodě  $Q$ . *Nevlastní body* potom vyplňují červenou (horní) rovinu. Zvolíme-li kartézskou soustavu souřadnic „hostitelského“ prostoru  $E_3$  tak, aby její počátek splýval s bodem  $Q$ , osy  $x, y$  ležely v rovině rovnoběžné s  $E_2$  a osa  $z$  byla orientována tak, že její průsečík s rovinou  $E_2$  má souřadnici 1, jak vidíme na Obr. 80, je zřejmé, že každý vlastní bod  $X$  má v této soustavě souřadnice  $X = \langle x, y, 1 \rangle$ , kde  $x, y$  jsou kartézské souřadnice bodu  $X$  v rovině  $E_2$ , zatímco nevlastní bod  $U$  má souřadnice  $U = \langle u_1, u_2, 0 \rangle$ . Tak se nám podařilo dosáhnout vytčeného cíle. Uvedený postup není samozřejmě jediný. Není např. nutné, aby třetí souřadnice vlastního bodu byla 1. Protože nám jde o směr „pohledu“ z bodu  $Q$  do daného bodu, není nezbytné, aby vektor tohoto směru v příslušném bodě končil. Podstatné je, aby tímto bodem procházela přímka tohoto směru. Obecně tak může být třetí souřadnicí vlastního bodu jakékoliv nenulové číslo.

Pokud však všechny souřadnice tímto nenulovým číslem vydělíme, dostaneme výše uvedený speciální případ homogenních souřadnic, který také odpovídá situaci na Obr. 80. Hovoříme o tzv. *afinních homogenních souřadnicích*. Ty nám způsobem svého zavedení umožňují v případě vlastních bodů přejít k afinním (nebo přímo kartézským) souřadnicím v  $\bar{E}_n$ . V případě nevlastních bodů pak k souřadnicím příslušných směrových vektorů ve  $\bar{V}_n$ . Pro zjednodušení však budeme nadále používat pro tento typ souřadnic vesměs označení *homogenní souřadnice*.

(*Afinní*) *homogenní souřadnice vlastního bodu*  $X \in \bar{E}_2$ :

$$X = \langle h_1, h_2, h_3 \rangle = \left\langle \frac{h_1}{h_3}, \frac{h_2}{h_3}, 1 \right\rangle = \langle x_1, x_2, 1 \rangle.$$

(*Afinní*) *homogenní souřadnice nevlastního bodu (směru)*  $Z \in \bar{E}_2$ :

$$Z = \langle z_1, z_2, 0 \rangle.$$

Potom  $\langle x_1, x_2 \rangle$  jsou *afinní* (nebo rovnou kartézské) souřadnice bodu  $X$  v  $E_2$ , zatímco  $\langle z_1, z_2 \rangle$  jsou *afinní* (nebo rovnou kartézské) souřadnice směrového vektoru  $\vec{z}$  ve  $V_2$ .

## Rovnice přímky v $\bar{E}_2$

V  $\bar{E}_2$  existují různé způsoby vyjádření přímky, která je v  $E_2$  dána obecnou rovnicí  $ax + by + c = 0$ . Uvažujeme-li homogenní souřadnice jejího libovolného bodu  $X$  ve tvaru  $X = \langle x, y, z \rangle = \langle \frac{x}{z}, \frac{y}{z}, 1 \rangle$ , její obecná rovnice je ve tvaru

$$ax + by + cz = 0.$$

Je-li přímka dána dvěma body  $A, B$  s homogenními souřadnicemi  $A = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle, B = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle$ , můžeme ji zadat pomocí rovnice

$$X = \alpha \cdot A + \beta \cdot B,$$

která vyjadřuje její obecný bod  $X$  jako lineární kombinaci bodů (směrů)  $A, B$ . K vyjádření téhož lze využít i determinant. Rovnice přímky dané body  $A, B$  má potom tvar

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0.$$

**PŘÍKLAD 17.1.** V rovině  $E_2$  je dána přímka  $2x + 5y + 7 = 0$ . Vypočtete (afinní) homogenní souřadnice jejího nevlastního bodu.

**PŘÍKLAD 17.2.** V rovině  $\bar{E}_2$  jsou dány body  $A = \langle 0, 3, 2 \rangle, B = \langle 2, 8, 2 \rangle$ . Napište rovnici přímky  $AB$ .

**PŘÍKLAD 17.3.** V rovině  $\bar{E}_2$  je  $A = \langle 1, 2, 0 \rangle, B = \langle 1, 1, -1 \rangle, C = \langle 0, 1, 0 \rangle, D = \langle 1, 0, -3 \rangle$ . Určete souřadnice průsečíku přímek  $AB$  a  $CD$ .

## Rovnice kuželosečky v $\bar{E}_2$

Kuželosečka s algebraickou rovnicí ve tvaru  $ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dxz + 2eyz + fz^2 = 0$  má v  $\bar{E}_2$  homogenní rovnici

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dxz + 2eyz + fz^2 = 0.$$

**PŘÍKLAD 17.4.** V rovině  $E_2$  je dána kuželosečka  $x^2 + y^2 + 2xy - 6x - 4y + 2 = 0$ . Vypočtete její nevlastní body v  $\bar{E}_2$ .

### 17.3 Zobecnění

Myšlenku projektivního rozšíření roviny můžeme zobecnit na prostor dimenze  $n$ . Výsledný prostor nazýváme projektivní prostor  $P_n$  a lze ho ztotožnit s množinou směrů  $\langle V_{n+1} \rangle$ :

$$P_n = \bar{E}_n = \langle V_{n+1} \rangle$$

(Afinní) homogenní souřadnice:  $X = \langle x_1, \dots, x_n, x_{n+1} \rangle$ .

**PŘÍKLAD 17.5.** *Napište rovnici roviny, která prochází body  $A = \langle 2, -1, 1, 2 \rangle$ ,  $B = \langle -1, 0, 0, 1 \rangle$ ,  $C = \langle -3, 2, 2, 3 \rangle$ .*

**PŘÍKLAD 17.6.** *V prostoru  $\bar{A}_3$  určete průsečík  $P$  přímky  $AB$  s rovinou  $CDE$ ;  $A = \langle 0, 1, 0, 1 \rangle$ ,  $B = \langle -1, 1, 2, 0 \rangle$ ,  $C = \langle 0, 0, 0, 1 \rangle$ ,  $D = \langle 1, 2, 0, 1 \rangle$ ,  $E = \langle 0, 2, -5, 1 \rangle$ .*

### 17.4 Cvičení – projektivní rozšíření prostoru

1. V rovině je dána přímka  $2x - 3y + 7 = 0$ . Napište její rovnici v příslušných afinních homogenních souřadnicích a vypočtěte její nevlastní bod  $U$ .
2. V prostoru  $\bar{E}_3$  je přímka popsána v afinních homogenních souřadnicích rovnicemi

$$2x_1 + 3x_2 - 4x_3 + 5x_4 = 0,$$

$$7x_1 - 4x_2 + 4x_3 - 4x_4 = 0.$$

Vypočtěte její nevlastní bod  $U$ .

3. Napište rovnici roviny, která v prostoru  $P_3$  prochází body  $A = \langle 2, -1, 1, 2 \rangle$ ,  $B = \langle -1, 0, 0, 1 \rangle$ ,  $C = \langle -3, 2, 2, 3 \rangle$ .

4. Každá shodnost může být v homogenních souřadnicích vyjádřena jednou maticí. Pokuste se najít příslušné matice.

5. Určete obrazy bodů  $A = [2, 5]$ ,  $B = [-1, 0]$  v rotaci  $R(S, \alpha)$ ;  $S = [1, 2]$ ,  $\alpha = \pi/3$ . Použijte matici v homogenních souřadnicích.

6. V prostoru  $\bar{E}_3$  určete průsečík  $P$  přímky  $AB$  s rovinou  $CDE$ .

$$A = (0, 1, 0, 1), B = (-1, 1, 2, 0), C = (0, 0, 0, 1), D = (2, 0, 1, 1), E = (0, 2, -5, 1).$$

7. Rovnice kuželoseček přepište do homogenních souřadnic a určete jejich nevlastní body.

a)  $-x^2 + 2xy + 3y^2 - 2x + 4y + 1 = 0,$

b)  $x^2 + 4xy + 4y^2 - 4x - 8y + 3 = 0,$

c)  $x^2 - 5xy + 6y^2 - 2x + 1 = 0.$

8. V projektivním prostoru  $\overline{P}_4$  najděte společný bod  $M$  rovin

$$x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 - 3x_5 = 0,$$

$$2x_1 + x_2 + 4x_3 + 3x_4 - 10x_5 = 0,$$

$$-6x_2 + 2x_3 + 3x_4 + x_5 = 0,$$

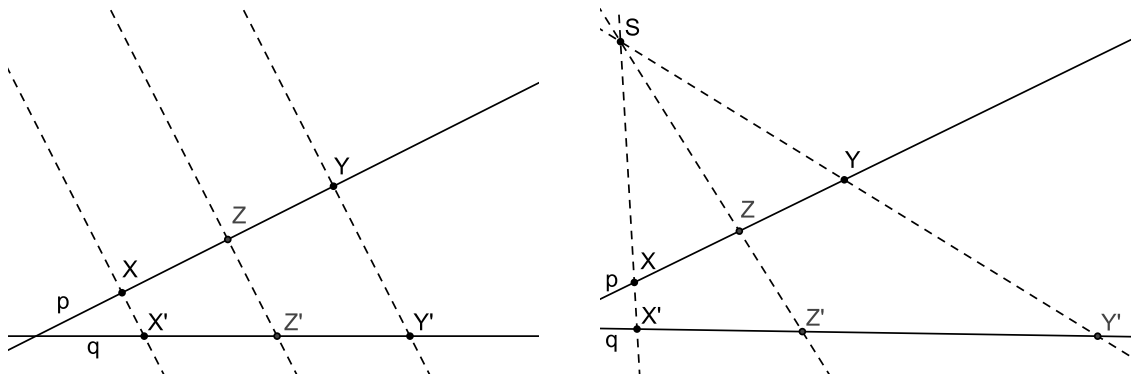
$$2x_1 + 10x_2 - 2x_3 - 4x_4 - 6x_5 = 0.$$

## 18 Dvojpoměr

Pro každé geometrické zobrazení jsou typické určité vlastnosti, které se při něm zachovávají. Hovoříme o tzv. *invariantech* daného geometrického zobrazení. Pro shodné zobrazení je to např. vzdálenost bodů, pro podobné zobrazení poměr vzdáleností bodů, pro afinní zobrazení je to potom dělicí poměr. Nyní nás bude zajímat projektivní invariant (tj. vlastnost, která se zachovává např. při středovém promítání mezi dvěma různoběžnými rovinami v trojrozměrném prostoru, nebo mezi dvěma různoběžnými přímkami v rovině). Jak je patrné z Obr. 81, dělicí poměr to být nemůže. Ukáže se, že tímto invariantem je tzv. *dvojpoměr* (viz věta 70–Pappova věta o projektivní invariantnosti dvojpoměru). Dvojpoměrem  $(ABCD)$  čtyř různých kolineárních bodů rozumíme poměr dělicích poměrů  $(ABC)/(ABD)$  (viz následující definice 31). Pro podrobnější studium otázek invariantů geometrických zobrazení, zvláště pak dvojpoměru, lze doporučit [8].

Výše uvedené úvahy o invariantech můžeme shrnout takto:

- vzdálenost – metrický (eukleidovský) invariant,
- dělicí poměr – afinní invariant,
- dvojpoměr – projektivní invariant.



Obrázek 81: Středové promítání mezi dvěma různoběžnými přímkami (rovinami) na rozdíl od rovnoběžného nezachovává dělicí poměr (sledujte, jak se zobrazuje bod  $Z$ , střed úsečky  $XY$ ).

**Definice 31** (Dvojpoměr). *Nechť  $A, B, C, D$  jsou čtyři navzájem různé body přímky. Číslo  $\delta = \frac{(ABC)}{(ABD)}$  nazýváme dvojpoměrem bodů  $A, B, C, D$  (v tomto pořadí) a značíme  $\delta = (ABCD)$ .*

**Poznámka.** Zápísem  $(ABC)$ , resp.  $(ABD)$ , rozumíme dělicí poměr bodu  $C$ , resp.  $D$ , vzhledem k bodům  $A, B$ .



**PŘÍKLAD 18.1.** Na přímce  $p$  jsou dány body  $A, B$ . Sestrojte na přímce  $p$  bod  $C$  tak, aby dělicí poměr  $(ABC) = \lambda$  byl roven danému číslu.

a)  $\lambda = 3$ ,

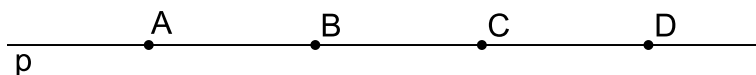
b)  $\lambda = \frac{1}{2}$ ,

c)  $\lambda = -2$ .

**PŘÍKLAD 18.2.** Určete hodnoty dělicích poměrů  $(ABC_\infty)$ ,  $(AB_\infty C)$ ,  $(A_\infty BC)$ , kde  $A_\infty, B_\infty, C_\infty$  jsou nevlastní body.

Řešení:  $(ABC_\infty) = 1$ ,  $(AB_\infty C) = 0$ ,  $(A_\infty BC) = \infty$ .

**PŘÍKLAD 18.3.** Jak vidíme na Obr. 82, na přímce  $p$  jsou ve stejných vzdálenostech postupně umístěny body  $A, B, C, D$ . Určete hodnotu dvojpoměru  $(ABCD)$ .



Obrázek 82: Určete hodnotu dvojpoměru  $(ABCD)$ .

**Věta 67.** Dvojpoměr čtyř bodů se nezmění, vyměníme-li vzájemně dva z nich a zároveň ještě oba zbývající, t.j. platí  $(ABCD) = (BADC) = (CDAB) = (DCBA)$ .

Důkaz. Dokážeme přímo, rozepsáním dle definice 31. □

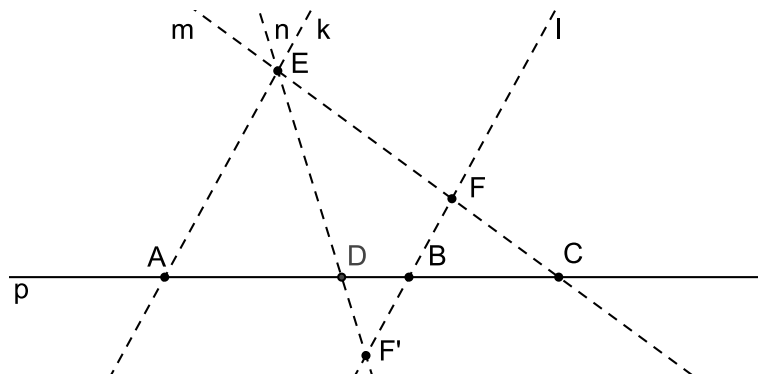
**Věta 68.** Vyměníme-li poslední dva body mezi sebou, změní se hodnota dvojpoměru v hodnotu převrácenou, t.j. platí  $(ABCD) = \frac{1}{(ABDC)}$ .

Důkaz. Dokážeme přímo, rozepsáním dle definice 31. □

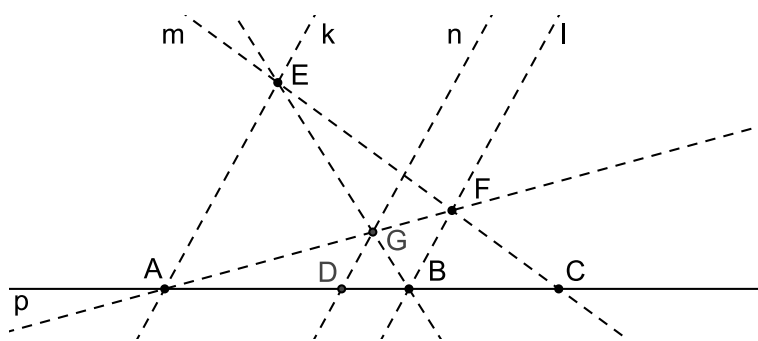
**Definice 32** (Harmonická čtveřice). Je-li  $(ABCD) = -1$ , říkáme, že body  $A, B, C, D$  tvoří harmonickou čtveřici bodů, nebo že body  $C, D$  jsou harmonicky sdruženy vzhledem k bodům  $A, B$ , nebo že body  $C, D$  oddělují harmonicky body  $A, B$ .

**PŘÍKLAD 18.4.** Jsou-li na přímce dány body  $A, B, C$ , sestrojte bod  $D$  tak, aby  $A, B, C, D$  tvořily harmonickou čtveřici.

Řešení: Jedna z možných konstrukcí harmonické čtveřice, založená na podobnosti trojúhelníků, je zobrazena na Obr. 83. Vyjdeme z ní při hledání postupu konstrukce, který by byl projektivně invariantní (neměl by být založen na rovnoběžnosti).



Obrázek 83: Jedna z možných konstrukcí harmonické čtveřice

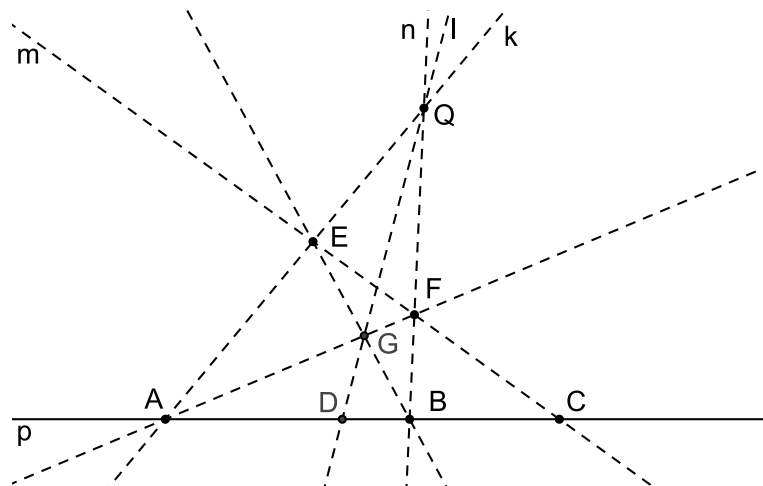


Obrázek 84: Další z možných konstrukcí harmonické čtveřice

Konstrukci nejprve modifikujeme (viz Obr. 84) tak, že dvojicemi bodů  $A, F$  a  $B, E$  vedeme přímky, jejichž průsečíkem  $G$  následně vedeme rovnoběžku  $n$  s přímkami  $k, l$ . Průsečíkem přímek  $n$  a  $p$  je potom hledaný bod  $D$ .

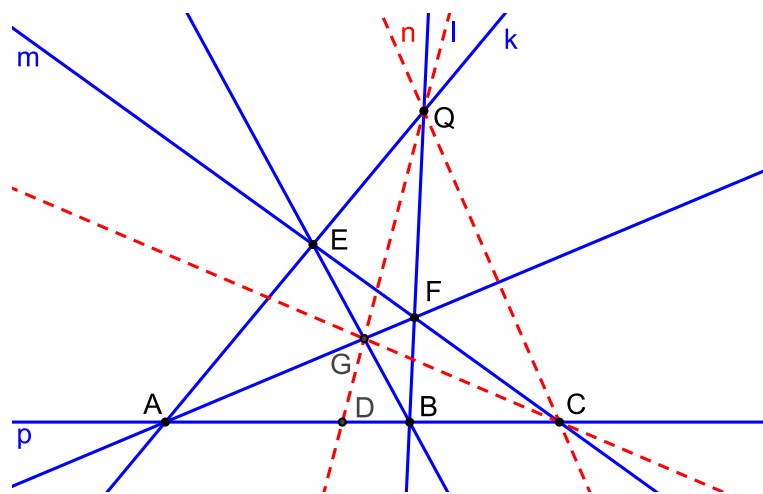
Nyní zbývá nahradit nevlastní průsečík přímek  $k, l, n$  vlastním bodem  $Q$ . Výsledkem je konstrukce na Obr. 85, která je ekvivalentní s původní a přitom při ní nemusíme využívat rovnoběžnost. Postup této konstrukce je takový, že bodem  $C$  vedeme libovolnou přímku  $m$ , na ní zvolíme dva různé body  $E, F$  a vedeme jimi přímky  $k = AE$  a  $n = BF$ , jejichž průsečík nazveme  $Q$ . Bod  $D$  je potom určen jako průsečík přímek  $p$  a  $l = QG$ , kde  $G$  je průsečíkem přímek  $AF$  a  $BE$ .

Body  $A, B, F, E$  na Obr. 85 (viz též Obr. Fig:UplnyCtyr) tvoří tzv. *úplný čtyřroh*. Takto nazýváme skupinu čtyř bodů v rovině, z nichž žádné tři neleží v jedné přímce. Body  $A, B, F, E$  potom nazýváme *vrcholy úplného čtyřrohu*. Šest přímek, které tyto vrcholy spojují, nazýváme *stranami úplného čtyřrohu*. Tyto strany se protínají ještě v dalších třech bodech  $G, C, Q$ , jimž říkáme *diagonální vrcholy úplného čtyřrohu*; trojúhelník jimi určený se nazývá *diagonální trojúhelník* a jeho strany *diagonálními stranami úplného čtyřrohu*. Nalezená jednoduchá konstrukce harmonické čtveřice potom odráží *harmonickou vlastnost* úplného čtyřrohu, která je formulována v následující větě, více viz [6].



Obrázek 85: Jednoduchá konstrukce harmonické čtveřice

**Věta 69.** Na každé straně úplného čtyřrohu tvoří oba jeho vrcholy a dvojice bodů, z nichž jeden je diagonální vrchol a druhý je incidentní s jeho protější diagonální stranou, dvě dvojice bodů, které se harmonicky oddělují.



Obrázek 86: Úplný čtyřroh  $A, B, F, E$  a diagonální trojúhelník  $\triangle GCQ$ .

**Poznámka.** Tvrzení, že body  $A, B, C, D$  (viz Obr. 85 a 86) se harmonicky oddělují znamená, že pro dvojpoměr těchto bodů v uvedeném pořadí platí  $(ABCD) = -1$ .

**PŘÍKLAD 18.5.** V  $P_2$  jsou dány body  $A = (1, 2, 3), B = (3, 2, 1), C = (1, 1, 1)$ . Dokažte, že leží na přímce a vypočtete bod  $D$  tak aby  $(ABCD) = -1$ .

**PŘÍKLAD 18.6.** Střed úsečky  $AB$  je harmonicky sdružen s nevlastním bodem přímky, určené body  $A, B$ , vzhledem k bodům  $A, B$ . Dokažte.

## 19 Pappova věta a její důsledky

*Pappos z Alexandrie* (?290–?350), řecký matematik a astronom. Pod označením „Pappova věta“ je uváděno více vět. Proto je třeba uvést, o jaké z těchto vět hovoříme. Zde se budeme věnovat *Pappově větě o invarianci dvojpoměru při promítání*. Přestože je dvojpoměr invariantní vůči rovnoběžnému i středovému promítání, omezíme se zde pouze na středové promítání. Vůči rovnoběžnému promítání je invariantní i dělicí poměr. Později uvedeme ještě *Pappovu větu o šestiúhelníku*.

### 19.1 Středové promítání

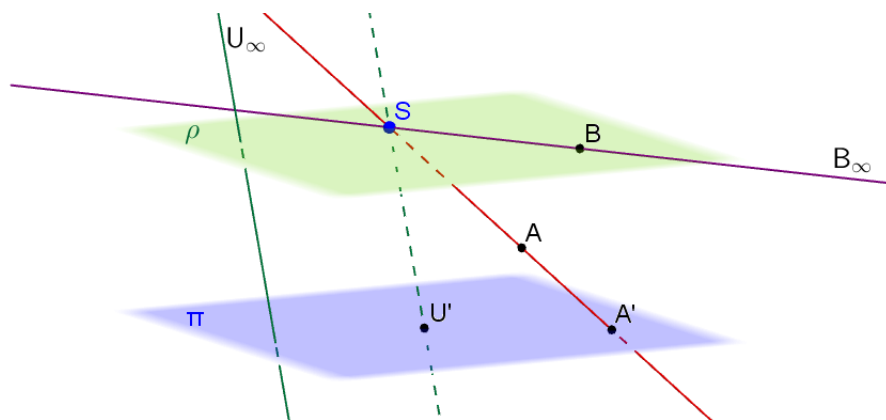
Středové promítání patří mezi zobrazení zvaná *kolineace*. Kolineace je nejobecnějším možným zobrazením, které zachovává linearitu geometrických útvarů, [1].

Existují různé druhy kolineací. Zanedlouho se budeme zabývat *středovou kolineací*, známou např. z kurzů deskriptivní geometrie.

Uvažujeme středové promítání v prostoru  $\bar{E}_2$  nebo v prostoru  $\bar{E}_3$ . Nejprve si probereme podobu středových průmětů základních útvarů při středovém promítání prostoru  $\bar{E}_3$  do roviny  $\pi$  se středem  $S$  ( $S \notin \pi$ ).

#### Zobrazení bodu

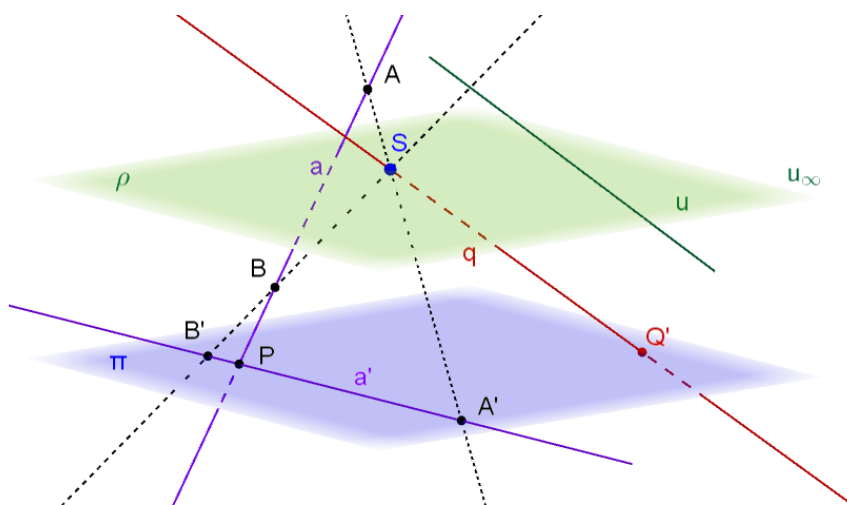
Viz Obr. 87. Vlastní bod se zobrazí opět na vlastní bod ( $A \rightarrow A'$ ), nebo, pokud leží v rovině  $\rho$  procházející středem  $S$  rovnoběžně s průmětnou  $\pi$ , zobrazí se na nevlastní bod ( $B \rightarrow B'_\infty$ ). Nevlastní bod (tj. směr přímky v  $\bar{E}_3$ ) se zobrazí na vlastní bod, tzv. *úběžník* ( $U_\infty \rightarrow U'$ ), nebo, pokud přímka leží v rovině  $\rho$  procházející středem  $S$  rovnoběžně s průmětnou  $\pi$ , zobrazí se sám na sebe, tj. opět na nevlastní bod.



Obrázek 87: Středové průměty bodu v  $\bar{E}_3$ .

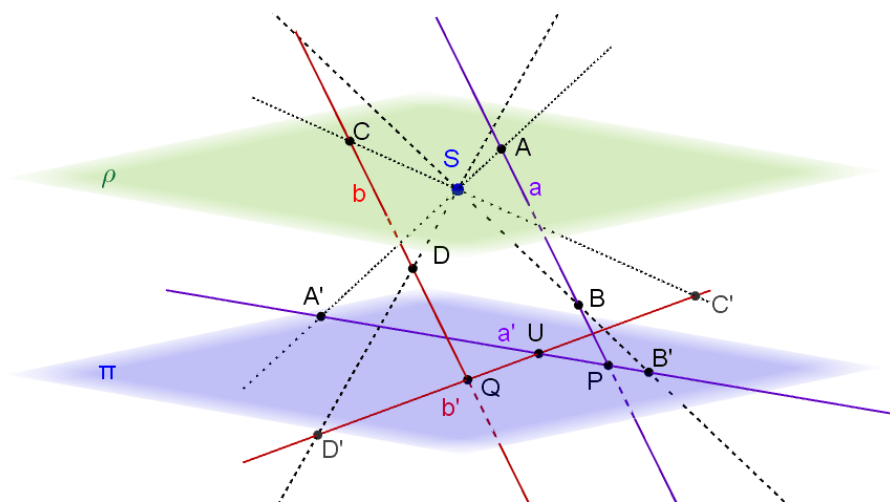
## Zobrazení přímky

Viz Obr. 88. Přímka se zobrazí opět na přímku ( $a \rightarrow a'$ , bod  $P$  je samodružný, nazýváme ho *stopník* dané přímky), nebo, pokud je přímkou promítací, tj. prochází středem  $S$ , zobrazí se na bod ( $q \rightarrow Q'$ ). Přímka ležící v rovině  $\rho$  procházející středem  $S$  rovnoběžně s průmětnou  $\pi$  se potom zobrazí na nevlastní přímku roviny  $\pi$  ( $u \rightarrow u_\infty$ ) sám na sebe, tj. opět na nevlastní bod.



Obrázek 88: Středové průměty přímky v  $\bar{E}_3$ .

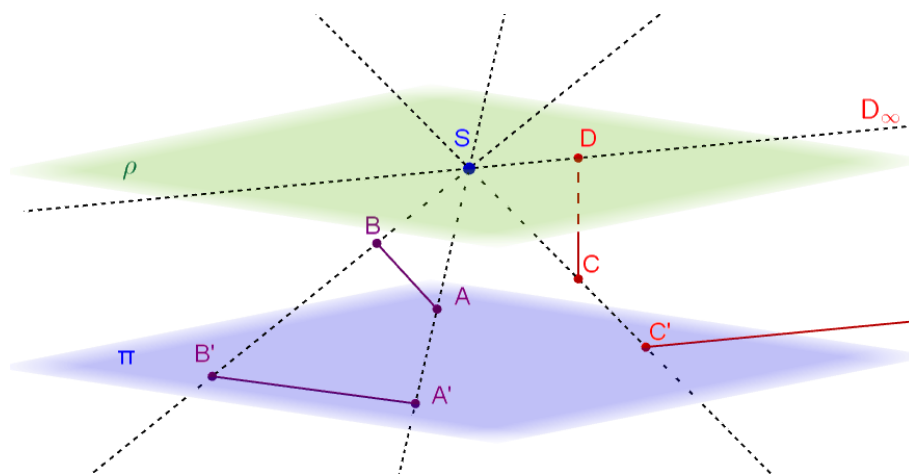
Zajímavá je otázka, jak vypadají středové průměty dvou rovnoběžek. Jak dokumentuje Obr. 89, středovými průměty dvou rovnoběžek jsou obecně dvě různoběžky ( $a \rightarrow a', b \rightarrow b'; a \parallel b, a' \nparallel b'$ ), jejichž společným bodem je *úběžník* (bod  $U'$  na Obr. 89), obraz nevlastního bodu (směru) těchto rovnoběžek.



Obrázek 89: Středové průměty rovnoběžek v  $\bar{E}_3$  nejsou rovnoběžné.

## Zobrazení úsečky

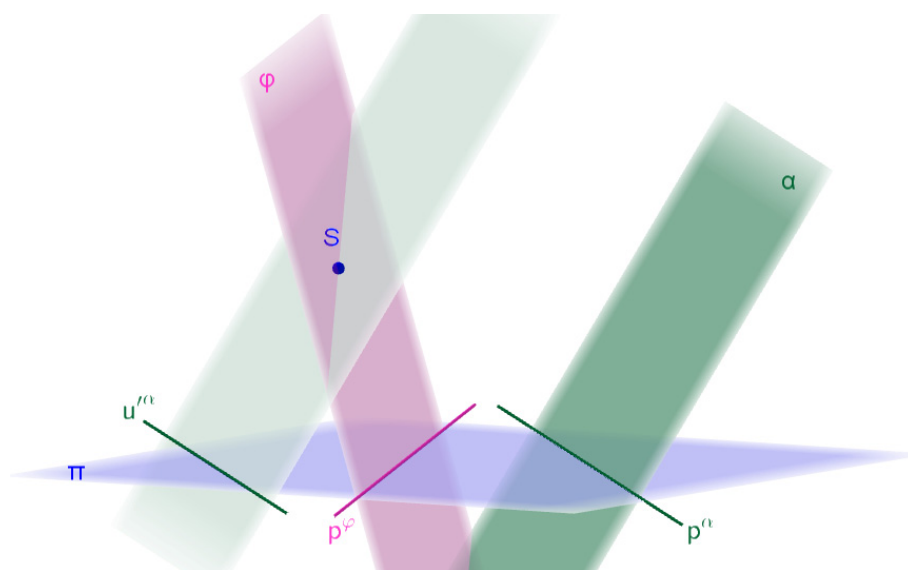
Poznamenejme pouze, že obrazem úsečky ve středovém promítání nemusí být úsečka. Jak vidíme na Obr. 90, úsečka  $AB$  v obecné poloze se zobrazí na úsečku  $A'B'$ , zatímco úsečka  $DC$ , která je kolmá k průmětně  $\pi$  a jejíž jeden krajní bod  $D$  leží v rovině  $\rho$  procházející středem  $S$  rovnoběžně s průmětnou  $\pi$ , se zobrazuje na polo-přímku s počátečním bodem  $D'$ , jejíž směr je dle orientace uvedené na obrázku určen nevlastním obrazem  $D_\infty$  bodu  $D$ .



Obrázek 90: Středové průměty bodu v  $\bar{E}_3$ .

## Zobrazení roviny

Viz Obr. 91. Pokud je rovina promítací, tj. prochází bodem  $S$ , je jejím středovým průmětem přímka, její stopa ( $\varphi \rightarrow p^\varphi$ ). V obecném případě je pak středovým průmětem roviny celá průmětna  $\pi$  ( $\alpha \rightarrow \pi$ ). Průsečnici roviny s průmětnou nazýváme *stopou* roviny (přímky  $p^\alpha$  a  $p^\varphi$  na obrázku). Nevlastní přímka roviny se promítá do tzv. *úběžnice*. Úběžnicí roviny  $\alpha$  je přímka  $u'^\alpha$ .

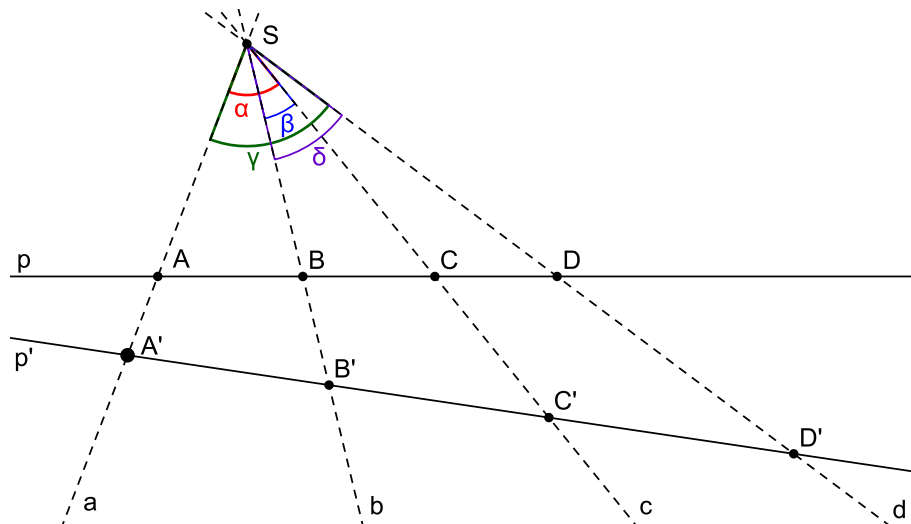


Obrázek 91: Středové průměty roviny v  $\bar{E}_3$ .

## 19.2 Pappova věta o invarianci dvojpoměru

**Věta 70** (Pappova věta o invarianci dvojpoměru). *Jestliže jsou  $A', B', C', D'$  rovnoběžné nebo středové průměty čtyř navzájem různých bodů  $A, B, C, D$  přímky  $p$  na přímku  $p' \neq p$ , potom  $(A'B'C'D') = (ABCD)$ .*

*Důkaz.* Jak bylo již řečeno, omezíme se pouze na středové promítání. Důkaz invariance dvojpoměru vůči rovnoběžnému promítání přenecháváme laskavému čtenáři.



Obrázek 92: Pappova věta.

Důkaz naznačíme pro konfiguraci bodů  $A, B, C, D$  dle Obr. 92. Diskusi obecné platnosti přenecháme čtenáři pro samostatnou práci.

Nebudeme dokazovat přímo rovnost  $(ABCD) = (A'B'C'D')$ . Dokážeme, že hodnota dvojpoměru čtyř bodů na přímce  $p$ , resp.  $p'$ , závisí pouze na úhlech, které svírají přímky spojující tyto body se středem  $S$  (úhly  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  na Obr. 92). Protože tak nezávisí na umístění přímky  $p$ , je při zachování velikostí uvedených úhlů pro všechny její polohy tento dvojpoměr stejný.

Pro dvojpoměr  $(ABCD)$  platí

$$(ABCD) = \frac{(ABC)}{(ABD)}, \quad (109)$$

kde uvedené dělicí poměry můžeme vzhledem k Obr. 92 zapsat takto

$$(ABC) = \frac{|AC|}{|BC|}, \quad (ABD) = \frac{|AD|}{|BD|}. \quad (110)$$

Nyní provedeme ekvivalentní úpravy těchto rovností (110) tak, aby se v nich „objevily“ vztahy pro výpočet obsahů vybraných trojúhelníků, které tvoří body  $A, B, C, D, S$



na Obr. 92 (konkrétně se jedná o  $\triangle ACS$ ,  $\triangle BCS$ ,  $\triangle BDS$  a  $\triangle CDS$ ):

$$(ABC) = \frac{|AC|}{|BC|} = \frac{\frac{1}{2}|AC|v}{\frac{1}{2}|BC|v} = \frac{S_{\triangle ACS}}{S_{\triangle BCS}}, \quad (ABD) = \frac{|AD|}{|BD|} = \frac{\frac{1}{2}|AD|v}{\frac{1}{2}|BD|v} = \frac{S_{\triangle ADS}}{S_{\triangle BDS}}, \quad (111)$$

kde  $v$  je společná výška těchto trojúhelníků, tj. kolmá vzdálenost bodu  $S$  od přímky  $p$ .

Nyní vyjádříme každý z uvedených obsahů trojúhelníků za použití jiných základů a výšek

$$S_{\triangle ACS} = \frac{1}{2}|AS||SC| \sin \alpha, \quad S_{\triangle BCS} = \frac{1}{2}|BS||SC| \sin \beta, \quad (112)$$

$$S_{\triangle ADS} = \frac{1}{2}|AS||SD| \sin \gamma, \quad S_{\triangle BDS} = \frac{1}{2}|BS||SD| \sin \delta. \quad (113)$$

a dosadíme do vztahů (111)

$$(ABC) = \frac{S_{\triangle ACS}}{S_{\triangle BCS}} = \frac{\frac{1}{2}|AS||SC| \sin \alpha}{\frac{1}{2}|BS||SC| \sin \beta} = \frac{|AS| \sin \alpha}{|BS| \sin \beta}, \quad (114)$$

$$(ABD) = \frac{S_{\triangle ADS}}{S_{\triangle BDS}} = \frac{\frac{1}{2}|AS||SD| \sin \gamma}{\frac{1}{2}|BS||SD| \sin \delta} = \frac{|AS| \sin \gamma}{|BS| \sin \delta}, \quad (115)$$

zjednodušené tvary pak do (116)

$$(ABCD) = \frac{\frac{|AS| \sin \alpha}{|BS| \sin \beta}}{\frac{|AS| \sin \gamma}{|BS| \sin \delta}}, \quad (116)$$

abychom po zjednodušení dostali vztah

$$(ABCD) = \frac{\sin \alpha \sin \delta}{\sin \beta \sin \gamma}, \quad (117)$$

ze kterého vyplývá nezávislost hodnoty dvojpoměru  $(ABCD)$  na volbě přímky  $p$ .  
Je tedy

$$(ABCD) = (A'B'C'D'). \quad (118)$$

□

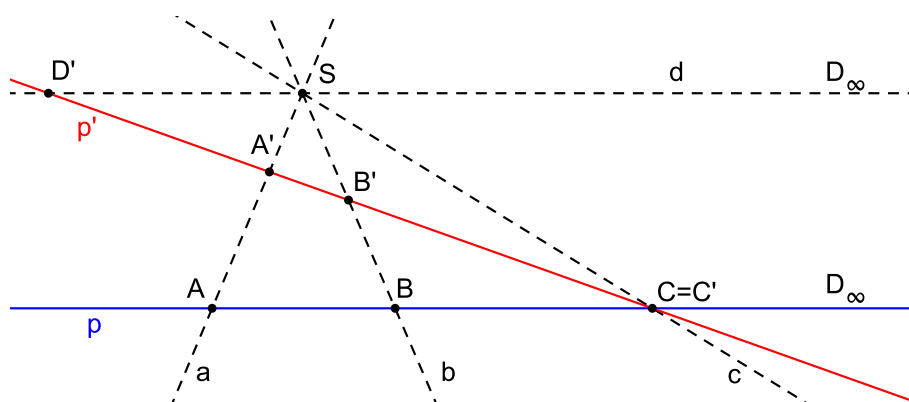
Pappovu větu můžeme formulovat i jednodušším způsobem.

**Věta 71** (Pappova věta o invarianci dvojpoměru II). *Dvojpoměr se promítáním nemění.*

**Poznámka.** Pappova věta o invarianci dvojpoměru platí i v případě, že je jeden z uvažovaných bodů nevlastní. Například pro  $D_\infty$  (viz Obr. 93) platí

$$(ABCD_\infty) = (ABC). \quad (119)$$

Postup důkazu tohoto vztahu je analogický s důkazem věty 70. Jak ukazuje Obr. 93, body  $A, B, C, D_\infty$ , kde  $D_\infty$  je nevlastní, leží na přímce  $p$ . Je však třeba mít na paměti, že pro jinou přímku, např.  $p'$  dle Obr. 93, mohou být všechny čtyři body  $A', B', C', D'$  vlastní.

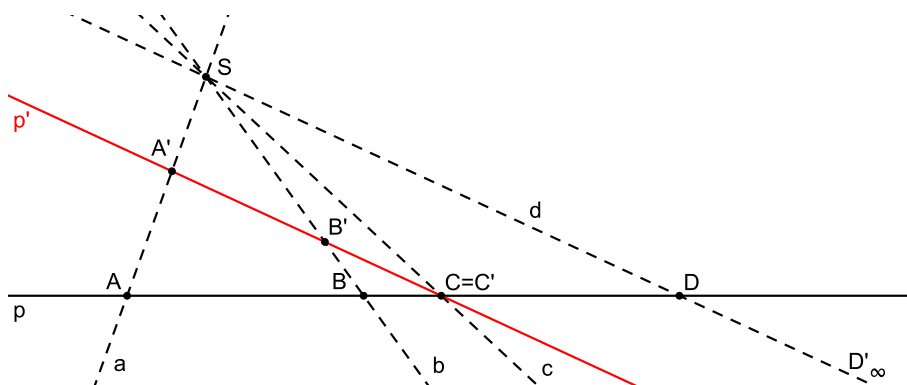


Obrázek 93: Pappova věta pro nevlastní bod.

Skutečnost uvedenou v poslední poznámce můžeme výhodně využít při řešení následujícího příkladu.

**PŘÍKLAD 19.1.** Na přímce  $p$  jsou dány tři různé body  $A, B, C$ . Sestrojte bod  $D$  tak, aby  $(ABCD) = \mu$ , kde  $\mu$  je dané číslo.

*Řešení:* Viz Obr. 94. Vyjdeme z toho, že platí  $(ABCD) = (A'B'C'D'_\infty) = (A'B'C')$ . Nejprve sestrojíme (libovolnou) přímku  $p'$  procházející bodem  $C = C'$ , na ní potom zvolíme body  $A', B'$  tak, aby platilo  $(A'B'C') = \mu$ . Jako průsečík přímek  $AA', BB'$  dostaneme střed  $S$ , kterým vedeme rovnoběžku s  $p'$ . Jejím průsečíkem s  $p$  je hledaný bod  $D$ .



Obrázek 94: Konstrukce daného dvojpoměru.

## Dvojpoměr čtyř přímek

Z výše uvedeného důkazu Pappovy věty (Věty 70) vyplývá, že pravdivost jejího tvrzení závisí pouze na zachování velikostí úhlů mezi promítacími přímkami  $a, b, c, d$ , viz Obr. 92. Místo dvojpoměru čtveřice bodů  $A, B, C, D$  ležících na jedné přímce  $p$  tak můžeme klidně uvažovat dvojpoměr čtveřice přímek  $a, b, c, d$  procházejících jedním bodem  $S$ , viz Obr. 95. Zaměnili jsme tedy body za přímky a přímky za body, a dostali jsme opět smysluplný vztah. To je projevem tzv. *principu duality v projektivní rovině*, kterému se věnujeme v následující kapitole 19.3.

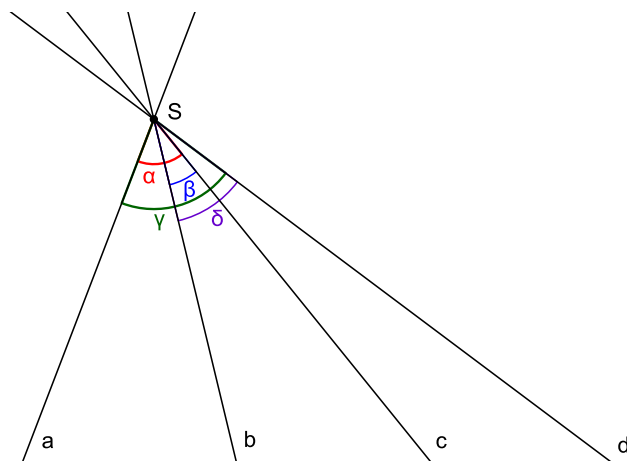
Pro dvojpoměr čtyř přímek  $a, b, c, d$  z Obr. 92 a 95 zřejmě platí

$$(abcd) = (ABCD) = \frac{\sin \alpha \sin \delta}{\sin \beta \sin \gamma}. \quad (120)$$

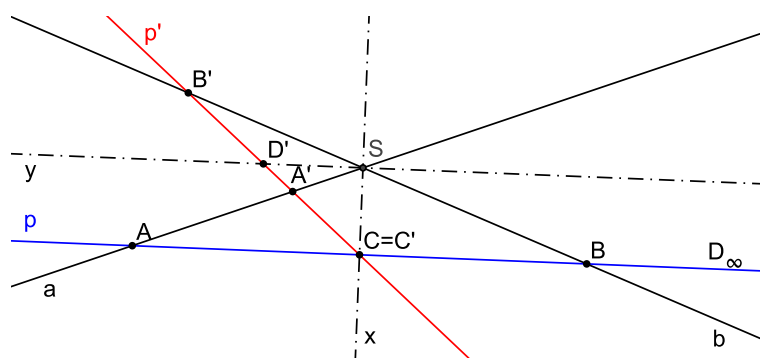
**PŘÍKLAD 19.2.** Určete hodnotu  $(abxy)$ , jsou-li  $a, b$  dvě různoběžné přímky a  $x, y$  osy souměrnosti úhlů, které přímky  $a, b$  svírají.

*Řešení:* Viz Obr. 96. Je zřejmé, že platí  $(abxy) = -1$ .

Analogicky s dvojpoměrem čtyř přímek zavedeme dvojpoměr čtyř nevlastních bodů a dvojpoměr čtyř rovin.



Obrázek 95: Dvojpoměr čtyř přímek.



Obrázek 96: Dvojpoměr dvou různoběžek a os jejich úhlů.

### Dvojpoměr čtyř nevlastních bodů

$$(A_{\infty}B_{\infty}C_{\infty}D_{\infty}) = (abcd).$$

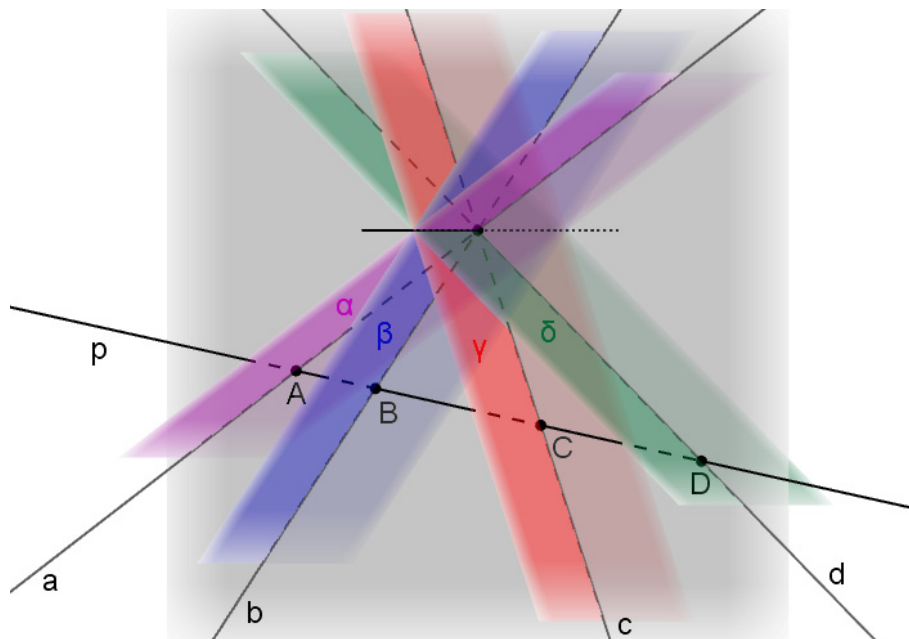
### Dvojpoměr čtyř rovin

$$(\alpha\beta\gamma\delta) = (abcd).$$

Viz Obr. 97.

## 19.3 Princip duality v projektivní rovině

Z každé věty v rovinné projektivní geometrii dostaneme novou správnou větu, když v ní příslušné pojmy nahradíme pojmy s nimi duálními, například slovo „bod“ nahradíme slovem „přímka“ a slovo „přímka“ nahradíme slovem „bod“, přičemž incidenci



Obrázek 97: Dvojpoměr čtyř rovin.

zachováme. Kompletní přehled vzájemně duálních pojmů a tvrzení nabízí následující tabulka 1. Vzájemnými záměnami uvedených pojmů vznikají dvojice „navzájem duálních vět“.

bod	přímka
leží na	prochází
přímka spojující dva body	průsečík dvou přímek
přímky procházející jedním bodem	body ležící na jedné přímce
čtyřroh	čtyřstran
pól	polára
množina bodů dané vlastnosti	obálka
tečna	bod dotyku

Tabulka 1: Vzájemně duální pojmy, [2]

### Ukázka dvojice navzájem duálních vět:

**Věta 1:** Dvěma různými body prochází jediná přímka.

**Věta 2:** Dvě různé přímky se protínají v jediném bodě.

**Poznámka.** Dualizovat nelze vzdálenost a úhel.

## 19.4 Princip duality v praxi

Uplatnění principu duality ilustrují také dvě následující vzájemně duální definice – definice úplného čtyřrohu (viz Obr. 98) a definice úplného čtyřstranu.

**Definice 33** (Úplný čtyřroh). *Skupina čtyř bodů  $A, B, C, D$  v rovině, z nichž žádné tři neleží v jedné přímce, se nazývá **úplný čtyřroh**  $A, B, C, D$ . Body  $A, B, C, D$  se nazývají jeho **vrcholy**. Šest přímek, z nichž každá je incidentní se dvěma z těchto vrcholů, nazýváme **stranami** úplného čtyřrohu  $A, B, C, D$ . Tyto strany se protínají ještě v dalších třech bodech  $P, Q, R$ , jimž říkáme **diagonální vrcholy** úplného čtyřrohu; trojúhelník jimi určený se nazývá **diagonální trojúhelník** a jeho strany **diagonálními stranami** úplného čtyřrohu  $A, B, C, D$ .*

**Definice 34** (Úplný čtyřstran). *Skupina čtyř přímek  $a, b, c, d$  v rovině, z nichž žádné tři neprocházejí týmž bodem, se nazývá **úplný čtyřstran**  $a, b, c, d$ . Přímky  $a, b, c, d$  se nazývají jeho **strany**. Šest bodů, z nichž každý je incidentní se dvěma z těchto stran, nazýváme **vrcholy** úplného čtyřstranu  $a, b, c, d$ . Tyto vrcholy lze spojit ještě dalšími třemi přímkami  $p, q, r$ , jimž říkáme **diagonální strany**; trojúhelník jimi určený se nazývá **diagonální trojúhelník** a jeho vrcholy pak **diagonálními vrcholy** úplného čtyřstranu  $a, b, c, d$ .*

**Věta 72.** *Na každé straně úplného čtyřrohu tvoří oba jeho vrcholy (viz Obr. 98, body  $A, B$ ) a pár bodů, z nichž jeden je diagonální vrchol a druhý je incidentní s jeho protější diagonální stranou (viz Obr. 98, body  $P', P''$ ), dvě dvojice bodů, jež se navzájem oddělují harmonicky.*

*Důkaz.* Uvažujme nejprve středové promítání se středem  $R$ , potom se středem  $Q$ . Dostaneme

$$(DCPP'') = (ABPP'), \quad (DCPP'') = (BAPP'), \quad (121)$$

odkud plyne

$$(ABPP') = (BAPP') = \frac{1}{(ABPP')}, \quad (122)$$

tj.

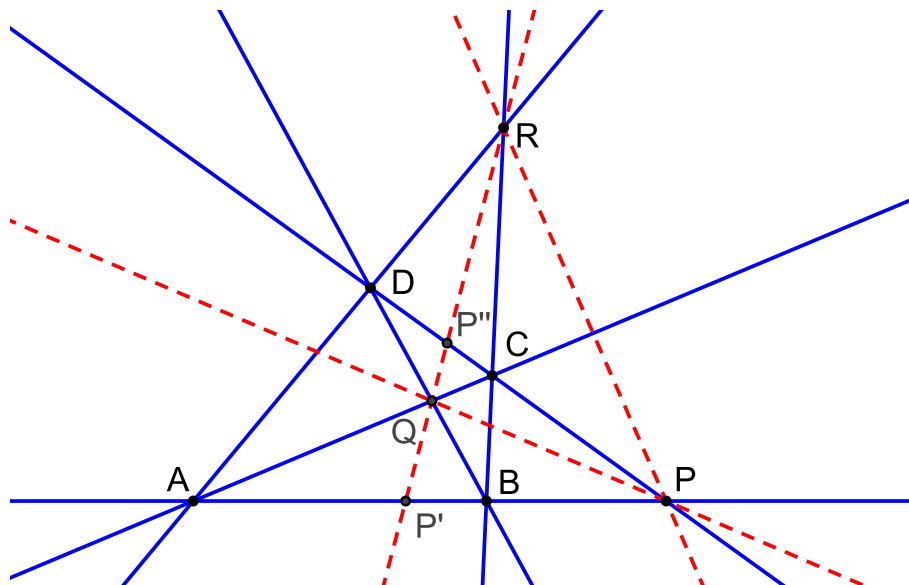
$$(ABPP')^2 = 1. \quad (123)$$

Protože body  $P$  a  $P'$  jsou odděleny bodem  $B$ , musí být dvojpoměr  $(ABPP')$  záporný. Výsledkem odmocnění (123) je tedy rovnost

$$(ABPP') = -1. \quad (124)$$

Tím je věta dokázána.  $\square$

Věta 72 nám dovoluje konstruovat harmonickou čtveřici jednoduše pomocí úplného čtyřrohu, jak jsme uvedli již na str. 147.



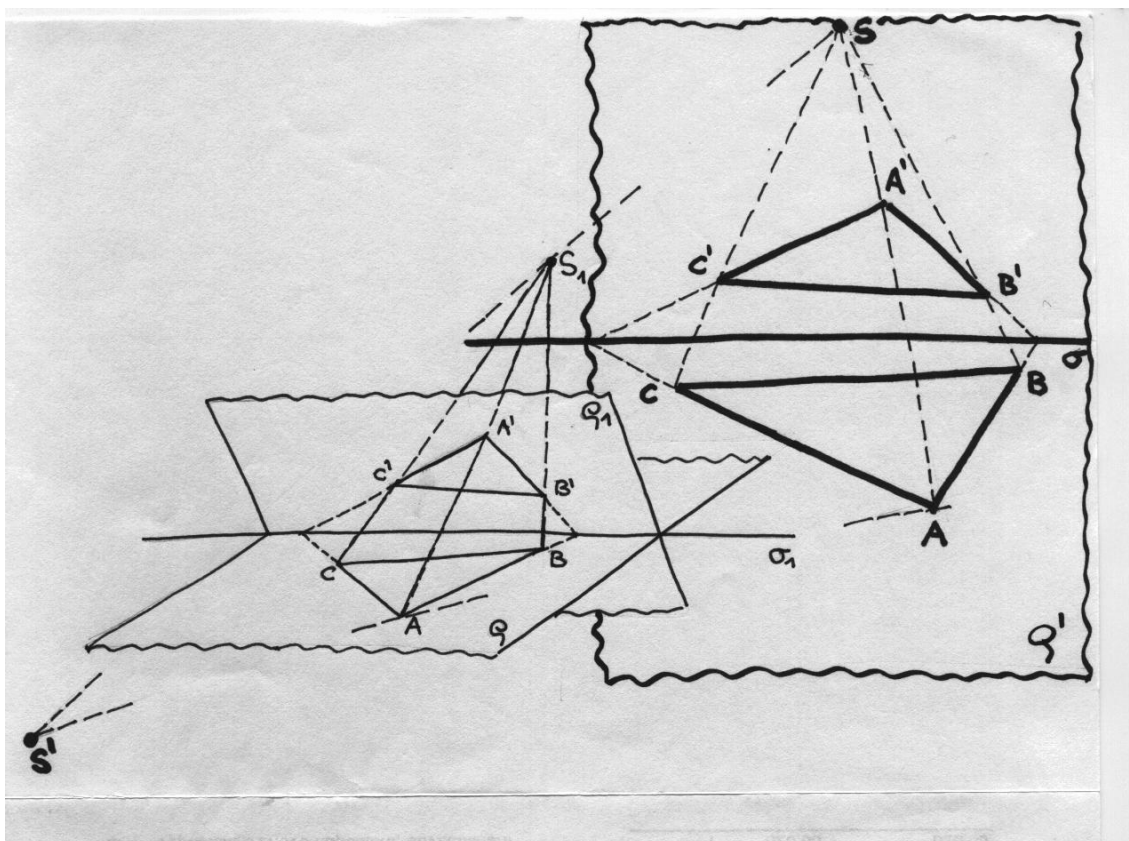
Obrázek 98: Úplný čtyřroh.

### 19.5 Cvičení – Pappova věta a princip duality

1. K větě 72 vyslovte větu **duální** a tu **dokažte**.
2. Dvě protější strany úplného čtyřrohu jsou harmonicky sdruženy vzhledem k příslušným diagonálním stranám. Dokažte.
3. Ke konstrukci harmonické čtveřice bodů (doplnit  $D$ , známe-li  $A, B, C$ ) vymyslete konstrukci duální, tj. konstrukci harmonické čtveřice přímek.

## 20 Středová kolineace

Jak naznačuje Obr. 99, středová kolineace (se středem  $S$ ), jako vzájemně jednoznačné zobrazení  $\bar{E}_2$  na sebe, je výsledkem středového průmětu (se středem  $S'$ ) středového promítání (se středem  $S_1$ ) mezi dvěma různoběžnými rovinami v prostoru  $E_3$ .



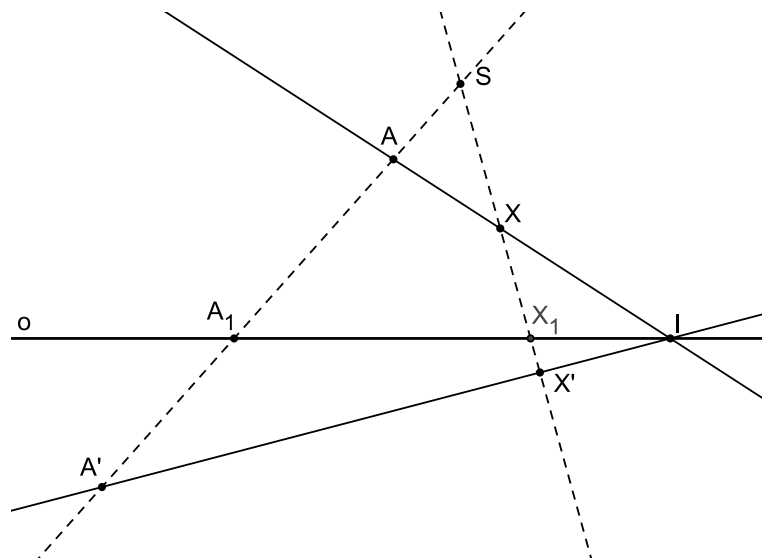
Obrázek 99: Vznik středové kolineace

**Definice 35** (Středová kolineace). *Středovou kolineací (též perspektivní kolineací, osovou kolineací či homologií) rozumíme vzájemně jednoznačné zobrazení roviny  $\bar{E}_2$  těchto vlastností (viz Obr. 100):*

1. *Spojnice odpovídajících si bodů procházejí pevným bodem - středem kolineace.*
2. *Průsečík odpovídajících si přímek leží na pevné přímce - ose kolineace.*
3. *Incidence se zachovává.*

**Poznámka.** Tři kolineární body (tj. tři body na přímce) přejdou tímto zobrazením opět v body kolineární - proto KOLINEACE.





Obrázek 100: Zobrazení bodu ve středové kolineaci se středem  $S$  a s osou  $o$

**Poznámka.** Středová kolineace je určena:

- osou  $o$  (samodružná přímka)
- středem  $S$  (samodružný bod)
- dvojicí odpovídajících si bodů  $A, A'$ ;  $S \in AA'$  nebo přímek  $p, p'$ ;  $S \notin p, p'$ .

**PŘÍKLAD 20.1.** *Ve středové kolineaci určené osou  $o$ , středem  $S$  a dvojicí bodů  $A, A'$  sestrojte:*

- a) obraz bodu  $X$ ,
- b) obraz přímky  $p$ .

**PŘÍKLAD 20.2.** *Ve středové kolineaci určené středem, osou a jedním párem odpovídajících si přímek sestrojte:*

- a) obraz bodu  $B$ ,
- b) obraz přímky  $m$ .

**Věta 73.** *Střed a každý bod osy kolineace jsou jejími samodružnými body. Osa kolineace a každá přímka procházející jejím středem jsou samodružné přímky.*

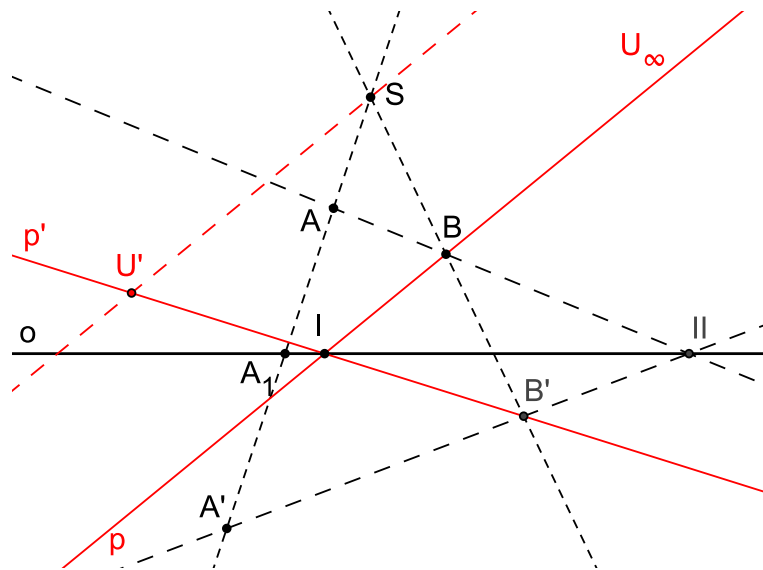
**Věta 74.** *Kolineace je určena, je-li dán její střed, osa a jeden pár odpovídajících si bodů nebo přímek, jež nejsou incidentní ani se středem, ani s osou kolineace.*

## Charakteristika kolineace

$$(SA_1AA') = (SB_1BB') = \lambda$$

**PŘÍKLAD 20.3.** *Středová kolineace je určena středem, osou a dvojicí sobě odpovídajících bodů. Sestrojte obraz nevlastního bodu  $U_\infty$  přímky  $p$ .*

*Řešení:* Viz Obr. 101.



Obrázek 101: Zobrazení nevlastního bodu přímky  $p$  ve středové kolineaci se středem  $S$  a s osou  $o$

## Úběžník a úběžnice

- Úběžník je bod, který je v dané kolineaci obrazem nevlastního bodu (viz bod  $U'$  na Obr. 101).
- Úběžnice je přímka, která je obrazem nevlastní přímky.

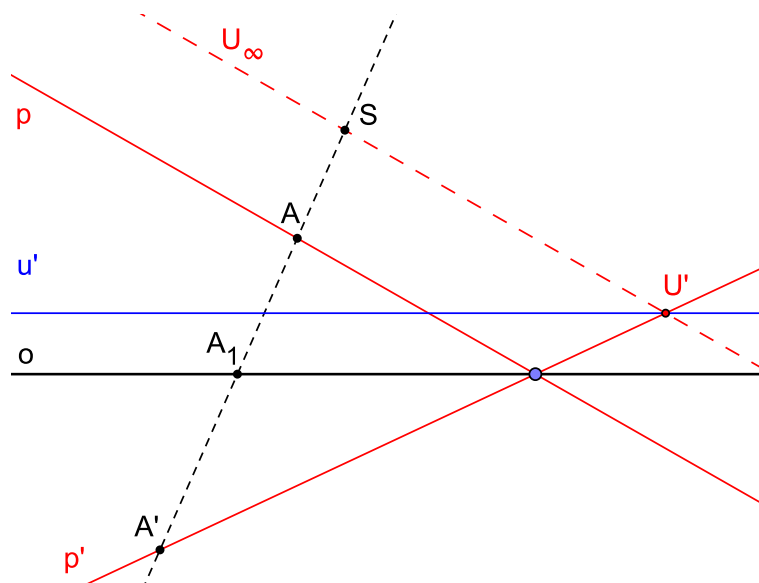
**PŘÍKLAD 20.4.** *Úběžnice je rovnoběžná s osou kolineace. Dokažte.*

*Řešení:* Důkaz založíme na skutečnosti, že osa kolineace je přímkou samodružných bodů. Protože úběžnice je obrazem nevlastní přímky, nemůže mít s osou kolineace jiný společný bod než bod nevlastní.

**PŘÍKLAD 20.5.** *Sestrojte úběžnici v kolineaci dané středem, osou a*

- párem odpovídajících si bodů,*
- párem odpovídajících si přímek.*

*Řešení:* Řešení ad a) viz Obr. 102



Obrázek 102: Zobrazení úběžnice  $u'$  ve středové kolineaci se středem  $S$  a s osou  $o$

**PŘÍKLAD 20.6.** *Ve středové kolineaci najděte alespoň jeden bod  $V$ , jehož obrazem je nevlastní bod.*

**Věta 75.** *V kolineaci existují dvě úběžnice (1. a 2. úběžnice nebo úběžnice a protiúběžnice). Vzdálenost středu kolineace od jedné z nich je rovna vzdálenosti osy kolineace od druhé z nich; přitom buď obě tyto úběžnice leží mezi středem a osou kolineace, nebo střed a osa kolineace leží mezi těmito úběžnicemi.*

**Věta 76.** *Kolineace je určena středem, osou a jednou úběžnicí.*

**PŘÍKLAD 20.7.** *Ve středové kolineaci určené středem  $S$ , osou  $o$  a úběžnicí  $u$  sestrojte obraz bodu  $A$ .*

**Věta 77.** *Dvojpoměr se kolineací zachovává.*

**PŘÍKLAD 20.8.** *Střed úsečky se kolineací většinou nezachovává. Ukažte.*

**PŘÍKLAD 20.9.** *Středová kolineace je dána středem  $S$ , osou  $o$  a dvojicí bodů  $B$ ,  $B_\infty$ . Najděte obraz bodu  $A$ .*

## 20.1 Kolineace kružnice a kuželosečky

Kuželosečce odpovídá v kolineaci zase kuželosečka. Obrazem kružnice v kolineaci tak může být elipsa, parabola nebo hyperbola. Na čem to závisí?

**PŘÍKLAD 20.10.** *Sestrojte elipsu, která odpovídá kružnici  $k$  v kolineaci dané osou, středem a úběžnicí.*

**Při konstrukci obrazu kuželosečky v kolineaci využíváme následující vlastnosti:**

1. Tečna kuželosečky  $k$  přejde kolineací v tečnu kuželosečky  $k'$ .
2. Dvojpoměr se kolineací zachovává.
3. Přímkám rovnoběžným s osou kolineace odpovídají přímky téhož směru.
4. Kuželosečky  $k, k'$  odpovídající si v kolineaci mají společné průsečíky s osou kolineace a společné tečny vedené k nim ze středu kolineace.
5. Polární vlastnosti kuželoseček:

- Je-li přímka  $p$  polárou bodu  $P$  vzhledem ke kuželosečce  $k$ , pak body dotyku  $T_1, T_2$  tečen kuželosečky  $k$  z bodu  $P$  jsou průsečíky  $p$  s  $k$ .

- Bod  $P$  indukuje na kuželosečce involuci.
- Dva body, z nichž každý leží na poláře toho druhého vzhledem k téže kuželosečce, se nazývají sdužené póly.

### 6. Průměr kuželosečky

- každá vlastní přímka, jejíž pól je bod nevlastní
- spojnice bodu dotyku dvou rovnoběžných tečen kuželosečky (kromě paraboly)
- spojnice průsečíku dvou tečen kuželosečky se středem úsečky určené body dotyku těchto tečen s kuželosečkou
- spojnice středu dvou rovnoběžných tětiv
- každá přímka procházející středem kuželosečky (středové)

### 7. Střed kuželosečky

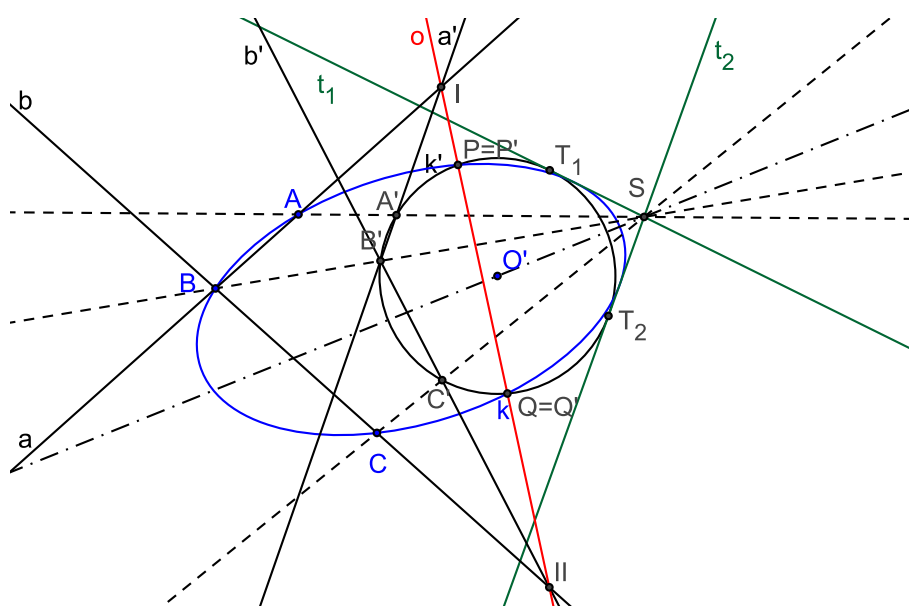
- Pro středové kuželosečky (elipsa, hyperbola) je to pól nevlastní přímky. Pól nevlastní přímky vzhledem k parabole je bod dotyku nevlastní přímky s parabolou.

**PŘÍKLAD 20.11.** *Sestrojte parabolu, která odpovídá kružnici  $k$  v dané kolineaci.*

**PŘÍKLAD 20.12.** *Sestrojte hyperbolu, která odpovídá kružnici  $k$  v dané kolineaci.*

**PŘÍKLAD 20.13.** *Sestrojte kuželosečku, znáte-li tři její body a dvě tečny.*

*Řešení:* Viz Obr. 103



Obrázek 103: Konstrukce kuželosečky (elipsy) z daných 3 bodů a 2 tečen

**PŘÍKLAD 20.14.** Středová kolineace v  $\overline{E}_2$  je dána osou  $o: y = 0$ , středem  $S = \langle 1, 0, a \rangle$  a dvojicí bodů  $B = \langle 1, 0, b \rangle$ ,  $B'_\infty = \langle 0, 0, b' \rangle$ . Volte hodnoty parametrů  $a, b, r$  tak, aby obrazem kružnice  $x^2 + y^2 = r^2$  byla postupně **parabola**, **hyperbola** a **elipsa**. Sestrojte.

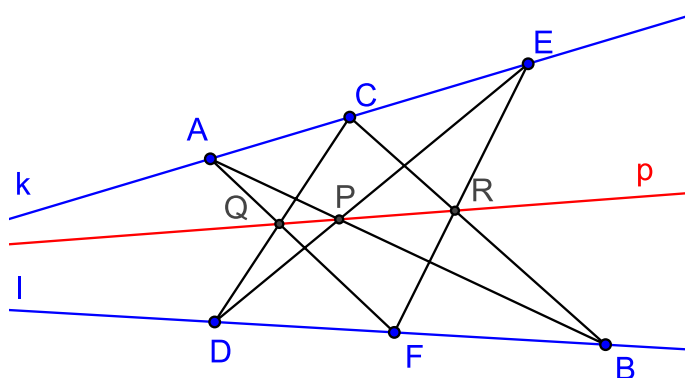
## 21 Vybrané věty projektivní geometrie

### 21.1 Pappova věta o šestiúhelníku

Následující větu poprvé dokázal *Pappos z Alexandrie* kolem roku 300 n. l. Její význam pro základy projektivní geometrie byl však rozpoznán až v 17. století, [2].

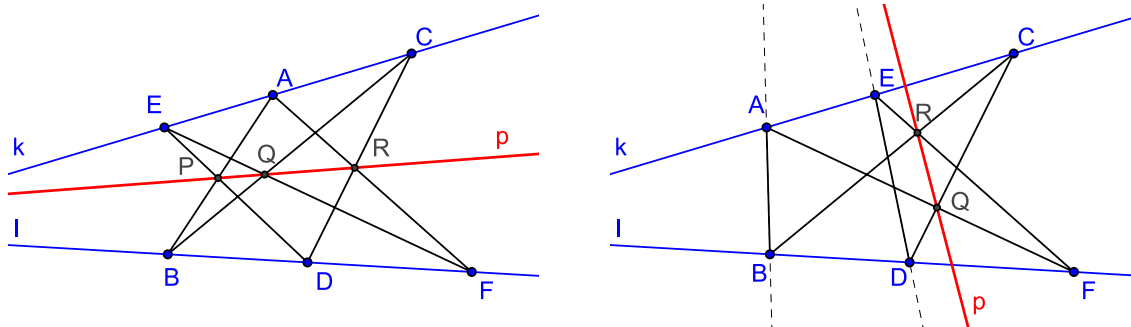
**Věta 78** (Pappova věta o šestiúhelníku). *Jestliže  $A, C, E$  je trojice kolineárních bodů ležících na přímce  $k$  a  $B, D, F$  je další trojice kolineárních bodů tentokrát ležících na  $l$ , a jestliže se přímky  $AB, CD, EF$  protínají v uvedeném pořadí postupně s přímkami  $DE, FA, BC$ , potom jejich průsečíky  $P = AB \cap DE, Q = CD \cap FA$  a  $R = EF \cap BC$  leží v přímce (viz Obr. 104, přímka  $p$ , tzv. Pappova přímka).*

*Důkaz.* Větu zde uvádíme bez důkazu. Pěkný důkaz s využitím Menelaovy věty je publikován v [2]. □



Obrázek 104: Pappova věta o šestiúhelníku

„Projektivní charakter“ věty 78 spočívá v tom, že pojednává čistě jenom o incidenci, bez jakékoliv závislosti na délkách úseček a velikostech úhlů, i bez ohledu na uspořádání bodů (viz Obr. 105).



Obrázek 105: Pappova věta o šestiúhelníku, jiná uspořádání vrcholů

## 21.2 Šestiúhelník

Výše uvedená věta 78 je deklarována ve spojení s šestiúhelníkem. Je otázkou, s jakým. Jedná se o šestiúhelník  $ABCDEFGH$  (že jsou jeho vrcholy „zpřeházené“ a nejdou pěkně „dokola“, jak jsme zvyklí, to nevadí). Body  $P, Q, R$  pak můžeme interpretovat jako průsečíky „protilehlých stran“ tohoto šestiúhelníku (více viz např. [https://en.wikipedia.org/wiki/Pappus%27s\\_hexagon\\_theorem](https://en.wikipedia.org/wiki/Pappus%27s_hexagon_theorem)).

Proč nás zajímá právě uspořádání šesti bodů v rovině? Je známo, že kuželosečka je jednoznačně určena pěti body (viz např. nástroj *Kuželosečka daná pěti body* programu GeoGebra)<sup>1</sup>.

Vezmeme-li libovolnou pětici bodů, vždycky je jimi určena nějaká kuželosečka. Nabízí se tak otázka, jakou podmínkou musí být spjata *šest bodů*, aby všechny ležely na jedné kuželosečce. Takovouto podmínku, kterou splňuje šest bodů ležících na jedné kuželosečce, objevil francouzský matematik a filozof *Blaise Pascal* (1623–1662) a uveřejnil ji roku 1640 (objevil ji ve svých 16 letech!), [6]. *Pascalově větě*, která o této podmínce pojdenává, se budeme věnovat v následující kapitole 21.3. Zde si nejprve uvedeme některé poznatky a důležité pojmy související s „organizací“ šesti bodů do formy šestiúhelníku.

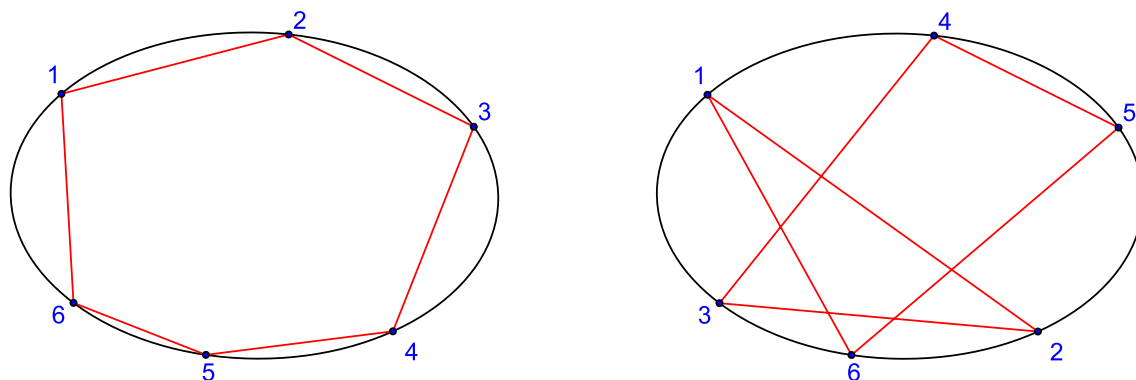
Vzhledem k výše uvedenému je pochopitelné, že se budeme zabývat šesti body na kuželosečce (pro názornost se omezujeme na kružnici nebo elipsu). Šest bodů na kuželosečce, z nichž žádné tři sousední neleží v přímce, můžeme chápat jako vrcholy šestiúhelníku, který je kuželosečce vepsán. *Uvažujme jedno takové rozmístění šesti bodů na dané kuželosečce*. Pokud budeme body (a jejich pořadí jako vrcholů šestiúhelníku) rozlišovat očíslováním 1, 2, 3, 4, 5, 6, je dobré si uvědomit, že existuje tolik vepsaných šestiúhelníků odpovídajících dané šestici bodů, kolik je možných způsobů očíslování (též můžeme říkat *pojmenování*) těchto bodů, tj.  $6! = 720$ . Přitom ale vždy 12 z těchto šestiúhelníků má stejný „tvar“ a liší se jenom pojmenováním vrcholů (který z vrcholů má číslo 1 a zda pokračujeme v záporném či v kladném smyslu, tj. 6 možností „očíslování vrcholů“ na jednu stranu a 6 možností „očíslování vrcholů“ na druhou stranu). Daným šesti bodům na kuželosečce tak lze přiřadit  $720/12 = 60$  různých šestiúhelníků. Dva konkrétní příklady vidíme na Obr. 106.

U šestiúhelníku rozlišujeme dvojice vrcholů *sousedních* (1-2, 2-3, 3-4, 4-5, 5-6, 6-1), *střídavých* (1-3, 2-4, 3-5, 4-6, 5-1, 6-2) a *protilehlých* (1-4, 2-5, 3-6). Přímkou spojující dvojici protilehlých vrcholů šestiúhelníku budeme nazývat *diagonálou* (14, 25, 36).

---

<sup>1</sup>Tuto skutečnost můžeme zdůvodnit například tím, že dvě kuželosečky mohou mít nejvýše čtyři společné body. Pro jejich odlišení pak potřebujeme o jeden bod navíc. Další možností je argumentovat počtem vstupních údajů potřebných pro výpočet rovnice kuželosečky, tj. určení šesti koeficientů  $a, b, c, d, e, f$  v rovnici  $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$ . Vzhledem k tomu, že se jedná o homogenní rovnici, vystačíme se souřadnicemi pěti bodů.

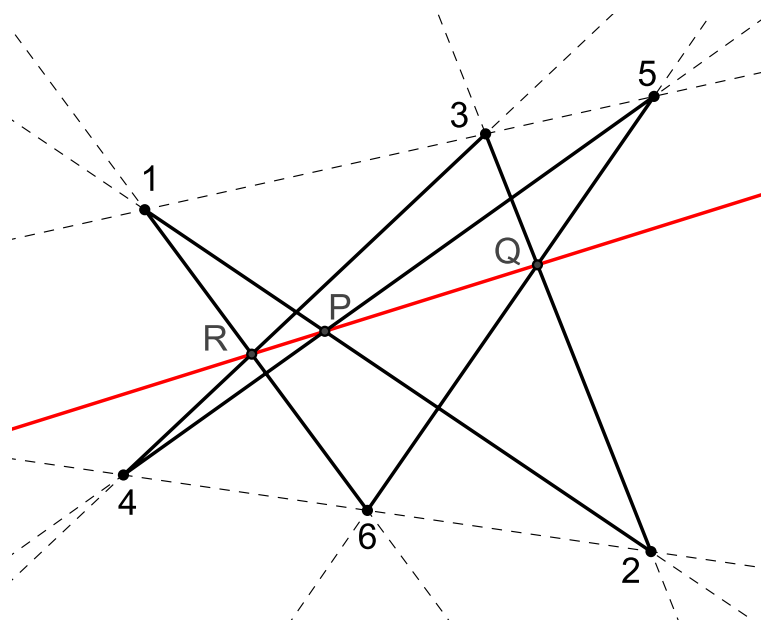




Obrázek 106: Dva příklady šestiúhelníku vepsaného dané elipse (pro pevně zvolené umístění 6 bodů)

Mezi stranami šestiúhelníku nás budou zajímat *protilehlé strany* (12-45, 23-56, 34-61). Šestiúhelník má tedy tři dvojice protilehlých stran a tři diagonály.

Ačkoliv tři sousední vrcholy nesmí být kolineární, pro jiné trojice vrcholů to možné je. Větu 78 tak můžeme přeformulovat tímto způsobem: *Jestliže je každá trojice střídavých vrcholů šestiúhelníku kolineární a jestliže se tři dvojice jeho protilehlých stran protínají, potom jsou průsečíky těchto stran kolineární* (viz Obr. 107).



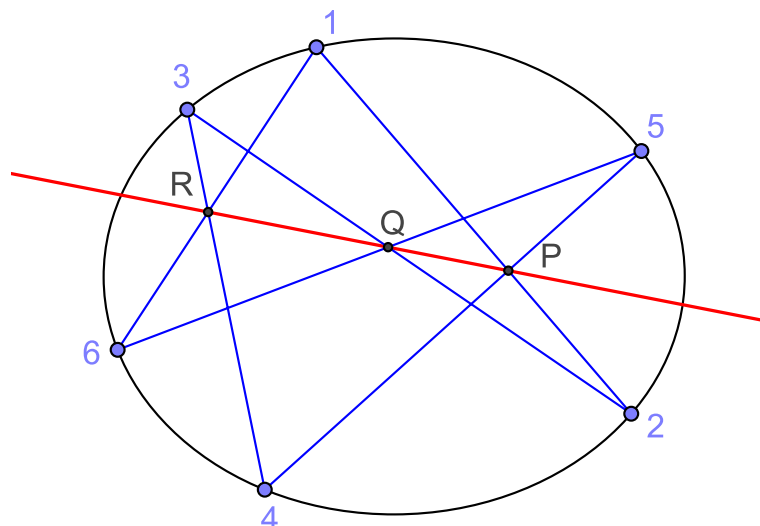
Obrázek 107: Pappova věta pro šestiúhelník 123456

### 21.3 Pascalova věta

Jak už bylo uvedeno, následující větu formuloval ve svých 16 letech francouzský matematik a filozof *Blaise Pascal*, [2, 6].

**Věta 79** (Pascalova věta). *Průsečíky protilehlých stran šestiúhelníku vepsaného kuželosečce jsou tři body ležící na jedné přímce (tzv. Pascalova přímka) a naopak, leží-li průsečíky protilehlých stran šestiúhelníku na jedné přímce, je tento šestiúhelník vepsán kuželosečce.*

*Důkaz.* Větu zde uvádíme bez důkazu. Důkaz jejího speciálního případu pro šestiúhelník vepsaný kružnici s využitím Menelaovy věty je publikován v [2].  $\square$



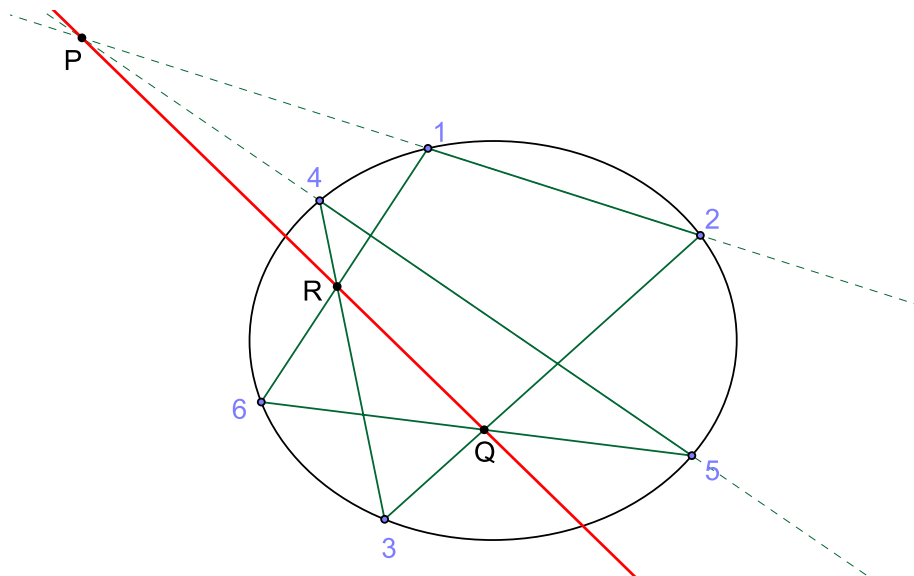
Obrázek 108: Pascalova věta

**Poznámka.** B. Pascal formuloval výše uvedenou větu pro šestiúhelník vepsaný kružnici. Byl si však vědom její platnosti i pro šestiúhelník vepsaný libovolné kuželosečce, [2].

Pascalovu větu můžeme využít při řešení rozličných konstrukčních úloh. Pro ilustraci zde uvedeme dva příklady, řadu dalších konstrukcí najde zájemce v [6].

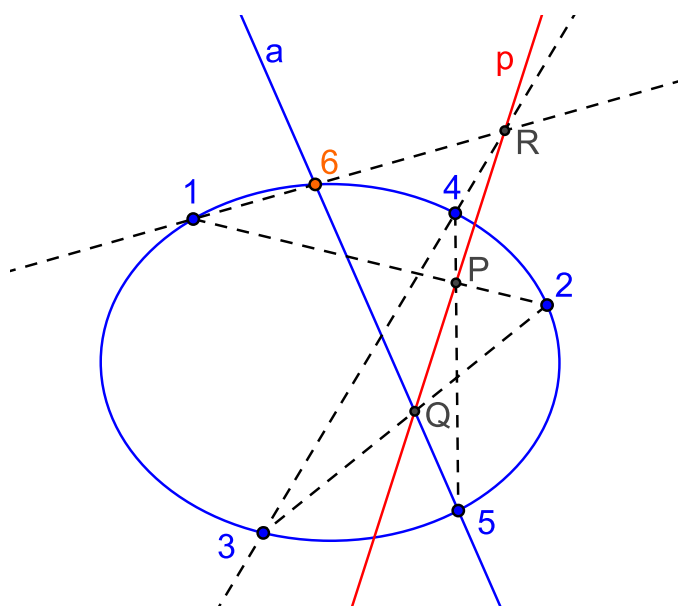
**PŘÍKLAD 21.1.** *Je dáno pět bodů určujících kuželosečku. Jedním z nich prochází přímka. Určete její druhý průsečík s příslušnou kuželosečkou.*

*Řešení:* Zadání i postup řešení ilustruje Obr. 110. Danými pěti body jsou body 1, 2, 3, 4, 5. Danou přímkou je přímka  $a$  procházející bodem 5. Hledaným průsečíkem je potom bod 6. Konstrukce založená na Pascalově větě (věta 79) je zřejmá. Dané



Obrázek 109: Pascalova věta

body spolu s hledaným chápeme jako vrcholy šestiúhelníku vepsaného kuželosečce. Z daných prvků jsme schopni sestavit body  $P$  a  $Q$ , tj. i Pascalovu přímku  $p$ . Jejím průsečíkem  $R$  s přímkou 34 potom musí dle Pascalovy věty procházet přímka 16. Bod 6 tedy určíme jako průsečík přímek  $a$  a  $1R$ .



Obrázek 110: Pascalova věta

**PŘÍKLAD 21.2.** *Kuželosečka v rovině je dána pěti body. Určete další její body.*

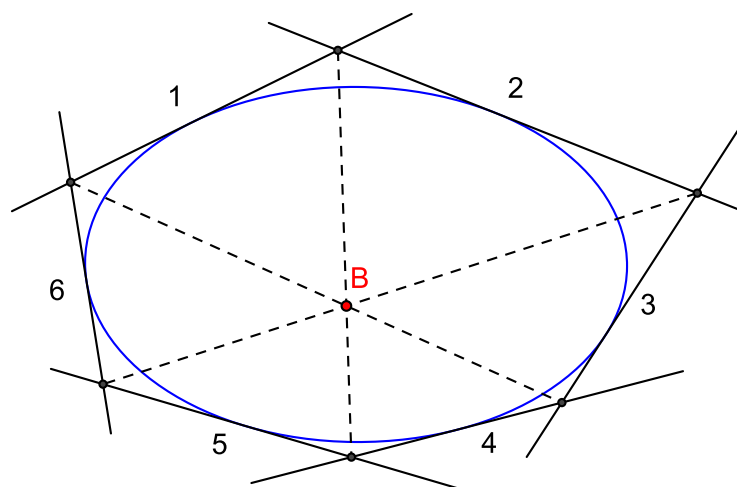
*Řešení:* Několikrát opakujeme konstrukci z řešení příkladu 21.1, pro různě zvolené přímky  $a$ .

## 21.4 Brianchonova věta

Věta, kterou v roce 1806 publikoval francouzský matematik a chemik *C. J. Brianchon* (1783–1864), je duální větou k větě Pascalově, [6].

**Věta 80** (Brianchonova věta). *Tři přímky spojující protilehlé vrcholy šestiúhelníku procházejí jedním bodem (tzv. Brianchonův bod) a obráceně, pokud spojnice protilehlých vrcholů šestiúhelníku procházejí jedním bodem, je tento šestiúhelník opsán kuželosečce (viz Obr. 111).*

*Důkaz.* Větu uvádíme bez důkazu. Důkaz její varianty pro kružnic viz [2]. □



Obrázek 111: Brianchonova věta

Užitím Brianchonovy věty řešte následující příklady. Více podobných konstrukčních úloh na využití věty 80 viz [6].

**PŘÍKLAD 21.3.** *Kuželosečka je dána pěti tečnami. Daným bodem na jedné z nich veďte další tečnu k této kuželosečce.*

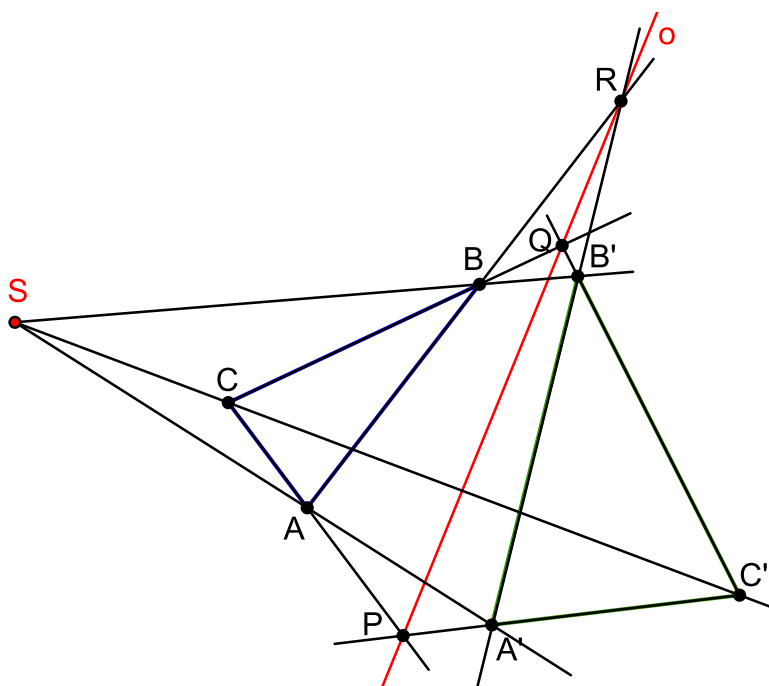
**PŘÍKLAD 21.4.** *Kuželosečka v rovině je dána pěti tečnami. Sestrojte několik dalších jejích tečen.*

## 21.5 Desarguesova věta

Následující větu o perspektivě dvou trojúhelníků formuloval na základě hlubšího studia teorie perspektivy francouzský architekt *G. Desargues* (1593–1662).

**Věta 81** (Desarguesova věta o trojúhelnících). *Jestliže je jeden ze dvou trojúhelníků obrazem druhého ve středovém promítání, leží průsečíky tří dvojic sobě odpovídajících stran těchto trojúhelníků v jedné přímce. Naopak, leží-li tři průsečíky sobě odpovídajících stran dvojice trojúhelníků v přímce, protínají se přímky spojující sobě odpovídající vrcholy v jednom bodě (viz Obr. ).*

*Důkaz.* Větu uvádíme bez důkazu. □



Obrázek 112: Desarguesova věta

**Poznámka.** Vztah mezi dvojicí trojúhelníků popsany Desarguesovou větou známe ze *středové kolineace*.

## 22 Axiomatická výstavba geometrie

„Důkladnost matematiky spočívá na definicích, axiómech, důkazech.“

*Immanuel Kant*

Základy axiomatické výstavby geometrie i celé matematiky položil Eukleides (kolem r. 300 př.n.l.) ve svých Základech (viz [5] *Eukleidovy základy (Elementa)*, překlad F. Servít, 1907, nebo [4] *Základy. Knihy I–IV, V–VI, VII–IX, X, XI–XI.*, koment. Petrem Vopěnkou, 2008–2012.)

Eukleides pojal výklad geometrie v Základech axiomaticky. Celou geometrii odvodil ze 14 axiomů<sup>1</sup>, z nichž 5 nazval postuláty<sup>2</sup> (postuláty můžeme chápat jako formulace základních úloh, které lze v rovině konstruovat; Servít je nazýval „Úkoly prvotné“), [12], [15].

Eukleidovy postuláty:

1. Dva dané (různé) body spojit úsečkou.
2. Danou úsečku na jedné i druhé straně libovolně prodloužit.
3. Vytvořit kružnici s daným středem a procházející daným bodem (různým od středu).
4. Všechny pravé úhly jsou shodné.
5. Dvě přímky v rovině, které protínají jinou přímku této roviny a tvoří s ní po jedné straně vnitřní úhly, jejichž součet je menší dvou pravých, se vždy protínají a to po té straně, kde je součet menší.

**Poznámka.** Konstrukce uskutečňované podle prvních tří Eukleidových postulátů jsou známé jako *eukleidovské konstrukce*, též konstrukce kružítkem a pravítkem (bez měřítka) (anglicky *Compass and straightedge constructions*). Ne každou geometrickou úlohu lze řešit pomocí těchto konstrukcí, viz např. *kvadratura kruhu*, *zdvojení krychle* a *trisekce úhlu*. Nemožnost vyřešit tyto tři úlohy pouze užitím kružítko a pravítka byla dokázána až v 19. století, po vytvoření náležitých matematického aparátu. Nemožnost eukleidovské konstrukce *zdvojení krychle* a *trisekce úhlu* dokázal *Pierre Wantzel* v roce 1837. Nemožnost eukleidovské konstrukce *kvadratury kruhu* pak vyplynula z důkazu transcendentnosti čísla  $\pi$ , který podal *Ferdinand von Lindemann* v roce 1882.

<sup>1</sup>*axiom* – základní věta, poučka, zásada, která se přijímá a bez důkazu považuje za pravdivou: log., mat. tvrzení deduktivní teorie přijaté bez důkazu; *Akademický slovník cizích slov*, Academia, Praha, 2001

<sup>2</sup>*postulát* – princip, požadavek nebo tvrzení určité vědecké teorie přijaté bez důkazů a tvořící její východisko: log. axiom; *Akademický slovník cizích slov*, Academia, Praha, 2001

Některé překlady Základů uvádějí jenom 4 postuláty. Postulát o rovnoběžkách pak řadí mezi axiomy, jako XI. nebo XII. Soustava axiomů eukleidovské geometrie tak není jednoznačně určena. Těchto soustav může být více a mohou se lišit podobou axiomů i jejich počtem. Co je v jedné soustavě axiomem, může být v jiné soustavě větou deduktivně odvozenou. Během historie interpretace Eukleidových Základů tak vznikla například celá řada vět ekvivalentních s postulátem o rovnoběžkách, viz str. 184.

Soustava axiomů eukleidovské geometrie představená v Základech není vytvořena příliš důsledně a trpí některými logickými nedostatky. Nápravu učinil až David Hilbert (1862 - 1943) na přelomu 19. a 20. století. Svou představu, že v logicky dokonale vystavěném systému axiomů v podstatě ztrácí smysl původní význam jednotlivých použitých pojmů, vyjádřil známým výrokiem:

*„Vždy musíme být schopni místo body, přímky a roviny říkat stoly, židle a půllitry.“*

Tím se otevírá cesta k různým *modelům abstraktní geometrie*. Zanedlouho si uvedeme například *Poincarého model* nebo *Beltramioho–Kleinův model*.

### Požadavky na soustavu axiomů:

1. *Bezespornost* – z daných axiomů nelze odvodit zároveň  $V$  i  $\neg V$ .
2. *Nezávislost* – žádný z axiomů soustavy by neměl být logickým důsledkem ostatních (soustava by tedy neměla obsahovat žádný zbytečný axiom).
3. *Úplnost* – všechny modely odvozené ze soustavy axiomů jsou vzájemně izomorfní, tj. platí v nich stejné věty.

## 22.1 Hilbertova soustava axiomů eukleidovské geometrie

Axiomy této soustavy lze rozdělit do následujících pěti skupin (v závorce je vždy uveden symbol, nebo více symbolů, pro příslušnou skupinu axiomů):

- axiomy incidence (**I**),
- a. uspořádání (**U**),
- a. shodnosti (**S**),
- a. spojitosti (**A, C, D**),
- axiom rovnoběžnosti (**R**).

## I. Axiomy incidence I

- I1:** Dva různé body mají společnou jednu přímku.  
**I2:** Přímka obsahuje aspoň dva různé body.  
**I3:** Existuje aspoň jedna trojice různých bodů, které nepatří téže přímce.  
**I4:** Jestliže tři body nepatří jedné přímce, potom patří jediné rovině.  
**I5:** Jestliže dva různé body přímky  $p$  leží v rovině  $\rho$ , potom všechny body přímky  $p$  leží v  $\rho$ .  
**I6:** Jestliže průnik dvou rovin není prázdný, obsahuje aspoň dva navzájem různé body.  
**I7:** Existuje aspoň jedna čtveřice bodů, které neleží v téže rovině.  
**I8:** Rovina obsahuje aspoň jeden bod.

**Definice 36.** *Tři body, které leží na téže přímce, nazýváme kolineární.*

**PŘÍKLAD 22.1.** *Užitím axiomů I dokažte následující věty:*

**Věta 82.** *Průnikem dvou různých rovin, které mají společný aspoň jeden bod, je přímka.*

*Důkaz.*  $I6 \rightarrow I1 \rightarrow I5$  □

**Věta 83.** *Tři nekolineární body jsou navzájem různé.*

*Důkaz.*  $A = B = C$  nebo  $A = B \neq C$  vede ke sporu □

## MODELY GEOMETRIE [I]

Tj. modely geometrie založené pouze na axiomech incidence.

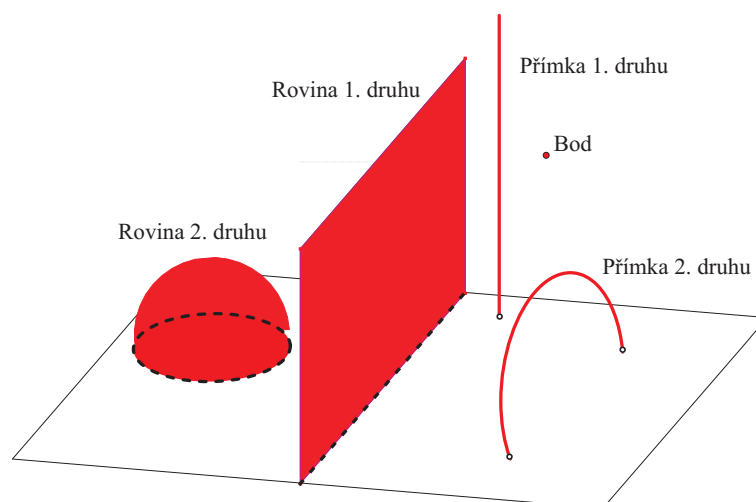
### • M1: Minimální model

- čtyři body,
- šest přímek (protože existuje  $\binom{4}{2} = 6$  neuspořádaných dvojic ze čtyř prvků),
- čtyři roviny (protože existuje  $\binom{4}{3} = 4$  neuspořádaných trojic ze čtyř prvků).



- **M2: Poincarého model**

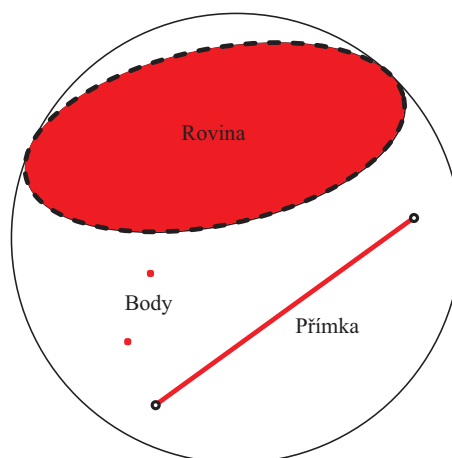
Je tvořen **vnitřními** body poloprostoru omezeného rovinou  $\omega$ . Rozlišujeme zde přímky a roviny prvního a druhého druhu (viz Obr. 113). Přímka prvního druhu je tvořena vnitřními body polopřímky kolmé na rovinu  $\omega$ , přímka druhého druhu je tvořena vnitřními body polokružnice kolmé k rovině  $\omega$  a se středem v rovině  $\omega$ . Rovina prvního druhu je tvořena vnitřními body poloroviny kolmé na  $\omega$  a rovina druhého druhu potom odpovídá vnitřním bodům polokoule se středem v  $\omega$ . Incidence je eukleidovská.



Obrázek 113: Poincarého model

- **M3: Beltramiho–Kleinův model**

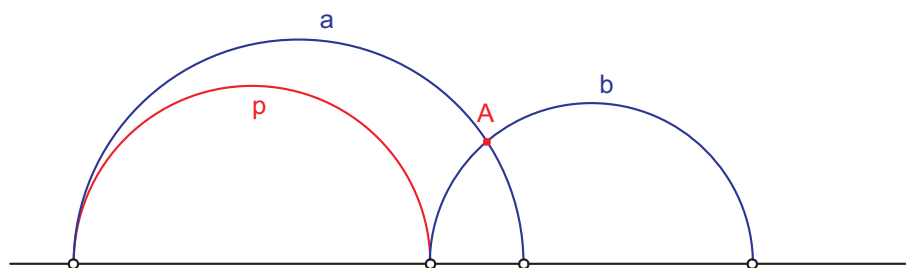
Tvořen vnitřními body koule. Přímku reprezentují vnitřní body tětivy koule a rovinu vnitřní body jejího „rovinného“ řezu (viz Obr. 114). Incidence je eukleidovská.



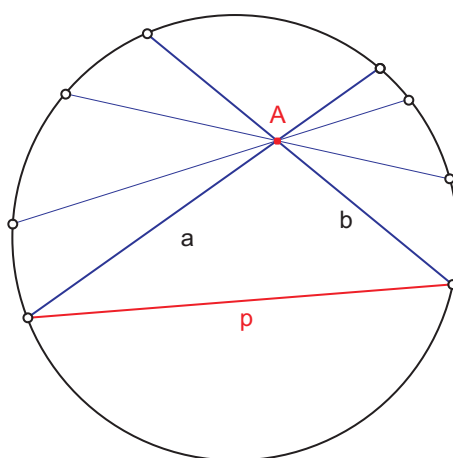
Obrázek 114: Beltramiho-Kleinův model

Oba uvedené modely **M2** a **M3** mají i své rovinné varianty, viz Obr. 115, 116. Rovinný případ *Beltramio–Kleinova modelu* se často uvádí jenom pod názvem *Kleinův model*, případně *Kleinův diskový model*.

**Poznámka.** Modely **M2**, **M3** nejsou modely eukleidovské geometrie, nesplňují axiom rovnoběžnosti (viz Obr. 115, 116). Vidíme, že v obou případech existuje více než jedna rovnoběžka s  $p$ , tj. přímka, která prochází bodem  $A$  a nemá s danou přímkou  $p$  žádný společný bod. Přímky  $a, b$  jsou hraniční přímky.



Obrázek 115: M2: Axiom rovnoběžnosti



Obrázek 116: M3: Axiom rovnoběžnosti

• **M4: Aritmetický celočíselný model planimetrie**

- bod = uspořádaná dvojice celých čísel  $[x, y] \in Z$ ,
- přímka = body splňující rovnici  $ax + by + c = 0$ ,  $a, b, c \in Z$ .

**Poznámka.** Stejně můžeme definovat model racionální (tj.  $[x, y] \in Q$ ,  $a, b, c \in Q$ ) či reálný (tj.  $[x, y] \in R$ ,  $a, b, c \in R$ ).

## II. Axiomy uspořádání U

Tyto axiomy se týkají vlastnosti „bod leží mezi jinými dvěma“.

**U1:** Jestliže bod  $B$  leží mezi body  $A, C$ , jsou  $A, B, C$  tři různé body na přímce a platí též, že  $B$  leží mezi body  $C, A$ .

**U2:** Jestliže  $A, B$  jsou dva navzájem různé body, potom existuje na přímce  $AB$  aspoň jeden bod  $C$  takový, že bod  $B$  leží mezi body  $A, C$ .

**U3:** Ze tří různých bodů  $A, B, C$  ležících na té samé přímce leží nejvýše jeden mezi ostatními dvěma.

**U4:** (Paschův axiom) Jsou-li  $A, B, C$  tři nekolineární body a přímka  $p$ , která těmito body neprochází, obsahuje jistý bod mezi body  $A, C$ , potom přímka  $p$  obsahuje bod mezi  $A, B$  nebo mezi  $B, C$ .

**PŘÍKLAD 22.2.** *Užitím axiomů I, U dokažte následující věty.*

**Věta 84.** *Mezi dvěma různými body leží aspoň jeden bod.*

*Důkaz.*  $I3 \rightarrow U2 \rightarrow U2 \rightarrow U4$

□

**Věta 85.** *Na každé přímce existuje nekonečně mnoho bodů.*

**Geometrie [IU]** se nazývá též **geometrie polohy**

Modely s konečným počtem prvků nemohou splňovat axiomy uspořádání. Proč?

(Řešení: Podle  $I3, I1$  existuje v takové geometrii vždy aspoň jedna přímka, tj. podle  $U2$  nekonečně mnoho bodů)

**MODELY GEOMETRIE [IU]:**

- **Poincarého model**

Uspořádání platí ve smyslu eukleidovském.

- **Beltramiho - Kleinův model**

Uspořádání platí ve smyslu eukleidovském.

- **Aritmetický racionální model planimetrie**

OTÁZKA: *Proč již nestačí aritmetický celočíselný model?*

### III. Axiomy shodnosti S

Tyto axiomy se týkají metrických vlastností. Formulují základní vlastnosti shodnosti úseček.

**S1:** Je-li  $AB = CD$ , potom  $A \neq B, C \neq D$ . Pro každé dva různé body  $A, B$  platí  $AB = BA$ . (Shodnost se týká pouze dvojic různých bodů.)

**S2:** Nechť  $AB$  je úsečka,  $CD$  polopřímka. Potom existuje jediný bod  $E$  polopřímky  $CD$ , pro který platí  $AB = CE$ . (Nanášení úsečky na polopřímku.)

**S3:** Jestliže  $AB = CD$  a  $CD = EF$ , potom  $AB = EF$ . (Tranzitivnost shodnosti.)

**S4:** Jestliže bod  $C$  leží mezi body  $A, B$ , bod  $C'$  mezi body  $A', B'$  a jestliže platí  $AC = A'C', BC = B'C'$ , potom platí  $AB = A'B'$ . (Grafický součet dvou úseček.)

**S5:** Nechť jsou  $ABC, A'B'K$  dvě trojice nekolineárních bodů a nechť  $AB = A'B'$ . Potom existuje jediný bod  $C'$  poloroviny  $A'B'K$ , pro který platí  $AC = A'C', BC = B'C'$ . (Přenesení trojúhelníka k dané úsečce do dané poloroviny.)

**S6:** Nechť jsou  $ABC, A'B'C'$  dvě trojice nekolineárních bodů, pro které platí  $AB = A'B', BC = B'C', CA = C'A'$ . Nechť dále leží bod  $P$  mezi body  $A, B$  a bod  $P'$  mezi body  $A', B'$  tak, že  $AP = A'P'$ . Potom  $CP = C'P'$ .

**PŘÍKLAD 22.3.** Užitím axiomů S dokažte, že shodnost se týká neuspořádaných dvojic bodů.

Důkaz.  $S1 : AB = CD, CD = DC, S3 : AB = DC$

□

#### IV. Axiomy pohybu $S^*$

Axiomy založené na *axiomatickém* pojmu *shodné zobrazení (přemístění)*.

**S\*1:** Leží-li bod  $C$  mezi body  $A, B$  a jsou-li  $A', B', C'$  obrazy bodu v přemístění, leží bod  $C'$  mezi body  $A', B'$ .

**S\*2:** Jestliže je polopřímka v přemístění samodružná, je každý její bod v tomto přemístění samodružný.

**S\*3:** Necht' jsou  $ABC, A'KL$  dvě trojice nekolineárních bodů. Existuje jediné přemístění v rovině, které převádí bod  $A$  do bodu  $A'$ , polopřímku  $AB$  do polopřímky  $A'K'$  a polorovinu  $ABC$  do poloroviny  $A'KL$ .

**S\*4:** Jestliže jsou  $A, B$  dva různé body, potom existuje aspoň jedno přemístění, které převádí bod  $A$  do bodu  $B$  a bod  $B$  do bodu  $A$ .

**S\*5:** Jestliže je  $\angle BAC$  dutý úhel, potom existuje aspoň jedno přemístění, které převádí polopřímku  $AB$  do polopřímky  $AC$  a polopřímku  $AC$  do polopřímky  $AB$ .

**S\*6:** Složením dvou přemístění vznikne přemístění.

**S\*7:** Identita je přemístění.

**S\*8:** Inverzní zobrazení k přemístění je přemístění.

$S^*6, S^*7, S^*8$  - všechna přemístění tvoří grupu

**Věta 86.** *Abstraktní geometrie  $[IUS], [IUS^*]$  jsou totožné, tj. skupiny axiomu  $S, S^*$  jsou ekvivalentní.*

#### MODELY GEOMETRIÍ $[IUS], [IUS^*]$ :

- Model planimetrie - zobrazení inverzní ke stereografické projekci.
- Aritmetický model reálný OTÁZKA: Proč již nestačí aritmetický racionální model?
- Beltramiho–Kleinův model

*Zavedení neeukleidovské vzdálenosti v Beltramiho–Kleinově modelu:*

Vzdálenost bodu  $B$  od bodu  $A$  (viz Obr. 117) definujeme výrazem  $|\ln(UVBA)|$ ,

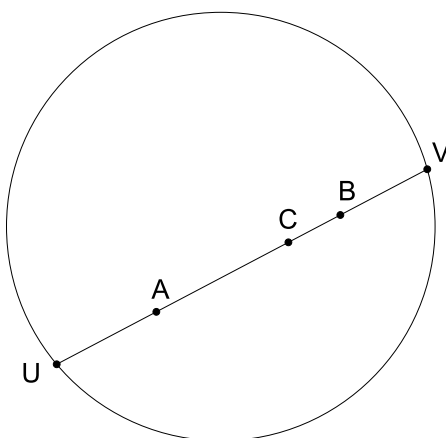
kde  $U, V$  jsou krajní body tětivy, na které leží body  $A, B$ , a  $(UVBA)$  je dvojpoměr bodů  $U, V, B, A$ . Je zřejmé, že pokud se bod  $B$  blíží hranici kruhu, jeho vzdálenost od  $A$  se blíží nekonečnu. Použitím logaritmu dvojpoměru místo pouhého dvojpoměru je zajištěna možnost sčítání vzdáleností. Uvažujme body  $A, C, B$  dle Obr. 117. Potom pro příslušné dvojpoměry platí  $(UVCA) \cdot (UVBC) = (UVBA)$ , zatímco pro jejich logaritmy platí

$$\ln(UVCA) + \ln(UVBC) = \ln(UVBA),$$

což koersponduje s naší představou o možnosti sčítání vzdáleností. Absolutní hodnota zase zaručí nezávislost vzdálenosti dvou bodů na jejich pořadí, protože, když  $(UVAB) = (UVBA)^{-1} = (VUAB)^{-1} = (VUBA)$ , potom

$$|\ln(UVAB)| = |\ln(UVBA)| = |\ln(VUAB)| = |\ln(VUBA)|.$$

Pro takto definovanou vzdálenost bodů, je potom délka úsečky  $UV$  vlastně nekonečná. Dobře tak hraje roli přímky.



Obrázek 117: Vzdálenost bodů v Kleinově (Beltramiho–Kleinově) modelu

## V. Axiomy spojitosti A, C, D

Souvisejí s hledáním odpovědi na otázky: *Lze změřit každou úsečku? Existuje ke každému číslu odpovídající úsečka?*

### Archimédův axiom

**A:** Jsou dány úsečky  $AB, CD$ . Na polopřímku  $AB$  postupně nanášíme úsečku  $CD$  a dostaneme body  $P_1, P_2, \dots, P_n, P_{n+1}$ . Potom existuje takové  $n \in \mathbb{N}$ , že bod  $P_{n+1}$  neleží uvnitř  $AB$ .

Cantorův axiom (axiom úplnosti)

**C: Průnik posloupnosti úseček do sebe zařazených je neprázdný.**

**Věta 87.** *Jestliže průnik posloupnosti úseček do sebe zařazených neobsahuje žádnou úsečku, je tento průnik množinou s jedním bodem.*

*Důkaz.* Dokážeme sporem □

**Věta 88.** *V geometrii [IUSAC] je každé kladné číslo velikostí nějaké úsečky.*

Axiomy A, C lze nahradit jediným axiomem D:

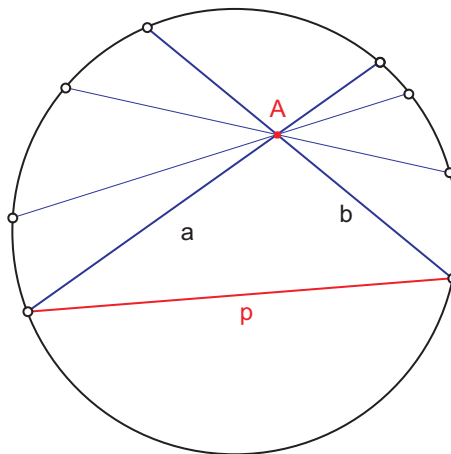
**Dedekindův axiom**

**D: Každý omezený konvexní útvar na přímce, který obsahuje aspoň dva různé body, je úsečka (případně s vynecháním jednoho nebo obou krajních bodů).**

**ABSOLUTNÍ GEOMETRIE [IUSAC], [IUSD]:**

Jedná se o společný základ *eukleidovské* i *neeuclidovské* geometrie.

**VI. Axiom rovnoběžnosti R**



Obrázek 118: Rovnoběžky v Kleinově modelu

Rovnoběžkami budeme rozumět dvě přímky v téže rovině, které nemají společný bod. Jak bylo uvedeno na str. 178, existují geometrie, v nichž bodem neležícím na

přímce prochází více rovnoběžek s touto přímkou. Potom můžeme tyto rovnoběžky rozlišit na tzv. *souběžky* a *rozběžky*. Souběžkami nazýváme „mezí“ přímky ze svazku rovnoběžek procházejících bodem  $A$ . Například v Kleinově modelu na Obr. 118 jsou *souběžkami* přímky  $a$  a  $b$ , ostatní rovnoběžky jsou *rozběžkami* (tj. vyplňují vrcholové úhly, jejichž rameny jsou souběžky).

*Některé věty absolutní geometrie:*

**Věta 89** (Legendrova). *Jsou-li čísla  $\alpha, \beta, \gamma$  velikosti vnitřních úhlů trojúhelníku  $ABC$ , platí  $\alpha + \beta + \gamma \leq \pi$ .*

**Věta 90.** *Jestliže je  $p$  libovolná přímka,  $A$  bod, který na ní neleží, potom bodem  $A$  prochází aspoň jedna rovnoběžka s přímkou  $p$ .*

### Axiom rovnoběžnosti

**R:** Nechť  $p$  je libovolná přímka,  $A$  libovolný bod, který na ní neleží. Potom bodem  $A$  prochází nejvýše jedna rovnoběžka s přímkou  $p$ .

Tento axiom je ekvivalentní s Eukleidovým pátým postulátem uvedeným na str. 174. Ten se jeví tak samozřejmý, že byl dlouho považován za pouhý důsledek předchozích čtyř postulátů. Snahy o jeho odvození z těchto postulátů však vedly vždy jenom k jeho novým formulacím (některé viz níže). Důkazem toho, že axiom rovnoběžnosti je skutečným axiomem a nikoliv důsledkem jiných axiomů, bylo až objevení existence geometrie [IUSDnonR] (Lobačevskij), která se ukázala jako logicky bezesporná. R a zároveň nonR nemůže být totiž důsledkem axiomů IUSD, jsou tedy na nich nezávislé.

[IUSDR] = eukleidovská geometrie

[IUSDnonR] = hyperbolická (Lobačevského) geometrie

### Některé věty ekvivalentní s R

- Existuje aspoň jeden eukleidovský trojúhelník.
- Existuje dutý úhel takový, že každý jeho vnitřní bod náleží úsečce, jejíž krajní body leží na ramenech tohoto úhlu.
- Pythagorova věta.
- Každé dvě kolmice ke dvěma různoběžkám jsou různoběžné.



- Součet vnitřních úhlů ve čtyřúhelníku je  $2\pi$ .
- Každému trojúhelníku lze opsat kružnici.
- Eukleidův pátý postulát (viz str. 174).

**Poznámka.** Jak bylo uvedeno výše, objevení ekvivalence uvedených vět s axiomem R je výsledkem snah o odvození R z ostatních axiomů. Více o historii těchto pokusů najde zájemce například v [12] a [15].

## 23 Neeukleidovské geometrie

### 23.1 Problém rovnoběžek

Eukleidův pátý postulát se většinou nazývá *postulát o rovnoběžkách*. Od ostatních postulátů a axiomů se liší tím, že ho nelze experimentálně ověřit. Týká se totiž nekonečných přímek a existence/neexistence jejich průsečíku ležícího kdesi mimo pozorovatelné zorné pole. Vystává tak otázka, zda tento postulát nelze odvodit z ostatních. Celá staletí se matematici pokoušeli tuto možnost odvození 5. postulátu dokázat. Neúspěšnost těchto snah dala vzniknout *problému rovnoběžek*. Nebylo jasné, zda pokusy selhávají proto, že důkaz není možný, nebo proto, že sice možný je, ale pro jeho provedení je třeba nějakého dosud neznámého obratu.

Snahy o dokázání 5. postulátu pomocí ostatních axiomů a postulátů vedly ke vzniku tzv. *neeukleidovských geometrií*. Zasloužili se o to Carl Friedrich Gauss (1777–1855), János Bolyai (1802–1860) a Nikolaj Ivanovič Lobačevský (1793–1856), později pak Bernhard Riemann (1826–1866).

### 23.2 Lobačevského geometrie [IUSDnonR]

Těž *hyperbolická geometrie*.

Lobačevský (stejně jako Bolyai a zřejmě i Gauss, který z nich byl první, ale své objevy nezveřejnil) použil pro důkaz 5. postulátu metodu nepřímého důkazu (tj. uplatnění *principu o vyloučeném třetím*). Vzal všechny věty, které se dají dokázat bez 5. postulátu (tj. věty tvořící *absolutní geometrii*, viz str. 183) a k nim přidal negaci 5. postulátu: *Existuje alespoň jedna dvojice neprotínajících se přímek v rovině, které protínají tutéž přímku a tvoří s ní po jedné její straně vnitřní úhly, jejichž součet je menší dvou pravých*. Přitom doufal, že dojde ke sporu, což se ale nestalo. Jeho systém tvrzení byl bezesporný, vytvořil tak novou, neeukleidovskou geometrii, *Lobačevského neeukleidovskou geometrii*. Poprvé ji veřejně představil při přednášce v roce 1826, formou publikace pak v roce 1829, [12]. Bolyai objevil tuto geometrii nezávisle na Lobačevském a publikoval ji v roce 1832 (literární formou je historie vzniku neeukleidovské geometrie pěkně popsána v [15]).

Pro další použití využijeme následující formulaci negace 5. postulátu:

**L:** Existují přímka  $p$  a bod  $D$ , který na ní neleží, takové, že alespoň dvě různé přímky jdoucí bodem  $D$  neprotínají přímku  $p$ .

## Vybrané vlastnosti Lobačevského geometrie

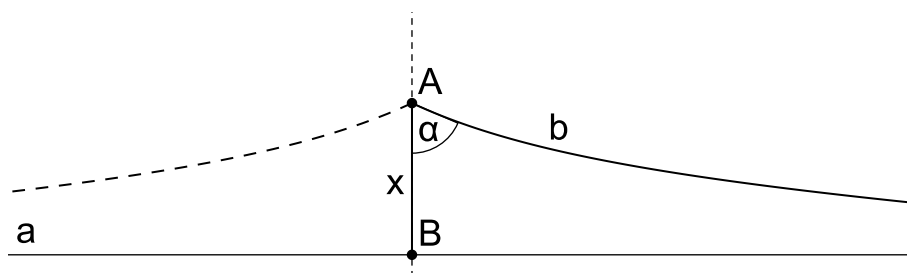
- Součet vnitřních úhlů v trojúhelníku je menší než  $\pi$  :

$$\alpha + \beta + \gamma < \pi.$$

- Shodují-li se dva trojúhelníky v úhlech, jsou shodné.
- Čím je menší součet úhlů trojúhelníka, tím je větší jeho obsah.
- Čím menší je obsah trojúhelníka, tím je součet úhlů bližší k  $\pi$ .

### Lobačevského formule

pro vztah  $\alpha = \Pi(x)$  mezi úhlem souběžnosti  $\alpha$  a vzdáleností  $x$ .



Obrázek 119: Vztah mezi úhlem souběžnosti  $\alpha$  a délkou  $x$  úsečky  $AB$

Uvažujme souběžku  $b$  s přímkou  $a$  jdoucí bodem  $A$ , který je ve vzdálenosti  $x$  od  $a$ , viz Obr. 119. Potom platí formule

$$\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}\Pi(x)\right) = e^{-\frac{x}{k}},$$

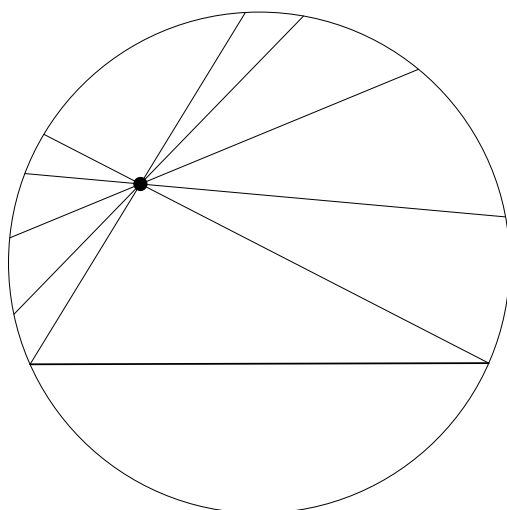
kde  $\alpha = \Pi(x)$  vyjadřuje závislost úhlu souběžnosti  $\alpha$  na  $x$  a  $k$  je libovolná konstanta. Potom je zřejmé, že platí

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\Pi(x)) = \frac{\pi}{2}.$$

Z toho vyplývá, že v dostatečně malé části Lobačevského roviny lze užívat euklidovské geometrie, aniž se dopustíme podstatných chyb, [10].

### Model Lobačevského (hyperbolické) geometrie

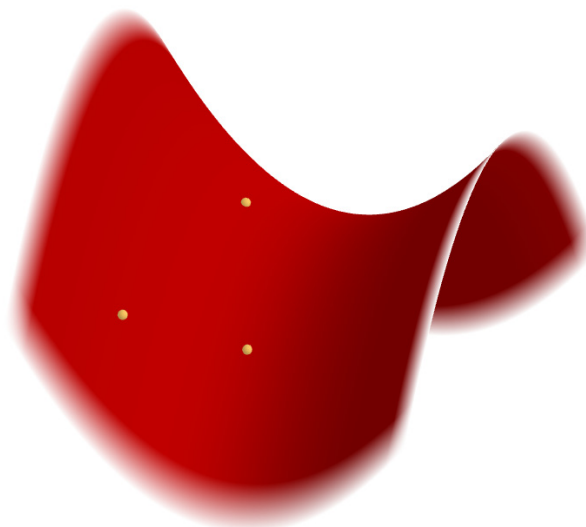
Vedle vytvoření logicky konzistentního systému geometrických vět je důležité vytvořit také model takovéto geometrie. Nejjednodušším je *Kleinův model* (*Kleinův diskový model*, rovinná varianta obecnějšího *Beltramiho–Kleinova modelu*), viz Obr. 120. Modelem roviny je kruh, přímkou je jeho tětiva. Z Obr. 120 je zřejmé, že bodem ležícím mimo danou přímkou může být vedeno nekonečně mnoho přímek, které s ní



Obrázek 120: Kleinův model Lobačevského (hyperbolické) geometrie

nemají nic společného. Už tímto jednoduchým modelem je potvrzeno, že 5. postulát nelze odvodit z ostatních. Kdyby tomu tak bylo, musel by v Kleinově modelu platit.

Dalším možným modelem Lobačevského (hyperbolické) geometrie je plocha parabolického hyperboloidu (svým tvarem připomínající sedlo), viz Obr. 121. Nejkratší spojnici dvou bodů na ploše je tzv. *geodetická čára* (viz též “Geodesics on an ellipsoid”), která se u ploch různých od roviny liší od úsečky. V důsledku toho má trojúhelník tvořený třemi body na parabolickém hyperboloidu součet vnitřních úhlů menší než  $180^\circ$ . Naproti tomu u trojúhelníku na kulové ploše (představte si např. rovnora-



Obrázek 121: Hyperbolický paraboloid

menný trojúhelník se základnou na rovníku a s hlavním vrcholem v severním pólu) je součet úhlů větší než  $180^\circ$ . Kulová plocha je tak modelem další neeuclidovské

geometrie, tzv. *Riemannovy (eliptické) geometrie*.

### 23.3 Riemannova geometrie

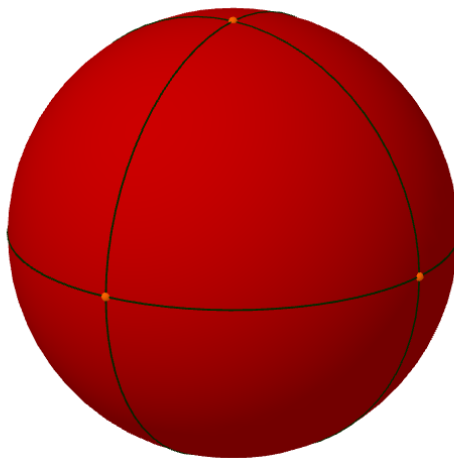
Těž *eliptická geometrie*.

Bernhard Riemann (1826–1866) formuloval v roce 1854 teorii *obecné metrické geometrie*, která zahrnovala kromě *eukleidovské geometrie* a nedávno objevené *hyperbolické (Bolyai–Lobačevského) geometrie* ještě novou *eliptickou geometrii*, později též nazývanou *Riemannova geometrie*.

Typickou vlastností této geometrie je skutečnost, že součet vnitřních úhlů v trojúhelníku je větší než  $\pi$  :

$$\alpha + \beta + \gamma > \pi$$

Modelem Riemannovy geometrie je pak povrch koule (sféry).



Obrázek 122: Povrch koule jako model Riemannovy eliptické geometrie

## 24 Křivky v $E_3$

*Diferenciální geometrie* využívá ke studiu křivek a ploch metody *diferenciálního počtu*. Nyní se seznámíme s vybranými pojmy a postupy diferenciální geometrie prostorových křivek.

### 24.1 Popis křivky

Křivku v prostoru  $E_3$  budeme popisovat *parametricky*, stejně, jako popisujeme přímku. Křivku tak chápeme jako množinu bodů

$$X = [x(t), y(t), z(t)], \quad (125)$$

kde parametr  $t$  probíhá nějaký interval  $I$ . Přitom předpokládáme, že funkce  $x(t)$ ,  $y(t)$  a  $z(t)$  mají spojité derivace řádu aspoň  $r \geq 1$  a jejich první derivace podle  $t$ , které značíme  $\dot{x}$ ,  $\dot{y}$ ,  $\dot{z}$ , nejsou pro žádné  $t \in I$  všechny rovny nule (tj.  $\dot{X}(t) \neq \vec{0}$  pro všechna  $t \in I$ ).

Konkrétní bod křivky tak dostaneme dosazením konkrétní hodnoty za parametr  $t$ .

Rovnici (125), kterou můžeme stručně zapsat jako  $X = X(t)$ , nazýváme *bodovou rovnicí* křivky  $k$ . Pokud místo bodu  $X$  křivky uvažujeme jeho *průvodič* (též *polohový vektor* nebo *radiusvektor*)  $\vec{x}$ , můžeme křivku zapsat rovnicí

$$\vec{x} = (x(t), y(t), z(t)), \quad (126)$$

kterou nazýváme rovnicí *vektorovou*. Pokud rovnici (125), resp. rovnici (126) roze-píšeme po souřadnicích, dostaneme *parametrické rovnice křivky*  $k$

$$x = x(t), y = y(t), z = z(t). \quad (127)$$

**Poznámka.** Derivaci podle parametru křivky značíme tečkou, první derivaci jednou tečkou, druhou derivaci potom dvěma tečkami. Platí tedy  $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$ ,  $\ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2}$ .

Bod křivky, v němž nejsou všechny derivace  $\dot{x}$ ,  $\dot{y}$ ,  $\dot{z}$  zároveň rovny nule a jemuž odpovídá jediná hodnota  $t \in I$  (tj. neexistují dvě různé hodnoty  $t$ , jimž by odpovídal tento jeden bod), nazýváme *regulárním bodem* křivky. Každý bod, který nesplňuje tato kritéria, nazýváme *singulárním bodem*. Pokud některý bod přísluší několika různým hodnotám  $t \in I$ , nazýváme ho *vícenásobným bodem*.

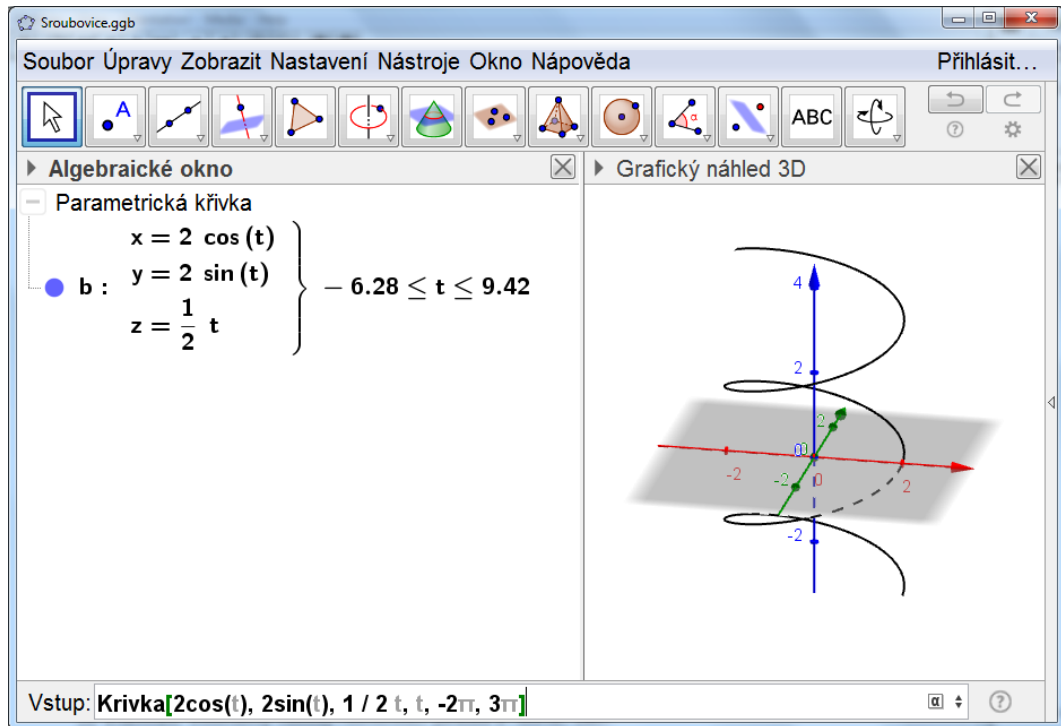
Příkladem prostorové křivky je *šroubovice*

$$x = a \cos t, y = a \sin t, z = bt; t \in (-\infty, \infty), \quad (128)$$

kde  $a, b \in R$ ;  $a$  je poloměr válcové plochy, po níž se šroubovice odvíjí,  $b$  je tzv. *redukovaná výška závitu* (výška jednoho závitu je rovna  $2\pi b$ ).

**PŘÍKLAD 24.1.** Zobrazte šroubovici danou bodovou rovnicí  $X = [2 \cos t, 2 \sin t, \frac{1}{2}t]$  pro  $t \in \langle -2\pi, 3\pi \rangle$ .

*Řešení:* Použijeme program GeoGebra, konkrétně jeho prostředí *Grafický náhled 3D*. Do vstupního řádku zadáme příkaz `Krivka[2 cos(t), 2 sin(t), 1/2 t, t, -2 pi, 3 pi]`. Výsledek viz Obr. 123.



Obrázek 123: Zobrazení šroubovice v GeoGebře

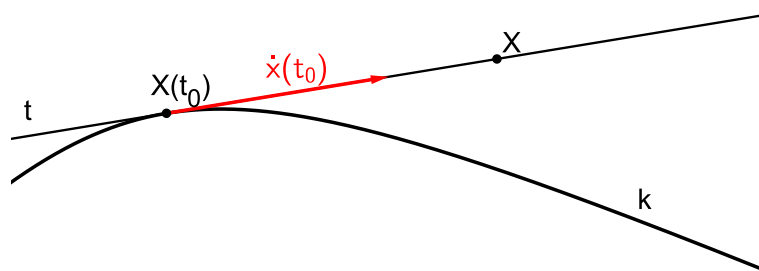
**PŘÍKLAD 24.2.** Zobrazte Vivianiho křivku, danou bodovou rovnicí  $X = [1 + \cos t, \sin t, 2 \sin t/2]$ , pro  $t \in \langle -2\pi, 2\pi \rangle$ .

## 24.2 Tečna křivky

Při zápisu tečny křivky  $k$  dané rovnicí  $X = X(t)$  v bodě  $X(t_0)$  použijeme parametrické vyjádření přímky. Tečnu chápeme jako přímku danou bodem  $X(t_0)$  a směrovým vektorem  $\dot{x}(t_0)$  (který nazýváme *tečným vektorem* křivky  $k$  v bodě  $X(t_0)$ ), viz Obr. 124. Parametrické vyjádření tečny křivky  $k$  v bodě  $X(t_0)$  má potom tvar

$$X = X(t_0) + \alpha \dot{x}(t_0); \alpha \in R, \quad (129)$$

kde  $\alpha$  je reálný parametr.



Obrázek 124: Tečna křivky  $k$  v bodě  $X(t_0)$

**PŘÍKLAD 24.3.** Napište rovnici tečny šroubovice  $X = [a \cos t, a \sin t, bt]$  v bodě  $X(\pi)$ .

*Řešení:* Nejprve vyjádříme potřebné prvky rovnice:  $X(\pi) = [-a, 0, b\pi]$ ,  $\dot{x}(t) = [-a \sin t, a \cos t, b]$ ,  $\dot{x}(\pi) = [0, -a, b]$ . Příslušnou tečnu potom můžeme zapsat parametrickou rovnicí  $X = [-a, 0, b\pi] + \alpha[0, -a, b]$ ;  $\alpha \in R$ , bodovou rovnicí  $X = [-a, -a\alpha, b\pi + \alpha b]$  (vektorovou zapíšeme analogicky), případně parametrickými rovnicemi  $x = -a$ ,  $y = -a\alpha$ ,  $z = b\pi + \alpha b$ ;  $\alpha \in R$ .

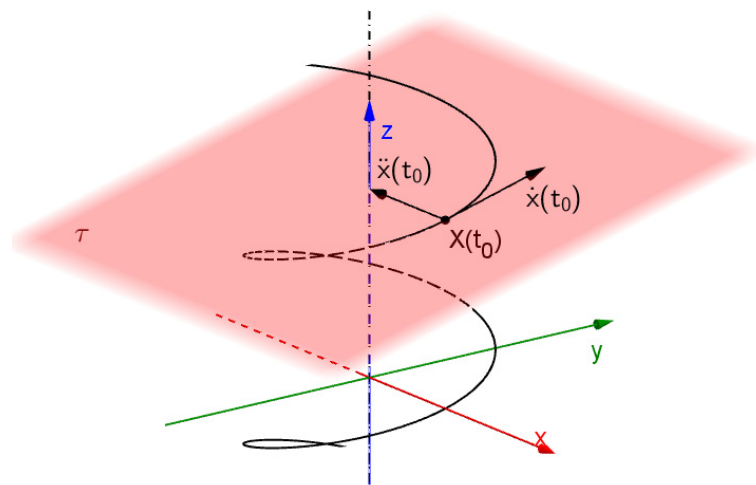
**Poznámka.** Křivku, která má v každém bodě jedinou tečnu spojitě se měnící s parametrem, nazýváme *hladkou*. Stejným způsobem můžeme zavést pojem *hladká část* dané křivky. Pokud se křivka skládá z hladkých částí, nazýváme ji *křivkou po částech hladkou*. [13]

## 24.3 Oskulační rovina

Křivku v prostoru  $E_3$  si můžeme představit jako trajektorii hmotného bodu. Jeho pohyb je tak popsán (vektorovou) rovnicí křivky  $\vec{x} = \vec{x}(t)$ . Přitom vektor  $\dot{\vec{x}}(t)$  chápeme jako *vektor okamžité rychlosti v čase  $t$* , který má vždy směr tečny (je to *tečný*



vektor křivky). Vektor  $\ddot{\vec{x}}(t)$  potom představuje vektor okamžitého zrychlení v čase  $t$ . Počátečním bodem obou těchto vektorů je příslušný hmotný bod (tj. bod křivky). Pokud jsou vektory  $\dot{\vec{x}}(t)$  a  $\ddot{\vec{x}}(t)$  lineárně závislé, nazýváme příslušný bod křivky *inflexním bodem*. V ostatních bodech, které nazýváme *neinflexní*, jsou tyto vektory lineárně nezávislé. Každému neinflexnímu bodu  $X(t_0)$  křivky  $k$  tak můžeme přiřadit rovinu, která je určena tímto bodem a různoběžnými vektory  $\dot{\vec{x}}(t_0), \ddot{\vec{x}}(t_0)$ . Tuto rovinu nazýváme *oskulační rovinou* křivky  $k$  v bodě  $X(t_0)$ , značíme ji  $\tau$ , viz Obr. 125.



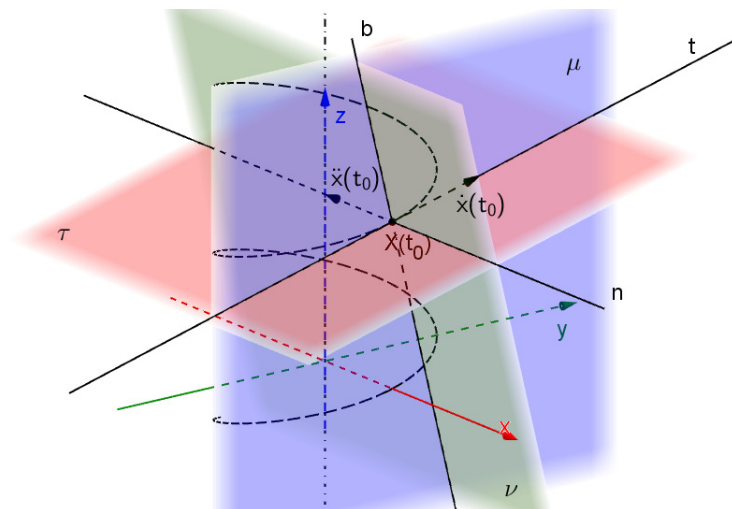
Obrázek 125: Oskulační rovina  $\tau$  šroubovice  $X = [2 \cos t, 2 \sin t, \frac{1}{2}t]$  v bodě  $X(2\pi)$

**Poznámka.** V případě šroubovice na Obr. 125 je vektor  $\ddot{\vec{x}}(t)$  kolmý na tečný vektor  $\dot{\vec{x}}(t)$ . Poznamenejme, že se jedná o speciální případ. Obecně, v případě jiných křivek, mohou tyto vektory svírat rozličné úhly (Víme, že v případě inflexního bodu jsou rovnoběžné).

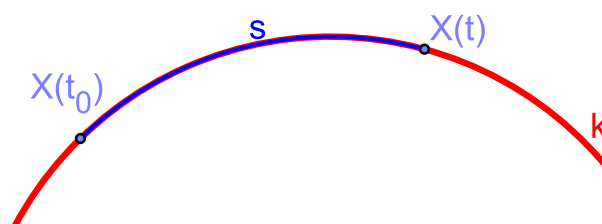
Vedle tečny  $t$  se směrovým vektorem  $\dot{\vec{x}}(t)$  zavádíme v bodě  $X$  křivky  $k$  ještě další dvě význačné přímky a následně ještě tři roviny těmito přímkami určené, viz Obr. 126. Jedná se o přímku  $n$ , která leží v oskulační rovině  $\tau$  a je kolmá k tečně  $t$ , a o přímku  $b$ , která prochází bodem  $X$  kolmo na  $\tau$ . Přímku  $n$  nazýváme *hlavní normálou* křivky  $k$  v bodě  $X$ , přímku  $b$  potom *binormálou* křivky  $k$  v bodě  $X$ . Rovinu přímek  $n, b$  označujeme  $\nu$  a nazýváme ji *normálovou rovinou* křivky  $k$  v bodě  $X$ . Rovinu přímek  $t, b$  označujeme  $\mu$  a nazýváme ji *rektifikační rovinou* křivky  $k$  v bodě  $X$ .

## 24.4 Oblouk křivky

Představme si, že na křivce zvolíme pevný bod  $X(t_0)$  (tj. bod, jemuž odpovídá libovolná, pevně zvolená hodnota parametru  $t_0$ ). Délku křivky měřenou od tohoto



Obrázek 126: Tečna  $t$ , hlavní normála  $n$ , binormála  $b$ , oskulační rovina  $\tau$ , normálová rovina  $\nu$  a rektifikační rovina  $\mu$  šroubovice  $X = [2 \cos t, 2 \sin t, \frac{1}{2}t]$  v bodě  $X(t_0)$  ( $t_0 = 2\pi$ )



Obrázek 127: Oblouk křivky  $k$

bodu nazýváme *obloukem křivky*, viz oblouk  $s$  na Obr. 127 (ukazuje se, že je výhodné použít oblouk jako parametr křivky).

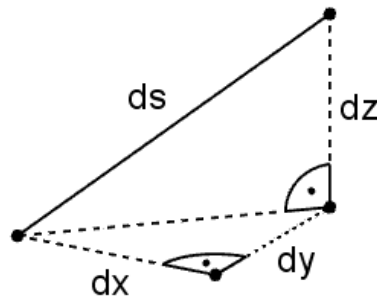
V definici oblouku tak figuruje známý vztah z integrálního počtu pro výpočet délky křivky (naše křivka  $k$ ) mezi dvěma body (v našem případě se jedná o body  $X(t_0)$  a  $X(t)$ ).

**Definice 37** (Oblouk křivky). *Předpokládejme, že křivka  $k$  je dána vektorovou rovnicí  $\vec{x} = \vec{x}(t); t \in I$ . Potom funkci*

$$s = s(t) = \int_{t_0}^t \sqrt{\dot{\vec{x}} \cdot \dot{\vec{x}}} dt = \int_{t_0}^t \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2 + \dot{z}(t)^2} dt \quad (130)$$

*nazýváme obloukem křivky  $k$  od bodu  $t_0 \in I$  do bodu  $t \in I$ .*

**Poznámka.** Připomeňme si ve stručnosti hlavní myšlenku odvození vztahu pro výpočet délky křivky. Oblouk  $s$  si představíme rozdělený na nekonečně malé elementy, každý z nich nahradíme úsečkou délky  $ds$  (diferenciál). Tuto délku potom vyjádříme



Obrázek 128: Nekonečně malý element oblouku  $s$

vztahem  $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$ , kde  $dx, dy, dz$  jsou odpovídající přírůstky (diferenciály) jednotlivých souřadnicových funkcí  $x(t), y(t), z(t)$ , viz Obr. 128 (jedná se vlastně o dvojí postupné použití Pythagorovy věty). S vědomím toho, že uvedený vztah použijeme v kontextu určitého integrálu, formálně ho upravíme do tvaru  $ds = \sqrt{\frac{dx^2}{dt^2} + \frac{dy^2}{dt^2} + \frac{dz^2}{dt^2}} dt$ , který už zřetelně koresponduje s formulí 130.

Oblouk se často používá jako parametr křivky. K přechodu od původního parametru  $t$  k novému parametru  $s$  použijeme funkci  $s = s(t)$  (použijeme ji jako tzv. *přípustnou funkci*). Ta je na příslušném intervalu  $I$  vždy prostá (je rostoucí). Proto k ní na  $I$  existuje funkce inverzní  $t = t(s)$ , kterou když dosadíme do rovnice (bodové, vektorové, parametrických rovnic) křivky za  $t$ , stane se tato rovnice závislá na  $s$ , [1]. Tuto proceduru ilustruje následující příklad.

**PŘÍKLAD 24.4.** Na křivce dané rovnicí  $X = [2 \cos t, 2 \sin t, \sqrt{5}t]$ ;  $t \in \langle -\pi, \pi \rangle$  zaveďte nový parametr, který je obloukem.

*Řešení:* Nejprve určíme *přípustnou* funkci  $s = s(t)$ :

$$s = \int_0^t \sqrt{4 \sin^2 t + 4 \cos^2 t + 5} = 3t. \quad (131)$$

Potom stačí do dané rovnice šroubovice dosadit za  $t$  výraz  $\frac{s}{3}$  a náležitě upravit meze intervalu, v němž se pohybují hodnoty nového intervalu  $s$ . Dostaneme  $X = [2 \cos \frac{s}{3}, 2 \sin \frac{s}{3}, \sqrt{5} \frac{s}{3}]$ ;  $t \in \langle -3\pi, 3\pi \rangle$ .

## 24.5 První křivost křivky

Nyní budeme uvažovat, že parametrem křivky je oblouk  $s$ . Místo rovnice  $X = X(t)$  tak pracujeme s rovnicí  $X = X(s)$ . Pro detailní seznámení s důsledky tohoto přechodu, na které zde není prostor, lze doporučit [1] a [13].

Z toho, jak byl oblouk zaveden, vyplývá, délka křivky mezi dvěma jejími body  $X(s_1)$  a  $X(s_2)$  je přímo rovna rozdílu  $s_2 - s_1$ . Proto se říká, že oblouk „měří křivku“.

Pro parametr  $s$  zavedeme vektory analogické vektorům  $\vec{x}(t), \ddot{x}(t)$ . Pro odlišení od běžného parametru budeme derivaci podle oblouku  $s$  místo tečkami značit čárkami, tj.  $\vec{x}'(s), \vec{x}''(s)$ .

**Definice 38** (První křivost). *Pro křivku  $k$  danou vektorovou rovnicí  $\vec{x} = \vec{x}(s); s \in I$ , kde  $s$  je obloukem, nazýváme vektor  $\vec{t}(s) = \vec{x}'(s)$  vektorem tečny křivky  $k$  v bodě  $X(s)$  a vektor  $\vec{x}''(s)$  vektorem první křivosti křivky  $k$  v bodě  $X(s)$ . Číslo  ${}^1k(s) = |\vec{x}''(s)|$  nazýváme první křivostí (též flexí) křivky  $k$  v bodě  $X(s)$ . Funkce  ${}^1k$ , která každému bodu křivky  $k$  přiřazuje jeho křivost, je tzv. první křivost křivky.*

**Poznámka.** První křivost je významnou charakteristikou křivky. Její převrácená hodnota je rovna poloměru oskulační kružnice křivky v příslušném bodě (oskulační kružnice viz str. 197).

Ještě poznamenejme, že zatímco vektor  $\vec{x}''(s)$  určuje svou velikostí první křivost křivky, velikost vektoru tečny  $\vec{x}'(s)$  je vždy rovna 1 (tj. vektor tečny je vždy jednotkovým vektorem) [1].

Pro vektor  $\vec{x}''(s)$  platí následující věta (viz [1], str. 200).

**Věta 91.** *Bod křivky je inflexním bodem právě tehdy, jestliže první křivost v tomto bodě je rovna nule. Jestliže je daný bod neinflexním bodem křivky, potom vektor první křivosti tohoto bodu je nenulovým vektorem, který je kolmý na vektor tečny tohoto bodu.*

Pokud je první křivost křivky rovna nule v každém jejím bodě, jedná se o přímku nebo její část.

## 24.6 Frenetův trojhran

Nyní završíme přehled charakteristik křivky v jejím daném bodě zavedením pojmu *Frenetův trojhran* (viz [1], str. 201) (*J. F. Frenet* (1816–1900), francouzský matematik).

**Definice 39** (Frenetův trojhran). *Předpokládejme, že  $X(s)$  je neinflexní bod křivky  $k$ . Potom vektory*

$$\vec{t}(s) = \vec{x}'(s), \quad \vec{n}(s) = \frac{\vec{x}''(s)}{|\vec{x}''(s)|}, \quad \vec{b}(s) = \vec{t}(s) \times \vec{n}(s) \quad (132)$$

nazýváme postupně vektorem tečny, vektorem hlavní normály a vektorem binormály křivky  $k$  v bodě  $X(s)$ . Uspořádanou trojici vektorů

$$(\vec{t}(s), \vec{n}(s), \vec{b}(s)) \quad (133)$$

nazýváme Frenetovým trojhranem křivky  $k$  v bodě  $X(s)$ .

**Poznámka.** Je zřejmé, že vektory  $\vec{t}(s), \vec{n}(s), \vec{b}(s)$  jsou jednotkové a navzájem kolmé. Jejich orientace je přitom souhlasná s uspořádanou trojicí jednotkových souřadnicových vektorů  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ . Frenetův trojhran tvoří ortonormální bázi. Tuto skutečnost využíváme v kinematické geometrii při popisu pohybu v trojrozměrném prostoru.

**Věta 92** (Frenetovy vzorce). Pro vektorové funkce  $\vec{t}, \vec{n}, \vec{b}$ , které určují v každém bodě křivky  $k$  příslušný Frenetův trojhran, platí následující vztahy (tzv. Frenetovy vzorce):

$$\begin{aligned} \vec{t}' &= {}^1k\vec{n}, \\ \vec{n}' &= -{}^1k\vec{t} + {}^2k\vec{b}, \\ \vec{b}' &= -{}^2k\vec{n}, \end{aligned} \quad (134)$$

kde reálná funkce  ${}^1k$  je první křivost křivky  $k$  a reálná funkce  ${}^2k$  je tzv. druhá křivost (též torze) křivky  $k$ .

**Poznámka.** První křivost  ${}^1k$  jsme definovali na str. 196, pojem druhé křivosti  ${}^2k$  je však zaveden až výše uvedenými Frenetovými vzorci (134). Zatímco první křivost vyjadřuje míru vychýlení křivky od tečny, druhou křivost můžeme chápat jako míru pro odchýlení (vykroucení) křivky z její oskulační roviny [1].

Jestliže má křivka bez inflexních bodů v každém svém bodě druhou křivost rovnou nule, jedná se o rovinnou křivku. Poznamenejme, že v případě takovéto křivky jsou Frenetovy vzorce obzvláště jednoduché:  $\vec{t}' = {}^1k\vec{n}$ ,  $\vec{n}' = -{}^1k\vec{t}$ .

## 24.7 Oskulační kružnice

Pro snazší zavedení pojmu *oskulační kružnice* nejprve pojednáme o povaze styku (dotyku), který mohou mít dvě křivky ve svém společném bodě. Hovoříme o styku  $q$ -tého řádu (ekvivalentně o styku  $(q+1)$ -bodovém). Pro minimální řád styku je určující nejvyšší řád derivace rovnic obou křivek, která je pro ně společná.

Uvažujme křivky  $k, l$  o rovnicích  $k = k(s), l = l(s)$ . Potom nutnou a postačující podmínkou, aby měly ve společném bodě  $X(s_0)$  (tj. odpovídá mu hodnota parametru  $s_0$ ) styk nejméně  $q$ -tého řádu (tj. styk  $(q+1)$ -bodový), je splnění rovnic

$$k(s_0) = l(s_0), \quad k'(s_0) = l'(s_0), \quad \dots, \quad k^{(q)}(s_0) = l^{(q)}(s_0). \quad (135)$$

Dvě protínající se křivky  $k, l$  mají styk nultého řádu, tj. jednobodový, protože pro ně platí  $k(s) = l(s)$ , ale  $k'(s) \neq l'(s)$ .

Dvě křivky, které mají ve společném bodě společnou tečnu (u prostorových křivek také tečné roviny), mají v tomto bodě styk nejméně prvního řádu, tj. dvojbodový. Více o styku dvou křivek viz [13].

**Definice 40** (Oskulační kružnice). *Kružnici  $m$  nazýváme oskulační kružnicí křivky  $k$  v jejím bodě  $X_0$ , jestliže mají obě křivky v bodě  $X_0$  styk alespoň druhého řádu.*

Vlastnosti oskulační kružnice specifikuje následující věta (viz [1], str. 210).

**Věta 93.** *Nechť  $X_0$  je neinflexní bod křivky  $k$ . Potom existuje právě jedna oskulační kružnice  $m$  křivky  $k$  v bodě  $X_0$  a má tyto vlastnosti:*

1. *Kružnice  $m$  leží v oskulační rovině křivky  $k$  v bodě  $X_0$ , prochází bodem  $X_0$  a má v něm s křivkou  $k$  společnou tečnu.*
2. *Poloměr kružnice  $m$  je roven převrácené hodnotě první křivosti  ${}^1k$  křivky  $k$  v bodě  $X_0$ .*
3. *Střed oskulační kružnice leží na hlavní normále sestrojené ke křivce  $k$  v bodě  $X_0$ , a to na polopřímce určené bodem  $X_0$  a vektorem normály tohoto bodu.*

*Důkaz.* Viz [1], str. 210. □

## 25 Vybrané rovinné křivky

### 25.1 Obalová křivka

**PŘÍKLAD 25.1.** *Za určitých okolností můžeme na dně dobře umytého hrnečku nebo na hladině nápoje v něm pozorovat křivku podobnou srdci (viz obr. 129). Jaká je podstata tohoto jevu? Můžeme odvodit rovnici pozorované křivky?*

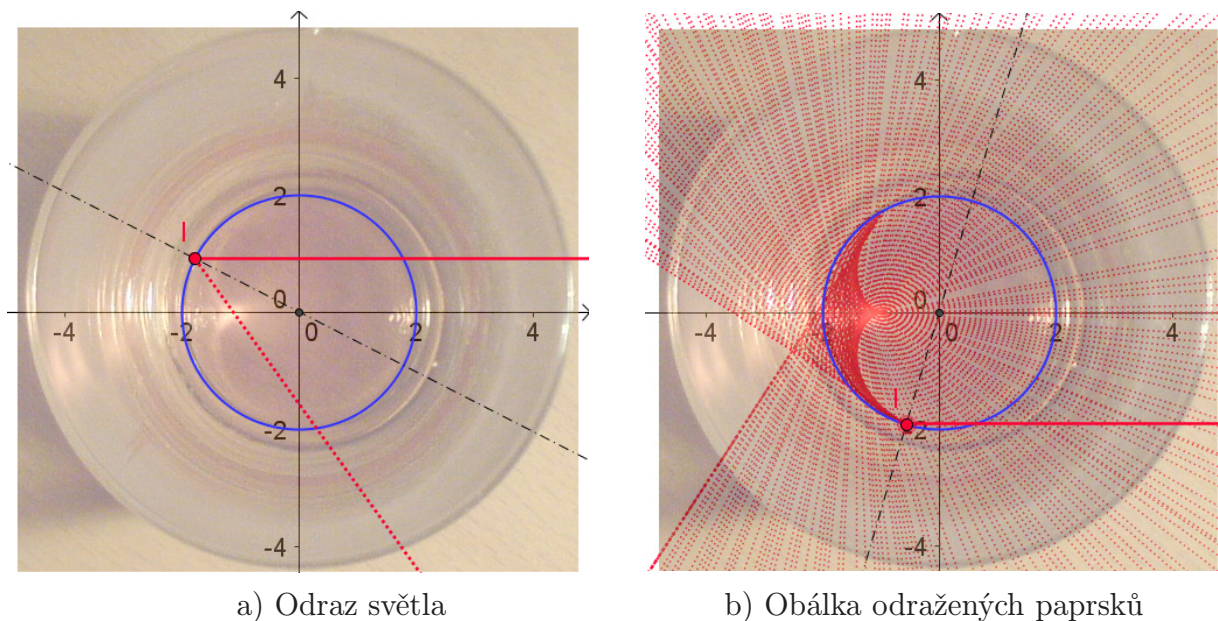


Obrázek 129: : Srdce ve sklenici

Dotyčná křivka je polovinou křivky zvané *nefroida*. Vzniká jako obálka světelných paprsků odražených od vnitřní stěny nádoby. Tím se řadí do rodiny tzv. *kaustik*. Geometrickou podstatu vzniku této křivky snadno modelujeme v programu GeoGebra. K vykreslení systému odražených paprsků, jejichž je nefroida obálkou, využijeme zobrazení stopy polopřímky, která je modelem odraženého paprsku. Při plynulém pohybu bodem dopadu  $I$  (viz Obr. 130a) podél kružnice znázorňující vnitřní stěnu nádoby (po jeho uchopení ukazatelem myši) se potom na *Nákresně* zobrazuje celý systém odražených paprsků a vznik výsledné křivky jako jejich „obálky“ je zřejmý. Výsledek vidíme na Obr. 130b.

*Obálkou (obalovou křivkou)* systému křivek v rovině rozumíme křivku, která má v každém svém bodě tečnu společnou s jednou z křivek uvažovaného systému. Její rovnice jsou řešením soustavy rovnic, která je tvořena rovnicí parametrického systému křivek

$$l(x, y, \varphi) = 0, \quad (136)$$



Obrázek 130: : Geometrický model vzniku kaustiky, GeoGebra 5.0

kde  $\varphi$  je reálný parametr, a její derivací podle tohoto parametru

$$\frac{\partial l(x, y, \varphi)}{\partial \varphi} = 0. \quad (137)$$

Při odvození rovnice zkoumané křivky v programu GeoGebra začneme zadáním souřadnic bodu dopadu  $I$  a normálových vektorů  $n_d$  a  $n_r$  přímek, které v tomto pořadí reprezentují dopadající a odražený paprsek, viz řádky 1–4 následujícího kódu řešení v prostředí CAS GeoGebry.



1	$P := (x, y)$ → $P := (x, y)$
2	$l := (\cos(\varphi + \pi/2), \sin(\varphi + \pi/2))$ → $l := (-\sin(\varphi), \cos(\varphi))$
3	$n_d := \text{Vektor}[(0, 1)]$ → $n_d := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
4	$n_r := \text{Vektor}[-\sin(2\varphi), \cos(2\varphi)]$ → $n_r := \begin{pmatrix} -\sin(2\varphi) \\ \cos(2\varphi) \end{pmatrix}$
5	$l(\varphi) := (P-l) \cdot n_r$ → $l(\varphi) := -(\sin(\varphi) + x) \sin(2\varphi) + (-\cos(\varphi) + y) \cos(2\varphi)$
6	$dl(\varphi) := \text{Derivace}[l(\varphi), \varphi]$ → $dl(\varphi) := -2x \cos(2\varphi) - 2y \sin(2\varphi) - \sin(\varphi) \cos(2\varphi) + \sin(2\varphi) \cos(\varphi)$
7	$K := \text{Reseni}[\{l(\varphi)=0, dl(\varphi)=0\}, \{x, y\}]$ → $K := \left( -\frac{1}{4} \sin(3\varphi) - \frac{3}{4} \sin(\varphi) \quad \frac{1}{4} \cos(3\varphi) + \frac{3}{4} \cos(\varphi) \right)$

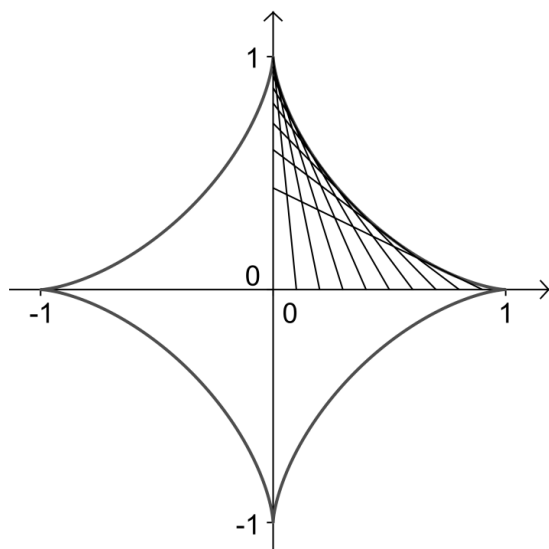
Poté definujeme rovnice (136), (137), v uvedeném kódu jsou nazvány  $l(\phi)$  a  $dl(\phi)$ , viz řádky 5–6 kódu. Řešením soustavy těchto rovnic je bodová rovnice zkoumané křivky, kterou vidíme na posledním řádku č. 7 kódu řešení.

Dalším příkladem obalové křivky je *asteroida*. Můžeme ji totiž definovat jako *obálku* jednotlivých poloh úsečky, jejíž koncové body se pohybují podél kolmých přímk, viz Obr. 131. Pokuste se tuto křivku modelovat v GeoGebře, případně vypočítat její bodovou rovnici.

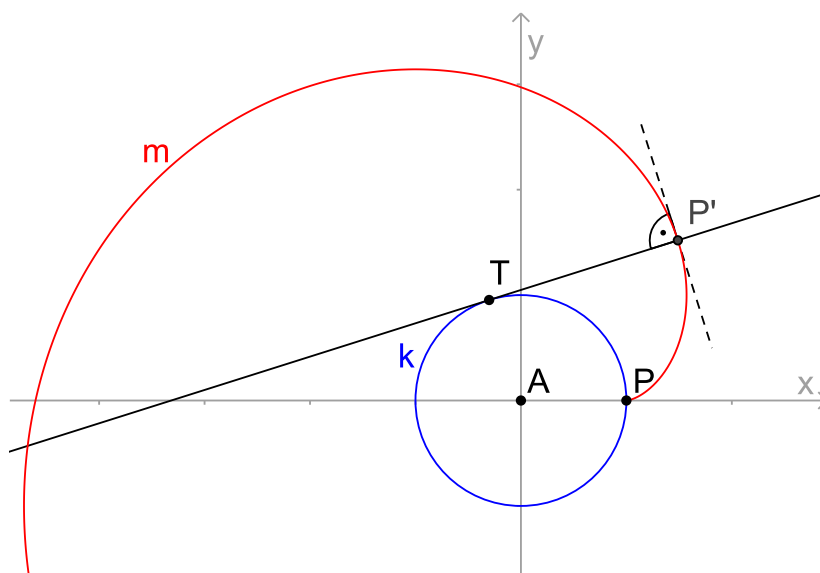
## 25.2 Evoluta a evolventa

Viz Obr. 132. Rovinná křivka  $m$ , která protíná kolmo všechny tečny dané křivky  $k$ , se nazývá *evolventa* křivky  $k$ . Rovinná křivka  $k$ , pro kterou je křivka  $m$  evolventou se nazývá *evoloutou* křivky  $m$ .

K dané křivce  $k$  existuje nekonečně mnoho evolvent. Všechny tyto evolventy mají společné normály, které jsou tečnami  $k$ . Všechny je můžeme získat jako trajektorie



Obrázek 131: Asteroida



Obrázek 132: Evoluta  $k$  a evolventa  $m$

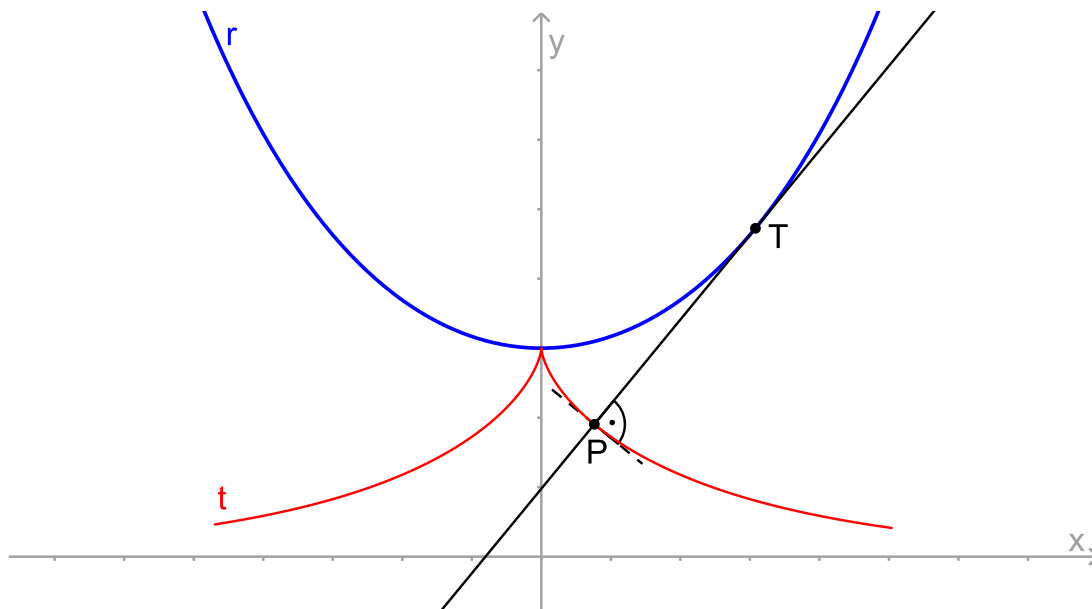
bodů tečny odvalující se po křivce  $k$  (na odvalující se tečnu nanášíme délku oblouku, měřeného od pevně zvoleného bodu křivky  $k$  dotykovému bodu tečny, tj. na Obr. 132 je délka úsečky  $TP'$  shodná s délkou oblouku  $PT$ ).

Pokud křivka  $m$  nemá inflexní bod a má všude nenulovou derivaci první křivosti, existuje k ní jediná evoluta. Tato evoluta je množinou všech středů oskulačních kružnic křivky  $m$ . Evolutu dané rovinné křivky můžeme charakterizovat také jako obalovou křivku normál této křivky.

Na Obr. 132 vidíme část evolventy  $m$  kružnice  $k$  (kružnice  $k$  je tedy evolutou křivky  $m$ ). V technické praxi se tato křivka uplatňuje při návrhu tvaru zubů u ozubených kol. Tvar evolventy kružnice zajišťuje odvalování zubů dvou kol po sobě a tím do-

cháží k plynulému přenosu síly během jejich vzájemného otáčení.

Příkladem další známé dvojice křivek ve vztahu evoluta–evolventa je dvojice řetězovka–traktrix, viz Obr. 133.



Obrázek 133: Řetězovka  $r$  a traktrix  $t$

Pro detailní seznámení s pojmy *evoluta* a *evolventa* lze doporučit [1] a [13].

## Literatura

- [1] Budinský, B. *Analytická a diferenciální geometrie*. SNTL, Praha, 1983.
- [2] Coxeter, H. S. M., Greitzer, S. L. *Geometry revisited*. The Mathematical Association of America, Washington, D.C., 1967.
- [3] Devlin, K. *Jazyk matematiky*. ARGO, 2003.
- [4] Eukleides, *Základy. Knihy I–IV.*, koment. Petrem Vopěnkou, OPS, Nymburk, 2008.
- [5] Eukleides, *Eukleidovy základy (Elementa)*, překlad F. Servít, 1907.  
Dostupné na [https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Eukleides\\_Servit.pd](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Eukleides_Servit.pd)
- [6] Havlíček, K. *Úvod do projektivní geometrie kuželoseček*. SNTL, Praha, 1956.
- [7] Klíma, J. *Různé způsoby zobrazovací v deskriptivní geometrii*. Kapitola „Gnómonický a stereografický průmět kulové plochy“. Praha: JČMF, edice „Cesta k vědění“, 1944, str. 18-25.  
Dostupné na [http://dml.cz/bitstream/handle/10338.dmlcz/403087/CestaKVedeni\\_013-19](http://dml.cz/bitstream/handle/10338.dmlcz/403087/CestaKVedeni_013-19)
- [8] Kuřina, F. *10 geometrických transformací*. Prometheus, Praha, 2002.
- [9] Kuřina, F. *10 pohledů na geometrii*. Akademie věd České republiky, Praha, 1996.
- [10] Kutuzov, B. V. *Lobačevského geometrie a elementy základů geometrie*. Nakladatelství Československé akademie věd, Praha, 1953.
- [11] Pech, P. *Klasické vs. počítačové metody při řešení úloh v geometrii*. Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích, České Budějovice, 2005.  
Dostupné na <http://www.pf.jcu.cz/stru/katedry/m/knihy/Metody.pdf>
- [12] Pavlíček, J. B. *Základy neeukleidovské geometrie Lobačevského*. Přírodovědecké nakladatelství, Praha, 1953.  
Dostupné na <http://dml.cz/dmlcz/402750>
- [13] Rektorys, K. *Přehled užití matematiky*. Prometheus, Praha, 2009.
- [14] Sekanina, M. a kol. *Geometrie II*, SPN Praha, 1988.
- [15] Vopěnka, P. *Trýznivé tajemství*. Práh, Praha, 2003.
- [16] Vyšín, J. a kol.: *Geometria pre pedagogické fakulty II*, Bratislava, 1970.