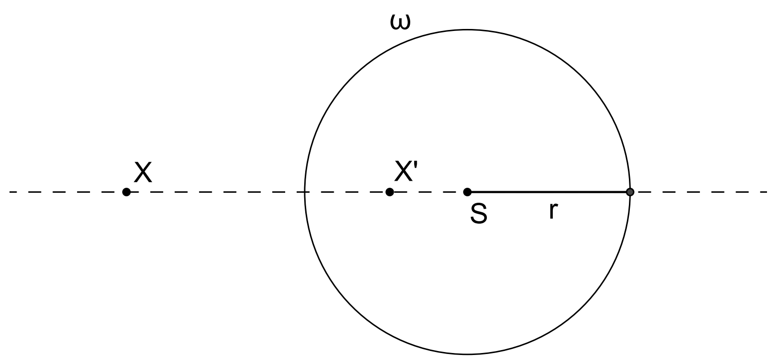
16 Kruhová inverze

Definice 29. *Kruhová inverze určená kružnicí $\omega(S, r)$ (viz Obr. 71) je zobrazení, které každému bodu $X \neq S$ přiřadí bod X' tímto způsobem:*

(1) $X' \in \mapsto SX$,

(2) $|SX| \cdot |SX'| = r^2$.



Obrázek 71: Kruhová inverze

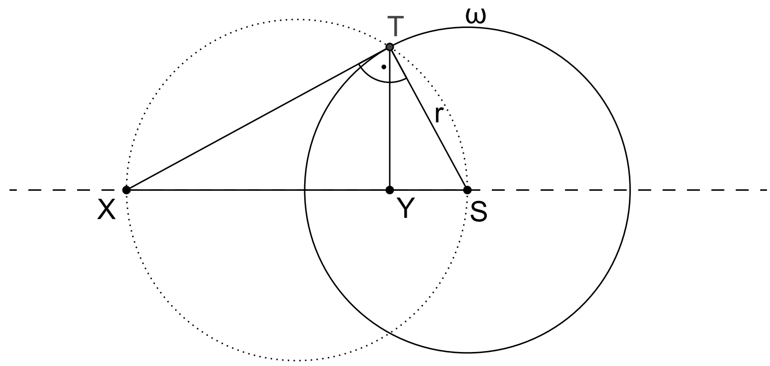
Z definice vyplývá, že kruhová inverze je *involutorní* zobrazení, tj. obrazem bodu X' je bod X.

Otázkou je, jak toto zobrazení konstrukčně provést[15]. Na Obr. 66 je jeden možný způsob, založený, jak už víme, na projekcích z bodů P a Q. Obvykle se však používá jiný způsob, založený na Eukleidově větě o odvěsně. Nyní se s ním pomocí Obr. 72 seznámíme. Jestliže T je bod dotyku tečny kružnice ω vedené z bodu X, je $\triangle XST$ pravoúhlý trojúhelník s přeponou XS. Potom pro patu Y výšky sestrojené z vrcholu T na přeponu XS dle *Eukleidovy věty o odvěsně pravoúhlého trojúhelníku* platí

$$|SY| \cdot |SX| = r^2.$$

Je tedy zřejmé, že bod Y je obrazem bodu X v souladu s definicí 29. Příslušnou konstrukci proto můžeme použít k sestrojení obrazu bodu v kruhové inverzi. Přitom je třeba mít na paměti, že kruhová inverze je involutorním zobrazením. Obrazem bodu Y (vnitřní bod kružnice ω) je tedy naopak zase bod X (vnější bod kružnice ω). Pro úplnost připomeňme, že body kružnice ω jsou samodružné, zobrazí se samy na sebe, opět v souladu s definicí 29.

[15]Při rýsování v GeoGebře tuto otázku řešit nemusíme. Program má implementován nástroj *Kruhová inverze*. Při jeho použití stačí zadat bod, který chceme zobrazit a určující kružnici.



Obrázek 72: Kruhová inverze – konstrukce obrazu bodu X

16.1 Vybrané vlastnosti kruhové inverze

Kruhová inverze je příkladem *nelineárního zobrazení*, nejedná se o afinní zobrazení, přímka se až na speciální případy nezobrazuje na přímku (přímky, které neprocházejí středem inverze, se zobrazují na kružnice).

Z definice inverze je patrné, že vnitřní body určující kružnice (sféry) se zobrazují na vnější body a naopak.

Inverze je tzv. *konformní zobrazení*, tj. zachovává velikost úhlu.

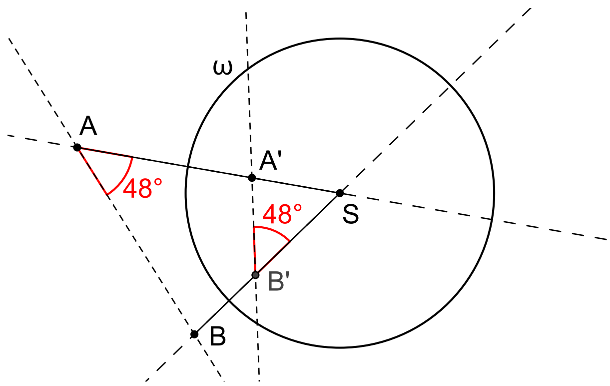
Jak je na tom kruhová inverze se *samodružnými útvary*? Samodružnými body jsou body určující kružnice. Samodružnými přímkami jsou přímky procházející středem inverze. Samodružné jsou ty kružnice, které ortogonálně protínají určující kružnici.

Nyní si tyto vlstnosti uvedeme formou vět (jejichž důkaz je však většinou přenechán čtenáři).

Věta 59. *Vnitřní body určující kružnice se zobrazí na vnější body této kružnice a naopak, vnější body se zobrazí na vnitřní.*

Věta 60. *Jestliže jsou A', B' obrazy bodů A, B v kruhové inverzi, jejíž střed S neleží na přímce AB (viz Obr. 73), potom $|\angle SAB| = |\angle SB'A'|$.*

Důkaz. Z definice kruhové inverze vyplývá $|SA'| \cdot |SA| = |SB'| \cdot |SB| = r^2$, tj. $\dfrac{|SA'|}{|SB'|} = \dfrac{|SB|}{|SA|}$. Protože trojúhelníky ABS a $B'A'S$ mají společný úhel při vrcholu S, jsou podle věty *sus* podobné. $\square$

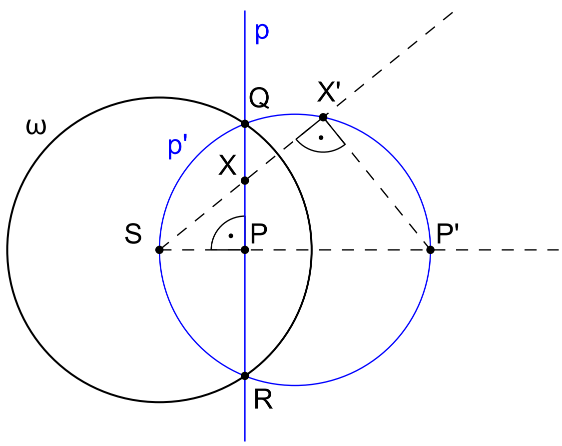


Obrázek 73: $|\angle SAB| = |\angle SB'A'|$

Věta 61. *Body přímky procházející středem inverze S se zobrazují opět na tuto přímku. S výjimkou středu S.*

Věta 62. *Obrazem přímky p, která neprochází středem inverze S, je kružnice p' procházející středem S. Kromě bodu S.*

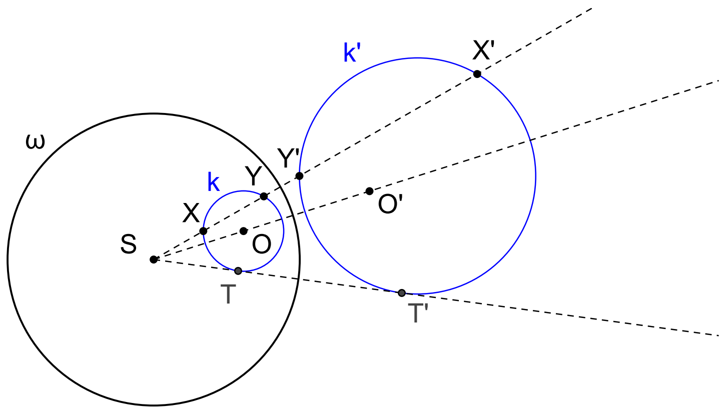
Věta 63. *Obrazem kružnice procházející středem inverze S (kromě bodu S) je přímka, která neprochází středem inverze S.*



Obrázek 74: Obrazem přímky p je kružnice p' a naopak.

Důkaz. Při znalosti Thaletovy kružnice lze tuto větu dokázat jako důsledek věty 60, viz Obr. 74. □

Věta 64. *Obrazem kružnice, která naprochází středem inverze S je kružnice.*

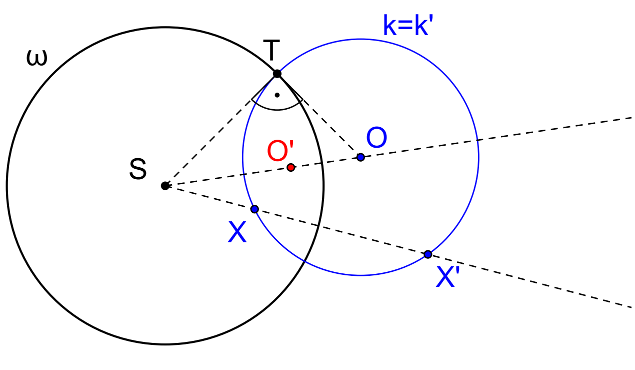


Obrázek 75: Obrazem kružnice k, která neprochází středem S, je kružnice k' a naopak.

Důkaz. K důkazu lze využít mocnost bodu ke kružnici, konkrétně mocnosti bodu S ke kružnicím k a k', viz Obr. 75. □

Poznámka. Na Obr. 75 je patrná jedna typická vesměs však opomíjená vlastnost kruhové inverze, že obrazem středu kružnice k není střed kružnice k', viz body O a O' na obrázku.

Věta 65. *Nutnou a postačující podmínkou, aby kružnice k se středem O, různá od určující kružnice ω, byla v kruhové inverzi samodružná je, aby* **ortogonálně** *protínala určující kružnici inverze ω.*



Obrázek 76: Samodružná kružnice k ortogonálně protíná určující kružnici ω.

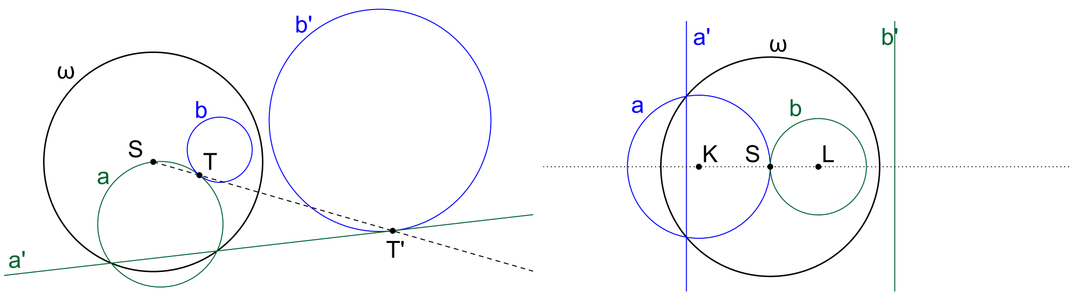
Důkaz. K důkazu opět využijeme mocnost bodu ke kružnici, konkrétně mocnost bodu S ke kružnici k, viz Obr. 76. □

Poznámka. Na Obr. 76 opět stojí za pozornost fakt, že ačkoliv se kružnice k zobrazuje sama na sebe, její střed O se zobrazuje na jiný bod O'.

Věta 66. *Nechť jsou a, b dvě kružnice nebo přímka a kružnice, které se dotýkají. Potom:*

a) Jestliže se dotýkají v bodě $T \neq S$, kde S je střed inverze, potom se dotýkají i jejich obrazy v bodě T', který je obrazem bodu T.

a) Jestliže se dotýkají ve středu inverze S, potom jsou jejich obrazem přímky $a' \parallel b'$.



Obrázek 77: Zachování incidence v kruhové inverzi

16.2 Analytické vyjádření kruhové inverze

Při odvození analytického vyjádření kruhové inverze se středem S a koeficientem κ vyjdeme z Obr. 78, kde je uvažovaná inverze zadána určující kružnicí ω se středem S a poloměrem r (víme, že platí $r^2 = \kappa$). Vztah mezi body S, X a X' můžeme v každém okamžiku popsat rovností

$$|SX'| = k \cdot |SX|, \tag{104}$$

která sice připomíná stejnolehlost, liší se však od ní tím, že hodnota k není konstantní, ale závisí na X (místo k by asi bylo vhodnější psát $k(X)$). Víme přece, že kruhová inverze je definována vztahem

$$|SX'| = \frac{\kappa}{|SX|}. \tag{105}$$

Dáme-li vztahy (104) a (105) dohromady, dostaneme pro k vztah

$$k = \frac{\kappa}{|SX|^2}. \tag{106}$$

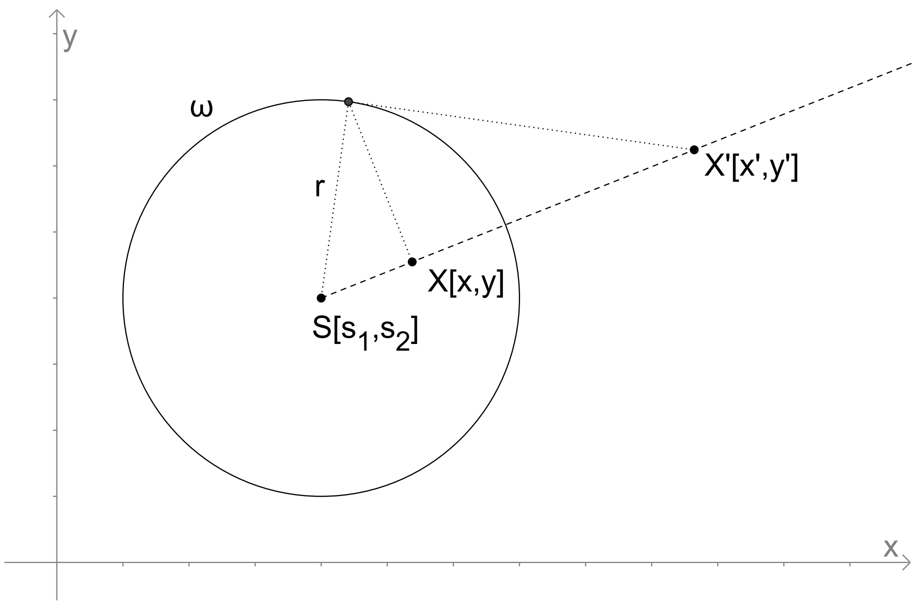
Nyní stačí rovnost (104) přepsat do tvaru $X' - S = k \cdot (X - S)$, odkud po dosazení z (106) odvodíme konečné analytické vyjádření kruhové inverze. Pro obraz X' bodu X v kruhové inverzi se středem S a koeficientem κ tak platí

$$X' = S + \frac{\kappa}{|SX|^2} \cdot (X - S), \tag{107}$$

případně

$$X' = S + \frac{r^2}{|SX|^2} \cdot (X - S), \tag{108}$$

pro určující kružnici ω se středem S a poloměrem r.



Obrázek 78: Analytické vyjádření kruhové inverze.

16.3 Cvičení – kruhová inverze

1. V jaký útvar převede kruhová inverze kružnici a její dvě tečny, které jsou

a) různoběžné, b) rovnoběžné?

2. Prozkoumejte obrazy těchto dvou útvarů v kruhové inverzi:

a) dvě na sebe kolmé přímky, b) kružnice a přímka, která prochází jejím středem.

3. Je dána přímka p, která protíná danou kružnici k v bodech K, L a je dán bod B, ležící mimo přímku p i kružnici k. Bodem B veďte kružnici, která se dotýká p i k.

4. Sestrojte kružnici procházející danými body A, B a dotýkající se dané kružnice k; body A, B jsou vnější body kružnice k.

5. Jsou dány tři kružnice k_1, k_2, k_3, které se navzájem protínají a všechny procházejí bodem O. Sestrojte kružnici k, která se dotýká kružnic k_1, k_2, k_3.

6. Jsou dány tři kružnice k_1, k_2, k_3, z nichž se každé dvě zvenku dotýkají. Sestrojte kružnici k, dotýkající se daných kružnic.

7. Jsou dány dvě dotýkající se kružnice k_1, k_2 a přímka p. Sestrojte kružnici, která se dotýká kružnic k_1, k_2 a přímky p.

8. Jsou dány dvě přímky p_1, p_2 a kružnice k, která se dotýká přímky p_1. Sestrojte kružnici, která se dotýká přímek p_1, p_2 a kružnice k.

9. Jsou dány dvě dotýkající se kružnice k_1, k_2 a přímka p. Sestrojte kružnici se středem na přímce p, která se dotýká kružnic k_1, k_2.

10. Jsou dány tři kružnice k_1, k_2, k_3, z nichž k_1 a k_2 se protínají v bodech A, B; k_3 leží vně k_1 i k_2. Sestrojte kružnici k, která se dotýká kružnic k_1, k_2, k_3.

11. V rovině je dán trojúhelník ABC. Najděte střed kruhové inverze zobrazující bod A na bod B, je-li bod C samodružný.

12. Určete střed kruhové inverze s koeficientem 2, při které se bod $[1, 0]$ zobrazí na bod $[2, 0]$.

13. Existuje kruhová inverze, při níž jsou body $[-1, 0], [1, 0]$ samodružné a bod $[0, 0]$ se zobrazí na bod $[0, 1]$? Při kladné odpovědi určete střed této inverze, koeficient a analytické vyjádření.

14. Při kterých kruhových inverzích se zobrazí bod $[0, 1]$ na bod $[0, 9]$ a bod $[2, 0]$ do vlastního bodu na ose x? Určete vždy střed a koeficient inverze.

15. V omezené nákresně je dána přímka t a na ní přístupný bod T. Dále je dán nepřístupný bod $M = p \cap q$; p, q jsou přímky. Sestrojte kružnici k, která prochází bodem M a přímky t se dotýká v bodě T.

16. V omezené nákresně sestrojte střed S kružnice k procházející nepřístupnými body $A = x \cap y, B = u \cap v$ a přístupným bodem C (x, y, u, v jsou dané přístupné přímky).