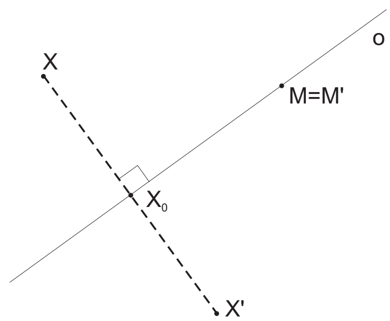
3.1 Osová souměrnost

Definice 10. *Nechť je dána přímka o, kterou nazýváme* **osa souměrnosti.** *Potom pro obraz M' libovolného bodu M této přímky o platí $M' \equiv M$. Ke každému bodu X, který neleží na přímce o, sestrojíme obraz X' následujícím způsobem: Bodem X vedeme kolmici k na přímku o a její patu označíme X_0. Na polopřímce opačné k polopřímce X_0X sestrojíme bod X' tak, že $|X'X_0| = |XX_0|$. Takto definované zobrazení nazýváme* **osová souměrnost s osou** *o a značíme ho $\mathcal{O}(o)$.*



Obrázek 3: Definice osové souměrnosti

Poznámky:
1. O bodech X, X' říkáme, že je to dvojice bodů souměrně sdružených podle osy o.
2. Osová souměrnost je příkladem involutorního zobrazení (involuce).

PŘÍKLAD 3.3. *Je dána přímka p a body A, B v téže polorovině s hraniční přímkou p. Najděte všechny body $X \in p$ takové, že součet vzdáleností $|AX| + |BX|$ je minimální.*

Věta 4. *Osová souměrnost je shodné zobrazení.*

Později, při klasifikaci shodností, využijeme jejich definice pomocí samodružných bodů a směrů.

Věta 5 (Alternativní definice osové souměrnosti)**.** *Shodné zobrazení, jehož všechny samodružné body vyplní přímku o, je souměrnost podle osy o.*

Věta 6. *Jestliže existují na přímce dva různé samodružné body, pak každý bod této přímky je samodružný.*

Věta 7. *Má-li shodnost aspoň tři nekolineární samodružné body, je to identita.*

Věta 8. *Má-li shodnost dva různé samodružné body a není identitou, pak je osovou souměrností.*

Věta 9. *Samodružné přímky osové souměrnosti jsou přímky kolmé na osu souměrnosti.*

Analytické vyjádření osové souměrnosti $\mathbf{O}(o)$ v rovině

PŘÍKLAD 3.4. *Napište analytické vyjádření osové souměrnosti s osou v souřadnicové ose x (y).*

Osová souměrnost podle osy o v obecné poloze

Obecná rovnice osy $o : ax + by + c = 0$

Osová souměrnost $\mathbf{O}(o)$:

$$x' = x - \frac{2a}{a^2 + b^2}(ax + by + c)$$
$$y' = y - \frac{2b}{a^2 + b^2}(ax + by + c)$$

PŘÍKLAD 3.5. *V eukleidovské rovině je dána souměrnost podle přímky $p : 3x - 4y + 1 = 0$. Napište rovnice této souměrnosti.*

3.1.1 Osová souměrnost - Úlohy

1. Napište rovnice souměrnosti podle přímky $o : 2x - 3y + 1 = 0$.

2. Sestrojte trojúhelník ABC, je-li dán obvod $o = 12cm$ a úhly $\alpha = 60°$, $\beta = 45°$.

3. Dokažte Vivianiho větu: „V rovnostranném trojúhelníku je hodnota součtu vzdáleností libovolného bodu od stran trojúhelníku konstantní, nezávislá na poloze bodu.“

4. Jsou dány dvě různoběžky p, q a bod A mimo ně. Najděte body $B \in p$, $C \in q$ tak, aby obvod trojúhelníku ABC byl minimální.

5. Řešte Fagnanův problém: „Danému ostroúhlému trojúhelníku vepište trojúhelník o nejmenším obvodu.“

6. Sestrojte konvexní čtyřúhelník $ABCD$ se stranami dané velikosti, je-li $\mapsto AC$ osou vnitřního úhlu při vrcholu A.

7. Sestrojte čtverec $ABCD$, je-li dáno $a + e = 10cm$.

8. Sestrojte obdélník $ABCD$, je-li dáno $e = 7cm$, $a - b = 1cm$.

9. Sestrojte lichoběžník $ABCD$ ($AB \| CD$), je-li dáno $b = 3cm$, $c = 2.5cm$, $d = 2.6cm$, $\alpha - \beta = 20°$.

10. Mascheroniova konstrukce. Je dána kružnice $k(S; r)$; dále je dána dvěma body A, B (body neleží na kružnici) její sečna p, která neprochází středem S. Sestrojte průsečíky přímky p s kružnicí k, aniž přitom použijete pravítka.

11. Dokažte, že body souměrně sdružené s průsečíkem výšek podle stran trojúhelníka, leží na kružnici trojúhelníku opsané.

3.1.2 Osová souměrnost - Úlohy na domácí přípravu

12. Dokažte větu: „V každém trojúhelníku dělí osa libovolného vnitřního úhlu protější stranu v poměru stran přilehlých.“

13. Napište rovnice osové souměrnosti, zobrazující počátek na bod $[1, 5]$.

14. Je dána přímka p a dvě kružnice k_1, k_2 oddělené přímkou p. Sestrojte rovnostranný trojúhelník tak, aby na každé z kružnic k_1, k_2 byl jeden vrchol a jedna z výšek ležela na přímce p.

15. Jsou dány tři různé přímky p_1, p_2, p_3, procházející bodem S; na přímce p_1 je dán bod $A \neq S$. Sestrojte trojúhelník ABC, jehož osy vnitřních úhlů leží v přímkách p_1, p_2, p_3.

16. Jsou dány tři přímky o_1, o_2, o_3 procházející bodem O. Na o_1 dán bod A_1. Sestrojte $\triangle ABC$ tak, aby o_1, o_2, o_3 byly osami jeho stran a bod A_1 středem strany BC.

17. Jsou dány body X, Y a přímka p, která je odděluje. Sestrojte rovnoramenný trojúhelník ABC, jehož hlavním vrcholem je bod C, osou souměrnosti přímka p a jehož ramena mají danou velikost a. Přímka AC nechť prochází bodem X a přímka BC bodem Y.

18. Je dána přímka p a body A, B, ležící ve stejné polorovině s hraniční přímkou p. Sestrojte bod $X \in p$ tak, aby $|\angle AXp| = 2|\angle BXp|$.

19. Jsou dány body A, B, C a přímka p kolmá k přímce AB tak, že prochází bodem C a body A, B leží v téže polorovině určené přímkou p. Sestrojte na přímce p takový bod X, aby z něho byla vidět úsečka AB pod stejným úhlem jako úsečka BC.

20. Obrazy středu S kružnice opsané trojúhelníku ABC v osových souměrnostech podle přímek BC, AC, AB jsou vrcholy trojúhelníku $A_1B_1C_1$. Dokažte, že je tento trojúhelník shodný s trojúhelníkem ABC.