4 Podobná zobrazení

4.1 Podobné zobrazení

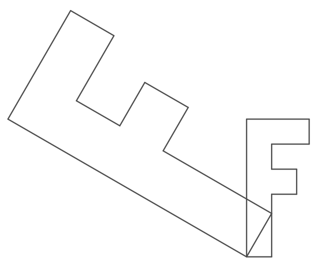
Definice 16. *Zobrazení f euklidovského prostoru E do euklidovského prostoru E' se nazývá* **podobné zobrazení**, *jestliže existuje kladné reálné číslo k tak, že pro každé dva body X, Y prostoru E platí:*

$$|f(X)f(Y)| = k|XY|. \tag{8}$$

Číslo k se nazývá koeficient podobného zobrazení f.

Poznámka. Podobnosti s koeficientem $k \neq 1$ nazýváme **vlastní podobnosti**.

PŘÍKLAD 4.1. *Napište rovnice pro zobrazení v rovině, které každý útvar otočí kolem počátku o úhel α a dvakrát zvětší, viz Obr. 18.*



Obrázek 18: Podobné zobrazení v rovině

Věta 24. *Každé podobné zobrazení euklidovského prostoru E do euklidovského prostoru E' lze složit ze* **stejnolehlosti prostoru** *E a* **shodného zobrazení** *E* **do** *E'.*

Věta 25. *Každé podobné zobrazení je afinní.*

Protože podobná zobrazení jsou afinními zobrazeními, platí pro ně také věta o určenosti. Samozřejmě v podobě, která koresponduje s definicí podobného zobrazení.

Věta 26 (O určenosti podobného zobrazení). *Nechť jsou $P_0, P_1, ..., P_n$ lineárně nezávislé body n-rozměrného euklidovského prostoru E_n a $P'_0, P'_1, ..., P'_n$ body euklidovského prostoru E'. Afinní zobrazení prostoru E_n do prostoru E', které zobrazuje bod P_i na bod P'_i pro $i = 0, 1, ..., n$ je právě tehdy podobné, existuje-li číslo $k > 0$ tak, že pro všechny dvojice $i, j = 0, 1, ..., n$ platí $|P'_iP'_j| = k|P_iP_j|$.*

Poznámka. Body prohlásíme ze *lineárně nezávislé* tehdy, když jimi určené vektory jsou lineárně nezávislé.

PŘÍKLAD 4.2. *Formulujte „větu o určenosti podobného zobrazení" pro rovinu, tj. eukleidovský prostor E_2.*

PŘÍKLAD 4.3. *V euklidovské rovině je dán čtverec $ABCD$ se středem S. Existuje právě jedno podobné zobrazení roviny čtverce do sebe, při kterém se body A, B, S zobrazí po řadě na body D, B, C. Rozložte toto podobné zobrazení na stejnolehlost a shodné zobrazení.*

PŘÍKLAD 4.4. *Ukažte, že každé dvě paraboly jsou podobné, tzn. že existuje podobné zobrazení roviny jedné paraboly na rovinu druhé paraboly, při kterém se jedna parabola zobrazí na druhou.*

Věta 27. *Každá „vlastní podobnost" má právě jeden samodružný bod.*

Důkaz. Nejprve dokážeme, že vlastní podobnost (tj. podobnost s koeficientem $k \in R^+ - \{1\}$) nemůže mít více než jeden samodružný bod, potom dokážeme, že musí mít aspoň jeden. Tak nám vyjde, že musí mít právě jeden.

(i) Skutečnost, že vlastní podobnost nemůže mít více než jeden samodružný bod dokážeme sporem. Nechť má vlastní podobnost f nejméně dva samodružné body K a L; $K \xrightarrow{f} K' = K, L \xrightarrow{f} L' = L$. Potom $|K'L'| = |KL|$, což je ve sporu s definicí vlastní podobnosti (8), kde $k \neq 1$. Vlastní podobnost tedy nemůže mít více než jeden samodružný bod.

(ii) Nyní dokážeme, že vlastní podobnost musí mít aspoň jeden samodružný bod. Uvažujme podobnost f s rovnicí $X' = A \cdot X + B$, kde $A^T \cdot A = k^2 I$. Její samodružné body jsou potom řešením soustavy lineárních rovnic odpovídající maticové rovnici $(I - A) \cdot X = -B$. Klíčová pro náš důkaz je skutečnost, že determinant matice této soustavy je pro vlastní podobnost různý od nuly, $|I - A| \neq 0$. Pokud by byl roven nule, tj. pokud by platila rovnost $|I - A| = 0$, znamenalo by to, že řešením charakteristické rovnice $|\lambda I - A| = 0$ (viz str. **??**) homomorfismu φ asociovaného s f je vlastní číslo $\lambda = 1$. Kdyby tomu tak bylo, existoval by (vlastní) vektor $\vec{u} = Q - P$, pro jehož obraz $\varphi(\vec{u}) = f(Q) - f(P)$ platí $\varphi(\vec{u}) = \vec{u}$. Protože se zobrazí sám na sebe, nemění se jeho velikost, tj. $|f(P)f(Q)| = |PQ|$, což je ve sporu s definicí vlastní podobnosti (8), kde $k \neq 1$. Determinant $|I - A|$ tedy nemůže být roven nule, soustava $(I - A) \cdot X = -B$ je proto regulární a má právě jedno řešení. $\square$