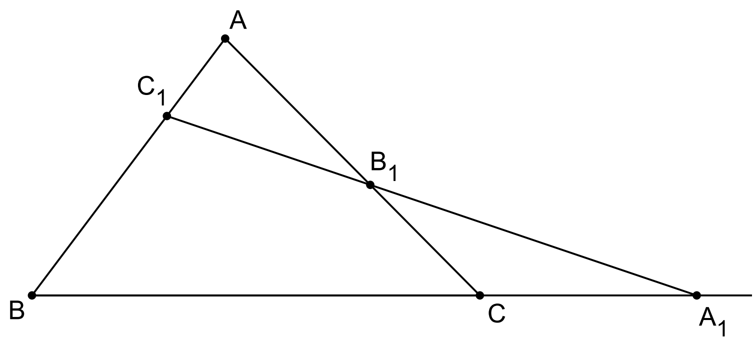
14.2 Menelaova věta

Menelaus z Alexandrie byl řecký matematik žijící na přelomu 1. a 2. století n. l. *Menelaova věta* se zabývá vztahem trojúhelníku a přímky, která neprochází žádným z jeho vrcholů a není rovnoběžná s žádnou z jeho stran[14]. Tak, jako *Cevova věta* poskytuje kritérium pro existenci společného bodu tří přímek, tak *Menelaova věta* poskytuje kritérium kolineárnosti tří bodů.

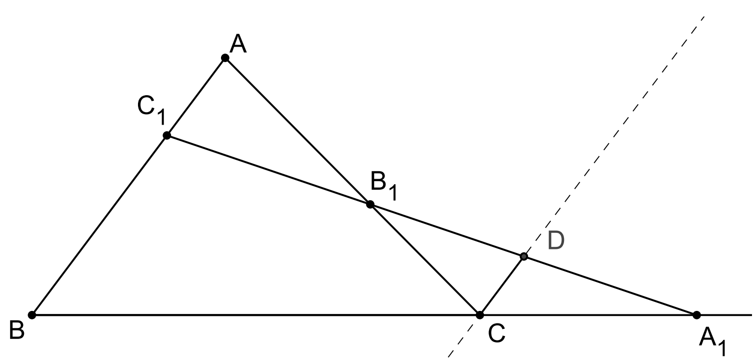
Věta 56 (Menelaova věta)**.** *Body A_1, B_1, C_1 ležící na stranách trojúhelníku ABC nebo na jejich prodlouženích jsou kolineární právě tehdy, když platí:*

$$\frac{|BA_1|}{|A_1C|} \cdot \frac{|CB_1|}{|B_1A|} \cdot \frac{|AC_1|}{|C_1B|} = 1. \tag{100}$$



Obrázek 57: Menelaova věta

Důkaz. K důkazu věty využijeme podobnosti trojúhelníků. Vyjdeme z Obr. 58, který dostaneme z Obr. 57 doplněním úsečky CD rovnoběžné se stranou AB, bod D přitom leží na přímce A_1C_1. Vidíme v něm dvě dvojice podobných trojúhelníků:



Obrázek 58: Důkaz Menelaovy věty užitím podobnosti trojúhelníků

[14]Vztahu takové přímky a daného trojúhelníku se týká též *Paschův axiom: Jestliže přímka prochází vnitřním bodem jedné strany trojúhelníku, potom prochází vnitřním bodem už jenom právě jedné ze dvou zbývajících stran, pokud neprochází vrcholem. Třetí stranu protíná v jejím „vnějším“ bodě. Moritz Pasch* (1843–1930) byl německý matematik.

$\triangle C_1B_1A \sim \triangle DB_1C$ a $\triangle BA_1C_1 \sim \triangle CA_1D$. Přitom z podobnosti první uvedené dvojice trojúhelníků vyplývá vztah

$$\frac{|AC_1|}{|AB_1|} = \frac{|CD|}{|CB_1|}, \tag{101}$$

z podobnosti druhé dvojice trojúhelníků pak vyplývá

$$\frac{|BA_1|}{|C_1B|} = \frac{|A_1C|}{|CD|}. \tag{102}$$

Po vynásobení rovnosti (101) rovností (102) a následné úpravě dostaneme dokazovaný vztah

$$\frac{|BA_1|}{|A_1C|} \cdot \frac{|CB_1|}{|B_1A|} \cdot \frac{|AC_1|}{|C_1B|} = 1.$$

□

Vztah (100) uvedený v Menelaově větě lze formulovat také pomocí *dělicího poměru* (viz str. 17). Připomeňme si, že zlomky ze vztahu (100) lze psát takto:

$$\frac{|BA_1|}{|A_1C|} = |(BCA_1)|, \quad \frac{|CB_1|}{|B_1A|} = |(CAB_1)|, \quad \frac{|AC_1|}{|C_1B|} = |(ABC_1)|.$$

Protože je zřejmé, že přímka A_1C_1 nemůže protnout všechny tři strany trojúhelníku ABC v jejich vnitřních bodech, bude součin uvedených dělicích poměrů vždy kladný. Vztah (100) tak můžeme přepsat do podoby

$$(ABC_1) \cdot (BCA_1) \cdot (CAB_1) = 1. \tag{103}$$

Klasický i počítačový důkaz této věty, spolu s jejím zobecněním, najde zájemce také v online dostupné publikaci [11].