23 Neeukleidovské geometrie

23.1 Problém rovnoběžek

Eukleidův pátý postulát se většinou nazývá *postulát o rovnoběžkách*. Od ostatních postulátů a axiomů se liší tím, že ho nelze experimentálně ověřit. Týká se totiž nekonečných přímek a existence/neexistence jejich průsečíku ležícího kdesi mimo pozorovatelovo zorné pole. Vyvstává tak otázka, zda tento postulát nelze odvodit z ostatních. Celá staletí se matematici pokoušeli tuto možnost odvození 5. postulátu dokázat. Neúspěšnost těchto snah dala vzniknout *problému rovnoběžek*. Nebylo jasné, zda pokusy selhávají proto, že důkaz není možný, nebo proto, že sice možný je, ale pro jeho provedení je třeba nějakého dosud neznámého obratu.

Snahy o dokázání 5. postulátu pomocí ostatních axiomů a postulátů vedly ke vzniku tzv. *neeukleidovských geometrií*. Zasloužili se o to Carl Friedrich Gauss (1777–1855), János Bolyai (1802–1860) a Nikolaj Ivanovič Lobačevský (1793–1856), později pak Bernhard Riemann (1826–1866).

23.2 Lobačevského geometrie [IUSDnonR]

Též *hyperbolická geometrie*.

Lobačevský (stejně jako Bolyai a zřejmě i Gauss, který z nich byl první, ale své objevy nezveřejnil) použil pro důkaz 5. postulátu metodu nepřímého důkazu (tj. uplatnění *principu o vyloučeném třetím*). Vzal všechny věty, které se dají dokázat bez 5. postulátu (tj. věty tvořící *absolutní geometrii*, viz str. 183) a k nim přidal negaci 5. postulátu: *Existuje alespoň jedna dvojice neprotínajících se přímek v rovině, které protínají tutéž přímku a tvoří s ní po jedné její straně vnitřní úhly, jejichž součet je menší dvou pravých.* Přitom doufal, že dojde ke sporu, což se ale nestalo. Jeho systém tvrzení byl bezesporný, vytvořil tak novou, neeukleidovskou geometrii, *Lobačevského neeukleidovskou geometrii*. Poprvé ji veřejně představil při přednášce v roce 1826, formou publikace pak v roce 1829, [12]. Bolyai objevil tuto geometrii nezávisle na Lobačevském a publikoval ji v roce 1832 (literární formou je historie vzniku neeukleidovské geometrie pěkně popsána v [15]).

Pro další použití využijeme následující formulací negace 5. postulátu:

L: Existují přímka p a bod D, který na ní neleží, takové, že alespoň dvě různé přímky jdoucí bodem D neprotínají přímku p.

Vybrané vlastnosti Lobačevského geometrie

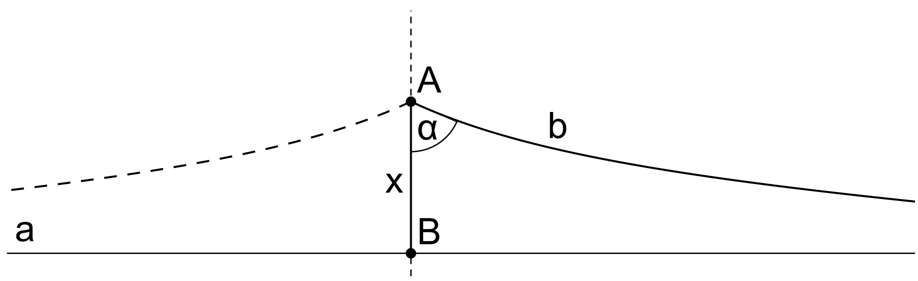
- Součet vnitřních úhlů v trojúhelníku je menší než π :

$$\alpha + \beta + \gamma < \pi.$$

- Shodují-li se dva trojúhelníky v úhlech, jsou shodné.
- Čím je menší součet úhlů trojúhelníka, tím je větší jeho obsah.
- Čím menší je obsah trojúhelníka, tím je součet úhlů bližší k π.

Lobačevského formule

pro vztah $\alpha = \Pi(x)$ mezi úhlem souběžnosti α a vzdáleností x.



Obrázek 119: Vztah mezi úhlem souběžnosti α a délkou x úsečky AB

Uvažujme souběžku b s přímkou a jdoucí bodem A, který je ve vzdálenosti x od a, viz Obr. 119. Potom platí formule

$$\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}\Pi(x)\right) = \mathrm{e}^{-\frac{x}{k}},$$

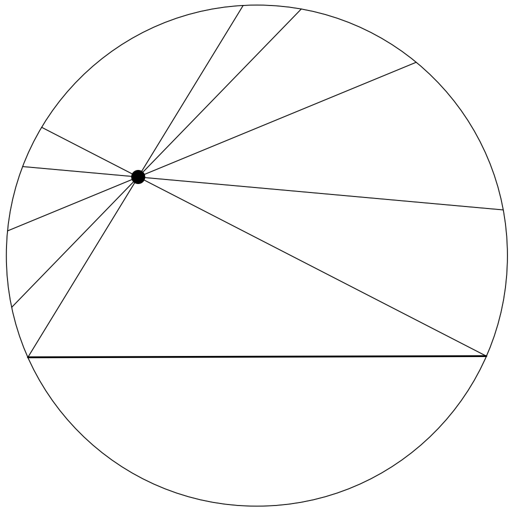
kde $\alpha = \Pi(x)$ vyjadřuje závislost úhlu souběžnosti α na x a k je libovolná konstanta. Potom je zřejmé, že platí

$$\lim_{x \to 0} (\Pi(x)) = \frac{\pi}{2}.$$

Z toho vyplývá, že v dostatečně malé části Lobačevského roviny lze užívat euklidovské geometrie, aniž se dopustíme podstatných chyb, [10].

Model Lobačevského (hyperbolické) geometrie

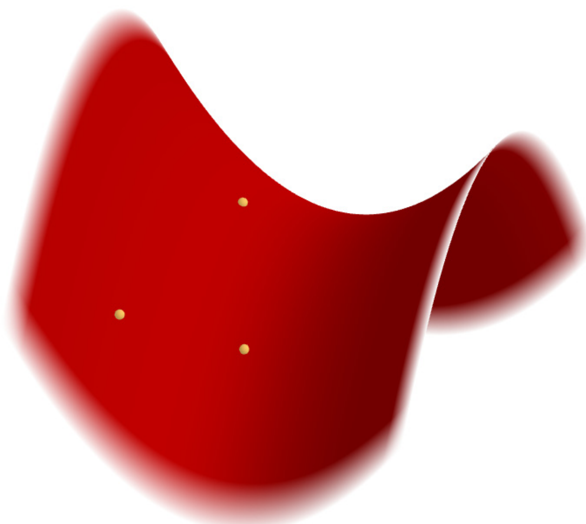
Vedle vytvoření logicky konzistentního systému geometrických vět je důležité vytvořit také model takovéto geometrie. Nejjednodušším je *Kleinův model* (*Kleinův diskový model*, rovinná varianta obecnějšího *Beltramiho–Kleinova modelu*), viz Obr. 120. Modelem roviny je kruh, přímkou je jeho tětiva. Z Obr. 120 je zřejmé, že bodem ležícím mimo danou přímku může být vedeno nekonečně mnoho přímek, které s ní



Obrázek 120: Kleinův model Lobačevského (hyperbolické) geometrie

nemají nic společného. Už tímto jednoduchým modelem je potvrzeno, že 5. postulát nelze odvodit z ostatních. Kdyby tomu tak bylo, musel by v Kleinově modelu platit.

Dalším možným modelem Lobačevského (hyperbolické) geometrie je plocha parabolického hyperboloidu (svým tvarem připomínající sedlo), viz Obr. 121. Nejkratší spojnicí dvou bodů na ploše je tzv. *geodetická čára* (viz též “Geodesics on an ellipsoid”), která se u ploch různých od roviny liší od úsečky. V důsledku toho má trojúhelník tvořený třemi body na parabolickém hyperboloidu součet vnitřních úhlů menší než 180°. Naproti tomu u trojúhelníku na kulové ploše (představte si např. rovnoramenný trojúhelník se základnou na rovníku a s hlavním vrcholem v severním pólu) je součet úhlů větší než 180°. Kulová plocha je tak modelem další neeukleidovské



Obrázek 121: Hyperbolický paraboloid

geometrie, tzv. *Riemannovy (eliptické) geometrie.*

23.3 Riemannova geometrie

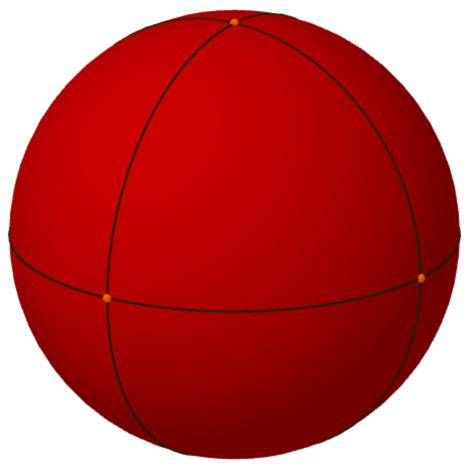
Též *eliptická geometrie.*

Bernhard Riemann (1826–1866) formuloval v roce 1854 teorii *obecné metrické geometrie*, která zahrnovala kromě *eukleidovské geometrie* a nedávno objevené *hyperbolické (Bolyai–Lobačevského) geometrie* ještě novou *eliptickou geometrii*, později též nazývanou *Riemannova geometrie.*

Typickou vlastností této geometrie je skutečnost, že součet vnitřních úhlů v trojúhelníku je větší než π :

$$\alpha + \beta + \gamma > \pi$$

Modelem Riemannovy geometrie je pak povrch koule (sféry).



Obrázek 122: Povrch koule jako model Riemannovy eliptické geometrie