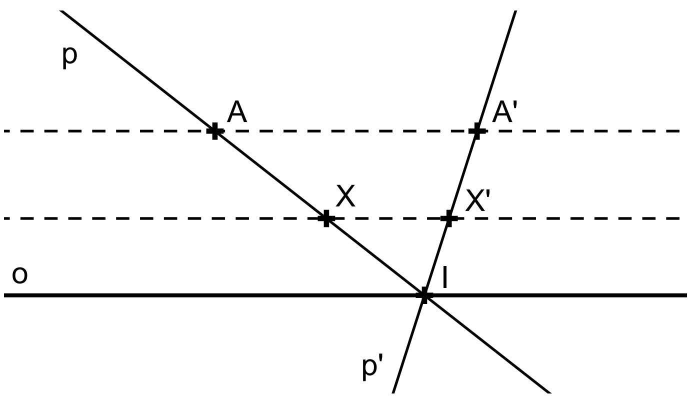
6 Osová afinita

Určení osové afinity. Charakteristika a rovnice osové afinity. Elace. Základní afinity. Involuce.

6.1 Základní afinity

„Základními afinitami“ nazýváme afinity, jejichž všechny samodružné body tvoří nadrovinu prostoru A_n. Příklady základních afinit jsou „osová afinita v A_2“, „osová souměrnost v E_2“ nebo „rovinová souměrnost v E_3“.

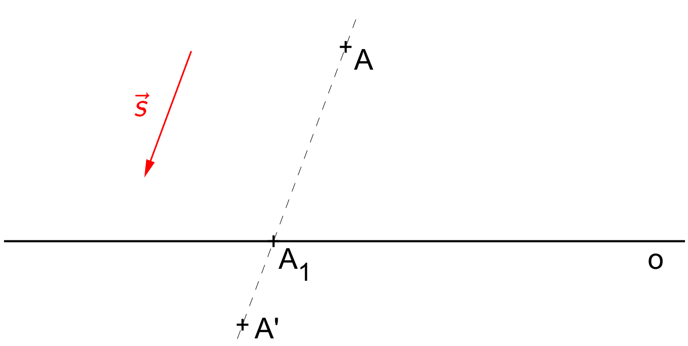
Základní afinita taková, že přímka spojující vzor a obraz je rovnoběžná s nadrovinou samodružných bodů, se nazývá „elace“.



Obrázek 25: Osová afinita v rovině, jejíž směr je rovnoběžný s její osou, jako příklad elace

6.2 Osová afinita v rovině

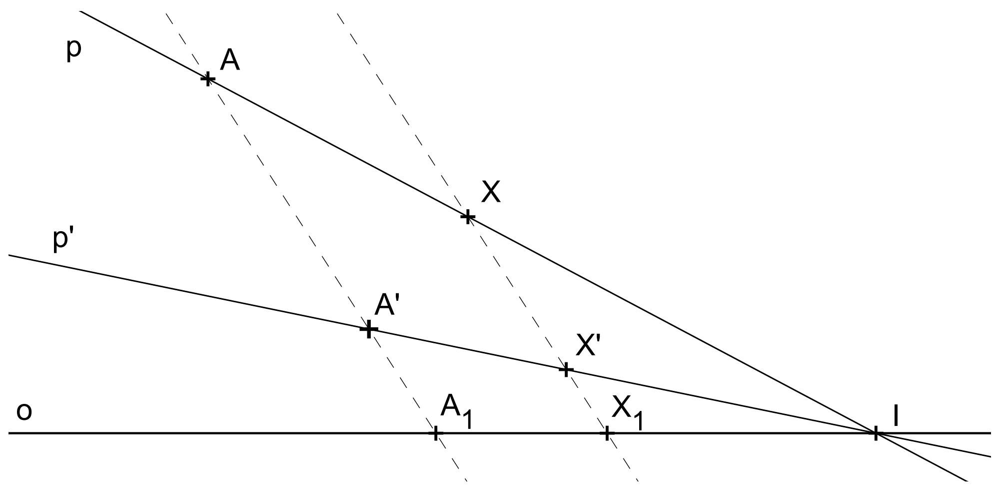
Osová afinita je určena osou o, směrem $\vec{s}$ a charakteristikou κ. Směr a charakteristika jsou většinou zadány dvojicí sobě odpovídajících bodů A, A', viz Obr. 26.



Obrázek 26: Určení osové afinity; $AA' \| \vec{s}$, $\kappa = (A'AA_1)$

PŘÍKLAD 6.1. *V osové afinitě určené osou o a dvojicí sobě odpovídajících bodů A, A' zobrazte bod X a přímku p.*

Řešení: Viz Obr. 27.



Obrázek 27: Osová afinita v rovině, řešení příkladu 6.1

Při určení obrazu bodu a přímky využijeme následující **vlastnosti osové afinity**:

(1) Přímka spojující sobě odpovídající body je rovnoběžná se směrem afinity.

(2) Sobě odpovídající přímky se protínají na ose afinity.

(3) Incidence se zachovává, tj. leží-li bod A na přímce p ($A \in p$), leží jeho obraz A' na obrazu p' přímky p ($A' \in p'$).

(4) Osa afinity a přímky rovnoběžné se směrem afinity jsou samodružnými přímkami.

Postupujeme tak, že sestrojíme přímku $p = \overleftrightarrow{AX}$ a určíme její průsečík I s osou afinity o. Z vlastnosti (2) vyplývá, že přímka p', která je obrazem přímky p, také prochází bodem I. Z vlastnosti (3) pak plyne, že p' prochází rovněž bodem A'. Sestrojíme tedy přímku $p' = \overleftrightarrow{A'I}$. Obraz bodu X, bod X', pak určíme podle vlastnosti (1) jako průsečík p' s přímkou jdoucí bodem X rovnoběžně s $\overleftrightarrow{AA'}$.

Charakteristika osové afinity

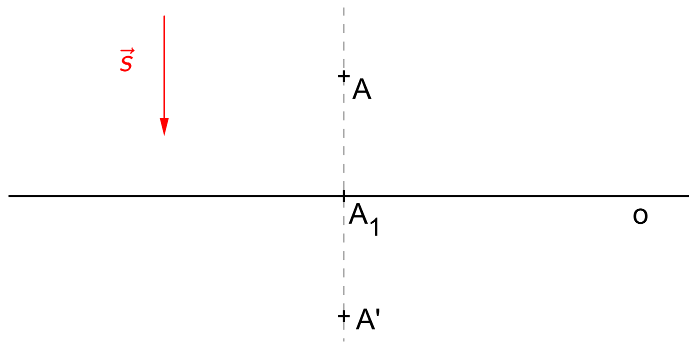
Charakteristikou osové afinity[10] κ rozumíme dělicí poměr

$$(A'AA_1) = \kappa,$$

[10]Charakteristiku přiřazujeme každé základní afinitě, která není elací. Platí $\kappa = (X'XX_1)$, kde X_1 je průsečík $\overleftrightarrow{XX'}$ s nadrovinou samodružných bodů uvažované základní afinity.

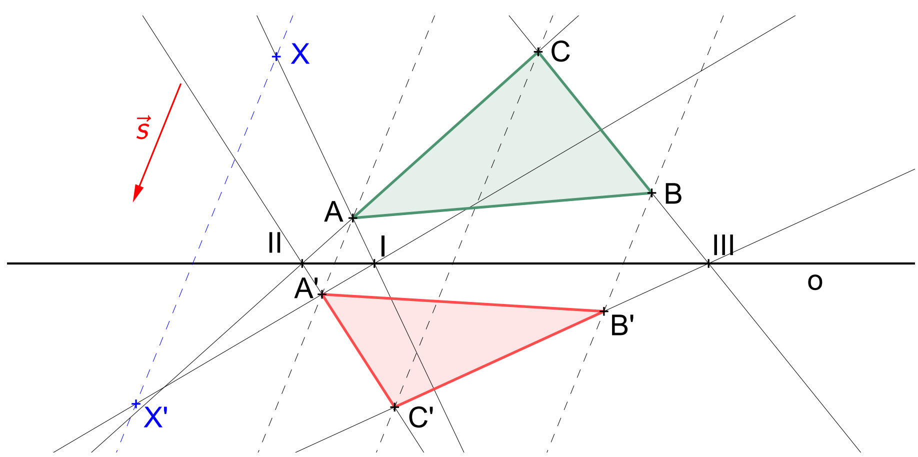
kde body A, A' jsou ve vztahu „vzor a obraz“ a bod A_1 je průsečík přímky AA' s osou afinity o, viz Obr. 27. Jak vyplývá mimo jiné z věty 9, charakteristika osové afinity je rovna jejímu modulu, proto se κ nazývá také *modul osové afinity*.

Poznámka. *Osová souměrnost v rovině* je zvláštním případem osové afinity, jejíž směr $\vec{s}$ je kolmý na osu o ($\vec{s} \perp o$) a jejíž charakteristika κ je rovna -1 ($\kappa = -1$), viz Obr. 28.



Obrázek 28: Osová souměrnost jako osová afinita

PŘÍKLAD 6.2. *Je dána přímka o, trojúhelník ABC a dvojice bodů X, X'. Sestrojte obraz $A'B'C'$ trojúhelníka ABC v osové afinitě s osou o, v níž je obrazem bodu X bod X'.*



Obrázek 29: Obraz trojúhelníku ABC v osové afinitě dle zadání příkladu 6.2

Věta 7. *Rovnoběžné přímky $a \| b$ se v osové afinitě zobrazí opět na rovnoběžné přímky $a' \| b'$.*

Důkaz. Důkaz provedeme sporem. Předpokládáme, že obrazy rovnoběžných přímek jsou různoběžky. Dostaneme se do sporu s definicí charakteristiky afinity. $\square$

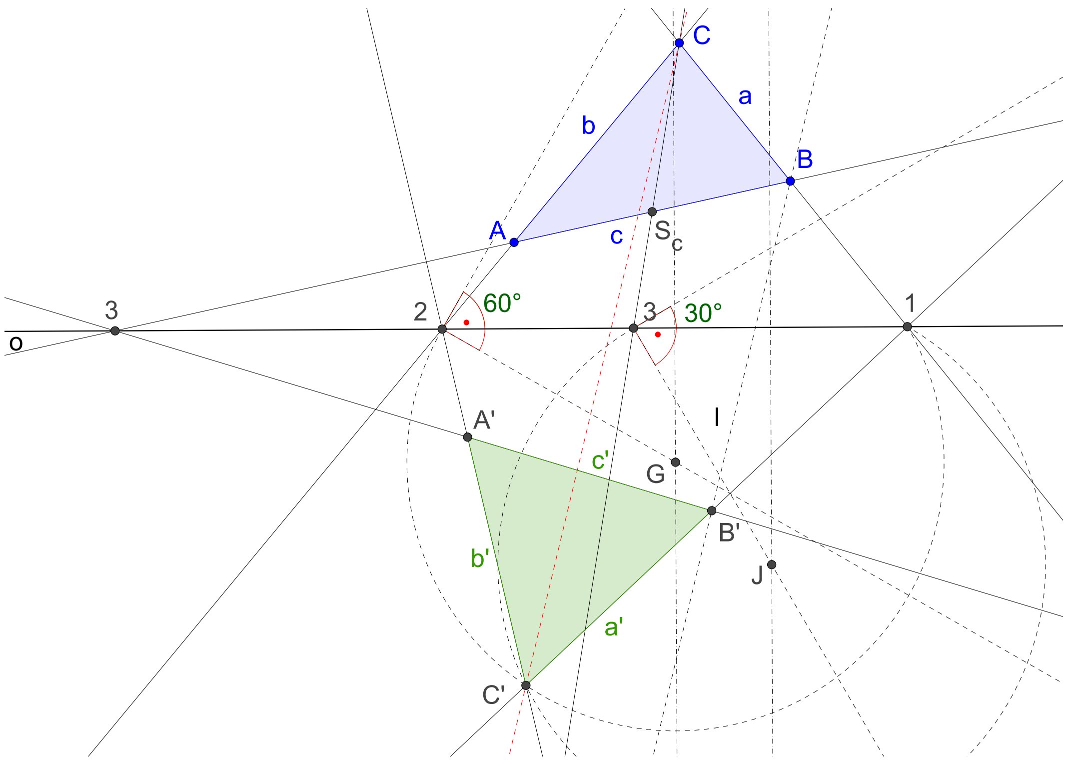
Věta 8. *Dělící poměr se v osové afinitě zachovává, tj.* $(ABC) = (A'B'C')$.

Důsledky věty 8:

1) Střed úsečky se zobrazí zase na střed úsečky.

2) Zachovává se uspořádání bodů na přímce.

PŘÍKLAD 6.3. *Je dána přímka o a trojúhelník ABC. Sestrojte obraz $A'B'C'$ trojúhelníka ABC v takové osové afinitě s osou o, aby byl trojúhelník $A'B'C'$ rovnostranný.*
(Postup konstrukce viz **`http://tube.geogebra.org/student/mni2IYH1c`***)*



Obrázek 30: Rovnostranný trojúhelník $A'B'C'$ jako obraz trojúhelníku ABC v osové afinitě

Rovnice osové afinity s osou v souřadnicové ose x

Odvodíme si rovnice osové afinity $f : X[x, y] \to X'[x', y']$, která je dána osou $o : y = 0$ a dvojicí bodů $A[a, b]$ a $A'[a', b']$. Pro průsečík $A_1[a_1, b_1]$ přímky $\overrightarrow{AA'}$ s osou o (tj. s osou x) potom platí $(A'AA_1) = \kappa$, viz Obr. 31. Využijeme následující dvě skutečnosti: (1) $X'XX_1 = \kappa$, (2) $X_1 \in o$.

ad (1) $X'XX_1 = \kappa$

Platí $X' = (1-\kappa)X_1 + \kappa X$. Po dosazení souřadnic bodů $X[x,y]$, $X'[x',y']$, $X_1[x_1,y_1]$ dostaneme rovnice

$$\begin{aligned} x' &= (1-\kappa)x_1 + \kappa x, \\ y' &= (1-\kappa)y_1 + \kappa y. \end{aligned} \tag{66}$$

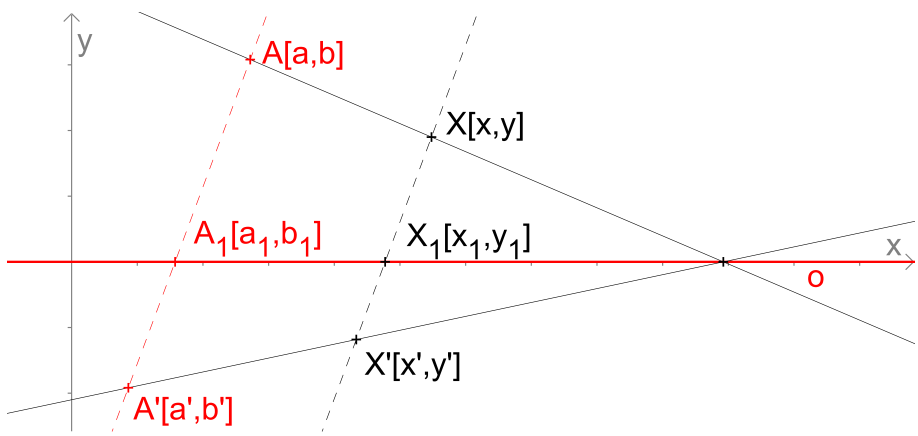
ad (2) $X_1 \in o$

Platí $X_1 = X + k(A' - A); k \in R$. Po dosazení souřadnic $X[x,y]$, $X_1[x_1,0]$, $A[a,b]$, $A'[a',b']$ dostaneme rovnice

$$\begin{aligned} x_1 &= x + k(a' - a), \\ y_1 &= y + k(b' - b). \end{aligned}$$

Protože $y_1 = 0$ dostáváme $k = -\frac{y}{b'-b}$ a následně $x_1 = x - y\frac{a'-a}{b'-b}$. Po dosazení za x_1 a y_1 do rovnic 67 dostaneme rovnice uvažované osové afinity:

$$\begin{aligned} x' &= x - (1-\kappa)\frac{a'-a}{b'-b}y, \\ y' &= \kappa y. \end{aligned} \tag{67}$$



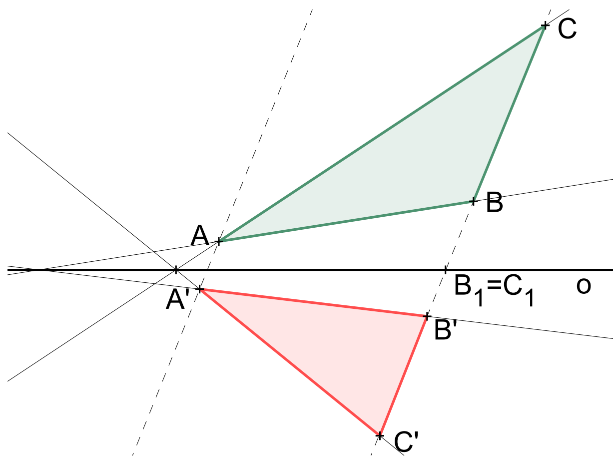
Obrázek 31: Osová afinita s osou $o : y = 0$

Z rovnic (67) je zřejmé, že matice uvažované osové afinity je $A = \begin{bmatrix} 1 & (\kappa - 1)\frac{a'-a}{b'-b} \\ 0 & \kappa \end{bmatrix}$ a modul této afinity je potom $\det A = \kappa$[11].

[11]Tato rovnost charakteristiky osové afinity a jejího modulu je na příkladu zobrazení trojúhelníku znázorněna v GeoGebra apletu `https://www.geogebra.org/m/NfpQdnsH`

Věta 9. *Nechť P je obsah trojúhelníka ABC a P' obsah jeho obrazu $A'B'C'$ v osové afinitě s charakteristikou κ. Potom $P' = |\kappa| \cdot P$.*

Důkaz. Dokažte nejprve pro speciální případ, kdy je jedna strana trojúhelníku rovnoběžná se směrem afinity, viz Obr. 32. Potom využijte k důkazu vztahu pro libovolný trojúhelník. ☐



Obrázek 32: Vypočítejte poměr obsahů trojúhelníků $A'B'C'$ a ABC

Z výše uvedených vět 7, 8, 9 plyne, že osová afinita má následující invarianty.

Invarianty osové afinity

(1) Rovnoběžnost přímek.

(2) Dělící poměr.

(3) Poměr obsahu obrazců.

Základní afinita jako involuce

„Involutorní zobrazení", též „involuce", je každé zobrazení afinního bodového prostoru na sebe, které není identitou, ale složeno samo se sebou je identitě rovno.

Základní afinita je involucí tehdy, když není elací a její charakteristika je rovna -1.

6.3 Cvičení – Osová afinita

1. Pomocí výsledku Příkladu 6.3 dokažte tvrzení: *Těžnice trojúhelníka se protínají v jednom bodě, který je dělí v poměru* $1 : 2$.

2. Dokažte Větu 9.