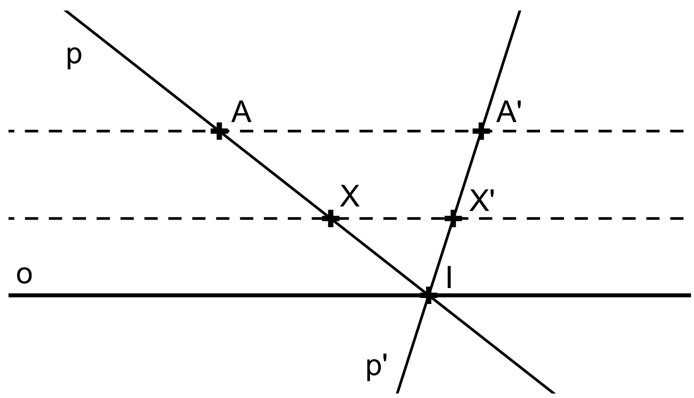
12 Osová afinita

Určení osové afinity. Charakteristika a rovnice osové afinity. Elace. Základní afinity. Involuce.

12.1 Základní afinity

„Základními afinitami“ nazýváme afinity, jejichž všechny samodružné body tvoří nadrovinu prostoru A_n. Příklady základních afinit jsou „osová afinita v A_2“, „osová souměrnost v E_2“ nebo „rovinová souměrnost v E_3“.

Základní afinita taková, že přímka spojující vzor a obraz je rovnoběžná s nadrovinou samodružných bodů, se nazývá „elace“.



Obrázek 30: Osová afinita v rovině, jejíž směr je rovnoběžný s její osou, jako příklad elace

12.2 Osová afinita v rovině

Osová afinita je určena osou o, směrem s a charakteristikou κ. Směr a charakteristika jsou většinou zadány dvojicí sobě odpovídajících bodů A, A'.

PŘÍKLAD 12.1. *V osové afinitě určené osou o a dvojicí sobě odpovídajících bodů A, A' zobrazte bod X a přímku p.*

Řešení: Viz Obr. 31. Při určení obrazu bodu a přímky využijeme

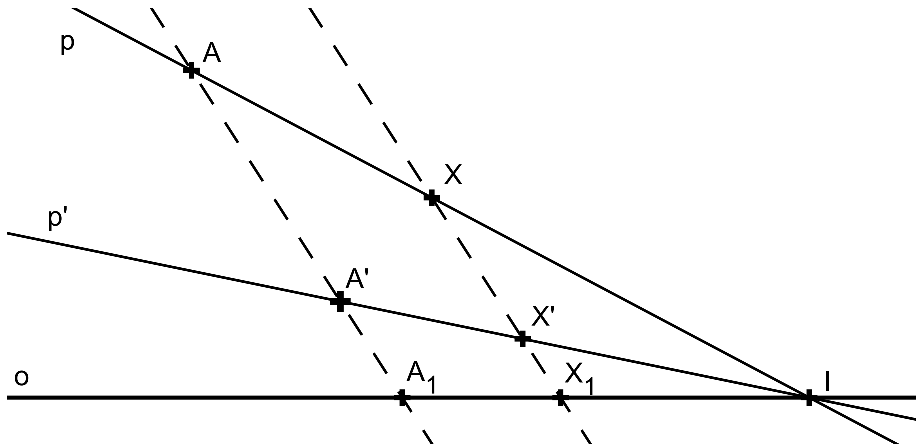
Vlastnosti osové afinity

(1) Přímka spojující sobě odpovídající body je rovnoběžná se směrem afinity.

(2) Sobě odpovídající přímky se protínají na ose afinity.

(3) Incidence se zachovává.

(4) Osa afinity a přímky rovnoběžné se směrem afinity jsou samodružnými přímkami.



Obrázek 31: Osová afinita v rovině,řešení příkladu 12.1

Postupujeme tak, že sestrojíme přímku $p = \overleftrightarrow{AX}$ a určíme její průsečík I s osou afinity o. Z vlastnosti (2) vyplývá, že přímka p', která je obrazem přímky p, také prochází bodem I. Z vlastnosti (3) pak plyne, že p' prochází rovněž bodem A'. Sestrojíme tedy přímku $p' = \overleftrightarrow{A'I}$. Obraz bodu X, bod X', pak určíme podle vlastnosti (1) jako průsečík p' s přímkou jdoucí bodem X rovnoběžně s $\overleftrightarrow{AA'}$.

Charakteristika osové afinity

Charakteristikou osové afinity κ rozumíme dělicí poměr

$$(A'AA_1) = \kappa,$$

kde body A, A' jsou ve vztahu „vzor a obraz“ a bod A_1 je průsečík přímky AA' s osou afinity o, viz Obr. 31. Charakteristika osové afinity je rovna jejímu modulu, proto se κ nazývá také modul osové afinity.

Poznámka. „Osová souměrnost v rovině“ je zvláštním případem osové afinity, jejíž směr $\vec{s}$ je kolmý na osu o ($\vec{s} \perp o$) a jejíž charakteristika κ je rovna -1 ($\kappa = -1$).

PŘÍKLAD 12.2. *Je dána přímka o, trojúhelník ABC a dvojice bodů X, X'. Sestrojte obraz trojúhelníka ABC v osové afinitě s osou o, v níž je obrazem bodu X bod X'.*

Věta 45. *Rovnoběžné přímky $a \| b$ se v osové afinitě zobrazí opět na rovnoběžné přímky $a' \| b'$.*

Důkaz. Důkaz provedeme sporem. Předpokládáme, že obrazy rovnoběžných přímek jsou různoběžky. Dostaneme se do sporu s definicí charakteristiky afinity. □

Věta 46. *Dělící poměr se v osové afinitě zachovává, tj.* $(ABC) = (A'B'C')$.

Důsledky věty 46:

1) Střed úsečky se zobrazí zase na střed úsečky.
2) Zachovává se uspořádání bodů na přímce.

PŘÍKLAD 12.3. *Je dána přímka o a trojúhelník ABC. Sestrojte obraz $A'B'C'$ trojúhelníka ABC v takové osové afinitě s osou o, aby byl trojúhelník $A'B'C'$ rovnostranný.*
(Postup konstrukce viz `http://tube.geogebra.org/student/mni2IYH1c`*)*

Věta 47. *Nechť P je obsah trojúhelníka ABC a P' obsah jeho obrazu $A'B'C'$ v osové afinitě s charakteristikou κ. Potom $P' = |\kappa| \cdot P$.*

Z výše uvedených vět 45, 46, 47 plyne, že osová afinita má následující invarianty.

Invarianty osové afinity

(1) Rovnoběžnost přímek.

(2) Dělící poměr.

(3) Poměr obsahu obrazců.

Charakteristika základní afinity

Charakteristiku přiřazujeme každé základní afinitě, která není elací. Platí

$$\kappa = (X'XX_1),$$

kde X_1 je průsečík $\overleftrightarrow{XX'}$ s nadrovinou samodružných bodů uvažované základní afinity.

Základní afinita jako involuce

„Involutorní zobrazení“, též „involuce“, je každé zobrazení afinního bodového prostoru na sebe, které není identitou, ale složeno samo se sebou je identitě rovno.

Základní afinita je involucí tehdy, když není elací a její charakteristika je rovna -1.

12.3 Cvičení – Osová afinita

1. Pomocí výsledku Příkladu 12.3 dokažte tvrzení: *Těžnice trojúhelníka se protínají v jednom bodě, který je dělí v poměru* 1 : 2.

2. Dokažte Větu 47.