15 Inverze

V této kapitole se nejprve seznámíme s inverzí jako takovou, potom se zaměříme na její konkrétní příklady, *sférickou inverzi* v trojrozměrném prostoru a *kruhovou inverzi* v rovině. Kruhové inverzi se budeme podrobně věnovat i v příští kapitole. Otázka inverzí je pojednána v [14] na str. 83–92.

Definice 27 (Inverze)**.** *Inverze se středem S a koeficientem κ ($\kappa \neq 0$) v eukleidovském prostoru E_n je zobrazení množiny $E_n - \{S\}$ na sebe, které každý bod X zobrazí na bod X' tak, že*

a) pro $\kappa > 0$ jsou polopřímky SX, SX' totožné, pro $\kappa < 0$ jsou potom opačné,

b) $|SX| = \dfrac{|\kappa|}{|SX|}$.

Je zřejmé, že body S, X (vzor) a X' (obraz) jsou kolineární. K určení inverze stačí zadat *střed* S a dvojici bodů, např. A, A', ve vztahu *vzor* a *obraz*.

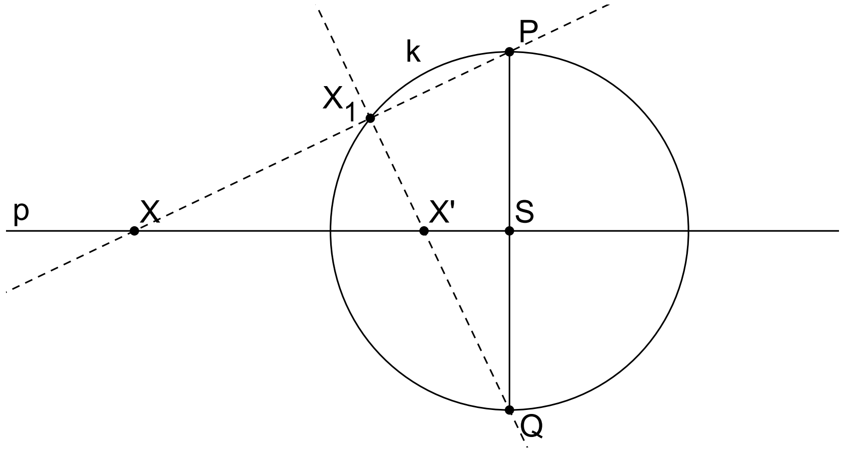
Poznámka. Definice inverze je na první pohled analogická s definicí stejnolehlosti. Definice těchto dvou zobrazení v eukleidovském prostoru se liší akorát ve vztahu mezi vzdálenostmi $|SX'|$ a $|SX|$. Zatímco u stejnolehlosti je $|SX'|$ přímo úměrná $|SX|$ (tj. $|SX'| = \kappa|SX|$, kde κ je koeficient stejnolehlosti), u inverze je $|SX'|$ nepřímo úměrná $|SX|$ (tj. $|SX'| = \dfrac{\kappa}{|SX|}$, kde κ je koeficient inverze).

PŘÍKLAD 15.1. *Dokažte, že zobrazení v rovině, jehož princip je naznačen na Obr. 66 (kružnice k má střed S a poloměr r; body X, X' a S leží v přímce p), splňuje definici inverze.*

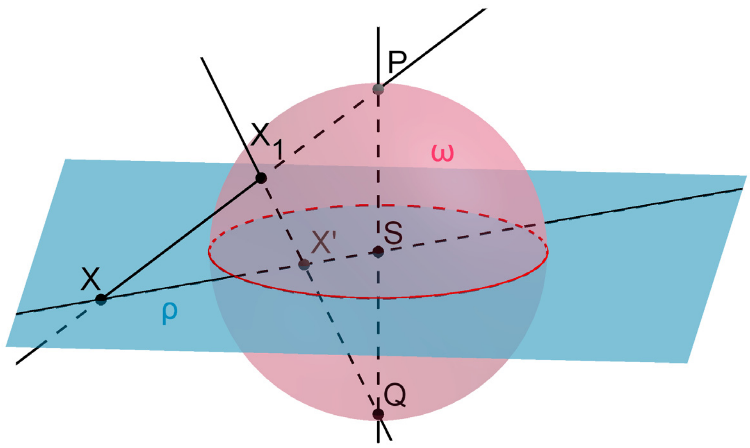
Řešení: Z podobnosti trojúhelníků $\triangle SXP \sim \triangle SQX'$ vyplývá vztah $|SX'| = \dfrac{r^2}{|SX|}$. Zobrazení tak splňuje definici inverze dané středem S a koeficientem $\kappa = r^2$, kde r je poloměr dané kružnice k. Jedná se o tzv. *kruhovou inverzi* určenou kružnicí k. Tomuto zobrazení se budeme podrobně věnovat v kapitole 16. Tam si také uvedeme ještě jeden mechanismus přiřazení obrazu danému bodu v kruhové inverzi.

15.1 Sférická inverze

Nyní uvažujme trojrozměrnou variantu Obr. 66, kde místo kružnice k figuruje sféra (kulová plocha) ω se středem S a poloměrem r a místo přímky p je dána rovina ρ



Obrázek 66: Inverze v rovině



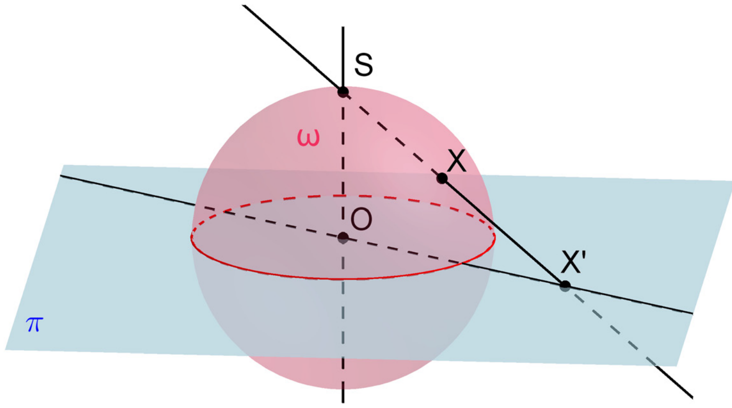
Obrázek 67: Inverze v prostoru – Sférická inverze

procházející bodem S, kolmo na spojnici dvou diametrálně protilehlých bodů (pólů) P, Q, viz Obr. 67.

Jedná se o tzv. *sférickou inverzi* určenou sférou (kulovou plochou) ω se středem S a poloměrem r. Opět, tak jako v případě rovinné varianty z příkladu 15.1, není obtížné dokázat, že toto zobrazení přiřazující bodu $X \in \rho$ obraz $X' \in \rho$ splňuje definici 27. Postup tohoto přiřazení lze přitom popsat pomocí složení dvou zobrazení, z nichž jedno je tzv. *stereografická projekce* a druhé je zobrazení k této projekci inverzní.

15.2 Stereografická projekce

Pojednání o tomto zobrazení a jeho vlastnostech lze najít např. v [7]. Zde je také uvedena informace, že se stereografickým průmětem pracoval již Hipparchos kolem roku 150 př. n. l.



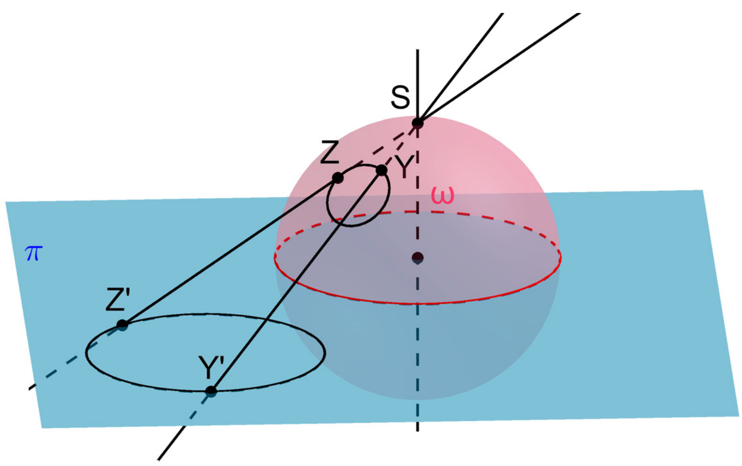
Obrázek 68: Stereografická projekce

Definice 28 (Stereografická projekce)**.** *Stereografický průmět kulové plochy je středovým průmětem kulové plochy pro střed promítání S ležící na kulové ploše ω a pro průmětnu π rovnoběžnou s tečnou rovinou kulové plochy ve středu promítání S, viz Obr. 68. [7]*

Poznámka. Průmětna π se většinou volí tak, jak je znázorněno na Obr. 68, tj. prochází středem O kulové plochy kolmo na přímku OS.

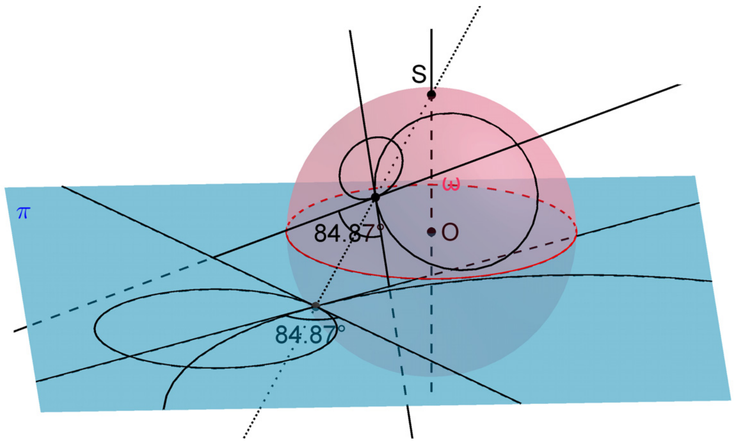
Stereografická projekce má dvě důležité vlastnosti:

(1) Kružnice kulové plochy ω se promítají opět do kružnic, viz Obr. 69.



Obrázek 69: Obrazem kružnice je opět kružnice

(2) Úhel dvou křivek kulové plochy ω se u jejich obrazů zachovává (zobrazení, která zachovávají velikost úhlu nazýváme *konformní*), viz Obr. 70.



Obrázek 70: Velikost úhlu se zachovává

15.3 Vybrané vlastnosti sférické inverze

Podíváme-li se zpět na Obr. 67 vidíme, že sférickou inverzi lze složit ze dvou zobrazení. Bod X se nejprve zobrazí na bod X_1 prostřednictvím inverzního zobrazení ke stereografické projekci z bodu P na rovinu π, potom se bod X_1 zobrazí na X' ve stereografické projekci z bodu Q na rovinu π.

Inverze je *involutorní zobrazení*, to znamená, že je-li obrazem bodu X bod X', je obrazem bodu X' bod X.

Přitom body uvnitř sféry (v případě kruhové inverze pak kružnice) se zobrazují vně, a naopak body vně sféry (kružnice) se zobrazují dovnitř. Body sféry (kružnice) jsou potom samodružné.

Snadno ověříme skutečnost, že přibližuje-le se bod X ke středu S inverze, jeho obraz X' se neomezeně vzdaluje. Přirozeně se tak nabízí myšlenka, že obrazem bodu S, který je v definici 27 z eukleidovsk0ho prostoru vyňat, je bod v nekonečnu. Tuto myšlenku precizuje zavedení tzv. *Möbiova prostoru*, viz např. [14], str. 85 (August Ferdinand Möbius, 1790–1868).

Möbiovým prostorem rozumíme eukleidovský prostor E_n rozšířený o tzv. *nevlastní bod* (tj. bod „v nekonečnu“). Značíme ho $M_n = E_n \cup \{\infty\}$. Tento nevlastní bod je potom v Möbiově prostoru obrazem středu inverze S.