

1 Připomenutí vybraných pojmů

1.1 Grupa

Definice 1 ((Komutativní) grupa). *Grupou $(M, *)$ rozumíme množinu M spolu s operací $*$ na M , která má tyto vlastnosti:*

- i) $\forall x, y \in M; x * y \in M$,
Operace $$ je neomezeně definovaná na M .
 (Množina M je uzavřená vzhledem k operaci $*$.)*
- ii) $\forall x, y, z \in M; x * (y * z) = (x * y) * z$,
Operace (struktura) je asociativní.
- iii) $\exists e \in M, \forall x \in M; x * e = e * x = x$,
Existuje neutrální prvek vzhledem k $$.
 (Jedná se o strukturu s neutrálním prvkem.)*
- iv) $\forall x \in M, \exists y \in M; x * y = y * x = e$.
Ke každému prvku existuje prvek inverzní vzhledem k $$.
 (Jedná se o strukturu s inverzními prvky.)*

*Je-li struktura $(M, *)$ navíc komutativní, nazývá se komutativní grupa nebo též Abelova grupa.*

Příklady grup

1. $(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{Q}, +)$, $(\mathbb{R}, +)$, $(\mathbb{C}, +)$,
2. $(\mathbb{Q} - \{0\}, \cdot)$, $(\mathbb{R} - \{0\}, \cdot)$, $(\mathbb{C} - \{0\}, \cdot)$,
3. Množina povelů {stát, vlevo vbok, vpravo vbok, čelem vzad} spolu s operací skládání.

o	pozor	vlevo v bok	vpravo v bok	čelem vzad
pozor	pozor	vlevo v bok	vpravo v bok	čelem vzad
vlevo v bok	vlevo v bok	čelem vzad	pozor	vpravo v bok
vpravo v bok	vpravo v bok	pozor	čelem vzad	vlevo v bok
čelem vzad	čelem vzad	vpravo v bok	vlevo v bok	pozor

4. Uvažujme rovnostranný trojúhelník ABC v rovině ρ . Grupou je potom množina všech transformací roviny, v nichž se trojúhelník zobrazí sám na sebe, spolu s operací skládání transformací (hovoříme o tzv. dihedralní grupě, viz též grupy symetrií).

1.2 Těleso

Tělesem jako algebraickou strukturou rozumíme strukturu jejíž vlastnosti jsou zobecněním vlastností množiny reálných čísel spolu s operacemi sčítání a násobení, tj. struktury $(R, +, \cdot)$.

Definice 2. *Struktura $(T, +, \cdot)$ se nazývá těleso, právě když je $(+, \cdot)$ -distributivní, když struktura $(T, +)$ je komutativní grupa (tzv. aditivní grupa tělesa) a když struktura $(T - \{0\}, \cdot)$, kde 0 je nulový prvek grupy $(T, +)$, je grupa (tzv. multiplikativní grupa tělesa T). Je-li navíc grupa $(T - \{0\}, \cdot)$ komutativní, nazývá se T komutativní těleso.*

Příklady těles

1. $(Q, +, \cdot)$,
2. $(R, +, \cdot)$,
3. $(C, +, \cdot)$.

1.3 Vektorový prostor

Definice 3 (Vektorový prostor). *Nechť T je komutativní těleso. Množinu V nazveme vektorovým prostorem nad tělesem T , právě když jsou na V definovány dvě operace: (i) sčítání: libovolné dvojici $\vec{u} \in V, \vec{v} \in V$ je jednoznačně přiřazen prvek $\vec{u} + \vec{v} \in V$, (ii) násobení prvkem z tělesa T (skalárem): výsledkem násobení vektoru $\vec{u} \in V$ skalárem $a \in T$ je vektor $a\vec{u} \in V$, které splňují následující vlastnosti:*

- a) *Struktura $(V, +)$ je komutativní grupa.*
- b) *Distributivnost: $(a + b)\vec{u} = a\vec{u} + b\vec{u}, \quad a(\vec{u} + \vec{v}) = a\vec{u} + a\vec{v}.$*
- c) *Existence jednotkového prvku skalárního násobení: $1 \cdot \vec{u} = \vec{u}.$*

Příklady vektorových prostorů

1. Množina R^2 všech uspořádaných dvojic reálných čísel s operacemi sčítání uspořádaných dvojic a násobení reálným číslem definovanými následujícím způsobem: $(a_1, a_2) + (b_1, b_2) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2), \quad k \cdot (a_1, a_2) = (ka_1, ka_2)$ (jedná se o tzv. **aritmetický vektorový prostor R^2** nad tělesem reálných čísel).
2. Množina geometrických vektorů v rovině (orientovaných úseček) spolu s operací skládání vektorů a násobení vektoru reálným číslem, jak jsou známy ze školské matematiky.

1.4 Afinní bodový prostor

Definice 4 (Afinní bodový prostor). Neprázdnou množinu A_n (její prvky jsou tzv. body) nazveme *afinním*¹ bodovým prostorem dimenze n , jestliže je dán vektorový prostor V_n dimenze n a zobrazení

$$g : A_n \times A_n \rightarrow V_n$$

těchto vlastností: 1. Pro každý bod $A \in A_n$ a pro každý vektor $\vec{x} \in V_n$ existuje jediný bod $B \in A_n$ tak, že

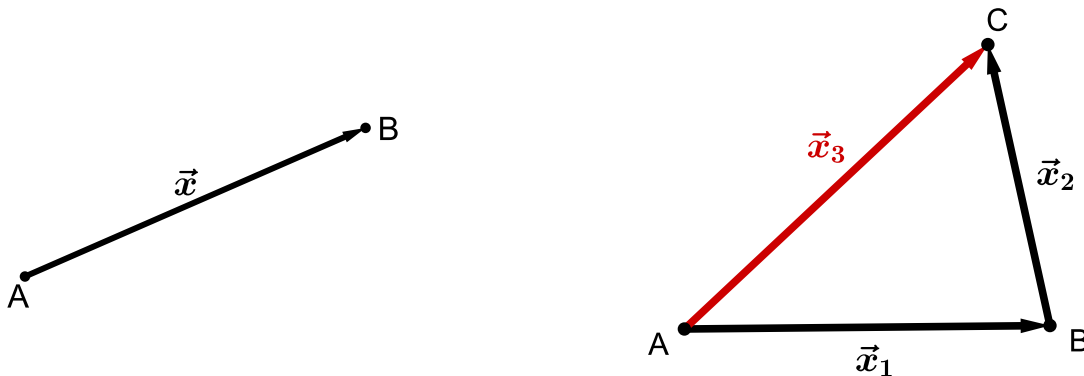
$$g(A, B) = \vec{x} \quad \text{t.j.} \quad B = A + \vec{x}.$$

2. Pro každé tři body $A, B, C \in A_n$ platí, že

$$g(A, C) = g(A, B) + g(B, C).$$

(Jedná se o tzv. Chaslesův vztah. Jeho platnost požadujeme v každém afinním bodovém prostoru².)

Vektorový prostor V_n nazýváme *vektorovým zaměřením* afinního prostoru A_n .



Příklady afinního bodového prostoru

1. Jednoprvková množina se zaměřením $V_0 = \{\vec{0}\}$ je afinní bodový prostor dimenze 0.
2. Eukleidovský bodový prostor E_n , jehož formy pro $n \leq 3$ nazýváme dle dimenze bod (značíme E_0), přímka (značíme E_1), rovina (E_2) a trojrozměrný prostor (E_3).
3. Samotný vektorový prostor V_n splňuje definici afinního bodového prostoru². Platí

$$g(\vec{u}, \vec{v}) = \vec{v} - \vec{u}.$$

¹Affinis znamená latinsky *příbuzný*. Poprvé tento pojem použil Leonhard Euler (1707-1783) pro označení vztahu vzoru a obrazu v zobrazení, které zachovává dělicí poměr. Takovým zobrazením se začalo říkat *afinní zobrazení*. *Afinní geometrii* rozumíme geometrii bez vzdáleností a odchylek.

²Další vlastnosti operací *odčítání bodů* a *sčítání bodu a vektoru* jsou uvedeny v [1] PECH, P. (2004) *Analytická geometrie lineárních útvarů*, České Budějovice, Jihočeská univerzita v Č. B., dostupné na adrese <http://www.pf.jcu.cz/stru/katedry/m/knihy/Analyticka.pdf>, str. 15.

²Naopak to samozřejmě neplatí, nelze říci, že afinní bodový prostor je zároveň vektorovým prostorem.

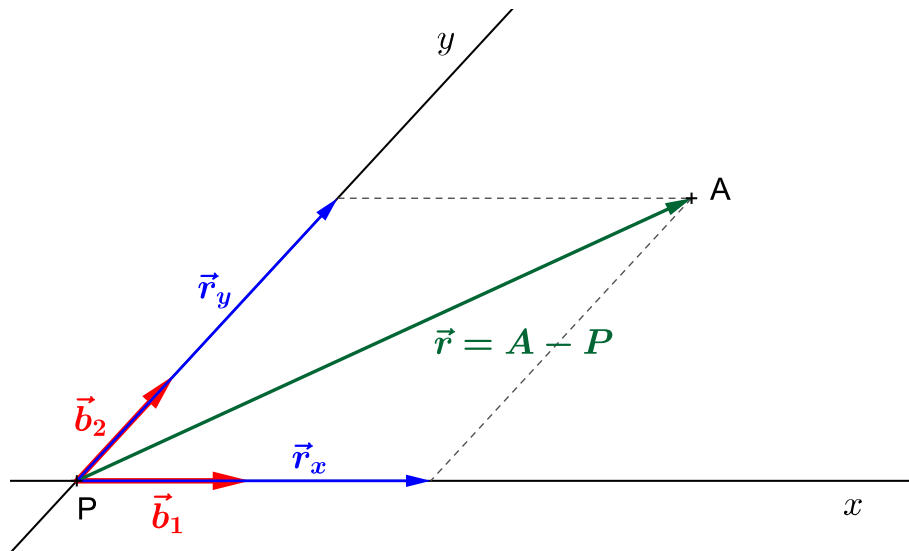
1.5 Afinity souřadnice bodů

Definice 5 (Afinity soustava souřadnic - repér). *Nechť P je libovolný bod z afinity prostoru A_n , $n > 0$. Nechť $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$ je báze vektorového zaměření V_n prostoru A_n . Potom uspořádanou $(n + 1)$ -tici*

$$\varphi = (P, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$$

nazýváme afinity soustavou souřadnic φ (též repérem φ) v prostoru A_n .

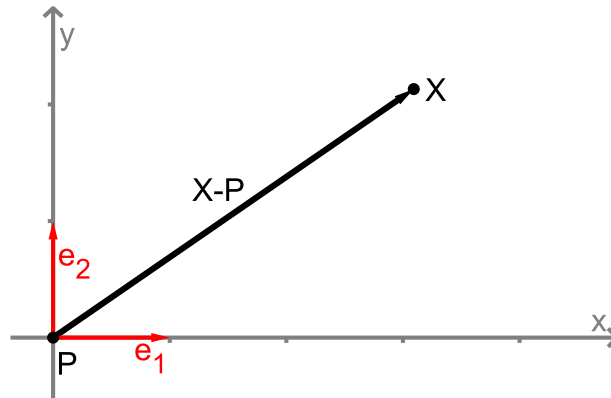
Souřadnicemi bodu $X \in A_n$ v soustavě souřadnic φ budeme rozumět souřadnice vektoru $X - P$ v bázi $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$.



Obrázek 1: Afinity soustava souřadnic v rovině

Jak je naznačeno na Obr. 1, dosud zavedené pojmy nám dovolují přiřadit souřadnice bodu prostřednictvím jeho průvodiče. Konkrétně se jedná o bod A s průvodičem \vec{r} . Můžeme psát $\vec{r} = \vec{r}_x + \vec{r}_y$. Jistě existují taková čísla $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$, pro která $\vec{r}_x = a_1 \cdot \vec{b}_1$ a $\vec{r}_y = a_2 \cdot \vec{b}_2$. Potom platí $\vec{r} = \vec{r}_x + \vec{r}_y = a_1 \cdot \vec{b}_1 + a_2 \cdot \vec{b}_2$. Vektor \vec{r} má tak vzhledem k dané bázi $\{\vec{b}_1, \vec{b}_2\}$ souřadnice a_1, a_2 . Bod $A = P + \vec{r}$ je potom při pevně daném bodě P a bázi $\{\vec{b}_1, \vec{b}_2\}$, tj. při daném repéru $\{P, \vec{b}_1, \vec{b}_2\}$, rovněž jednoznačně určen dvojicí čísel a_1, a_2 . Říkáme, že bod P má vzhledem k danému repéru souřadnice $[a_1, a_2]$, píšeme $P[a_1, a_2]$.

Definice 6 (Kartézská soustava souřadnic). *Kartézskou soustavou souřadnic rozumíme afinní soustavu souřadnic $(P; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$, kde $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$ je ortonormální báze.*



Obrázek 2: Kartézská soustava souřadnic v rovině

1.6 Eukleidovský bodový prostor

Definice 7 (Eukleidovský bodový prostor). *Eukleidovským bodovým prostorem E_n rozumíme afinní bodový prostor, na jehož zaměření je definován **skalární součin**.*

Definice 8 (Skalární součin). *Skalárním součinem rozumíme operaci, která každé dvojici vektorů $\vec{u}, \vec{v} \in V$ přiřazuje reálné číslo (skalár) $\vec{u} \cdot \vec{v} \in \mathbb{R}$ tak, že platí:*

1. $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$, (SYMETRIE)
2. $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$, (BILINEARITA, vlastnosti 2 a 3)
3. $(k\vec{u}) \cdot \vec{v} = k(\vec{u} \cdot \vec{v})$,
4. $\vec{u} \cdot \vec{u} \geq 0 \wedge [\vec{u} \cdot \vec{u} = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{o}]$. (POZITIVITA)

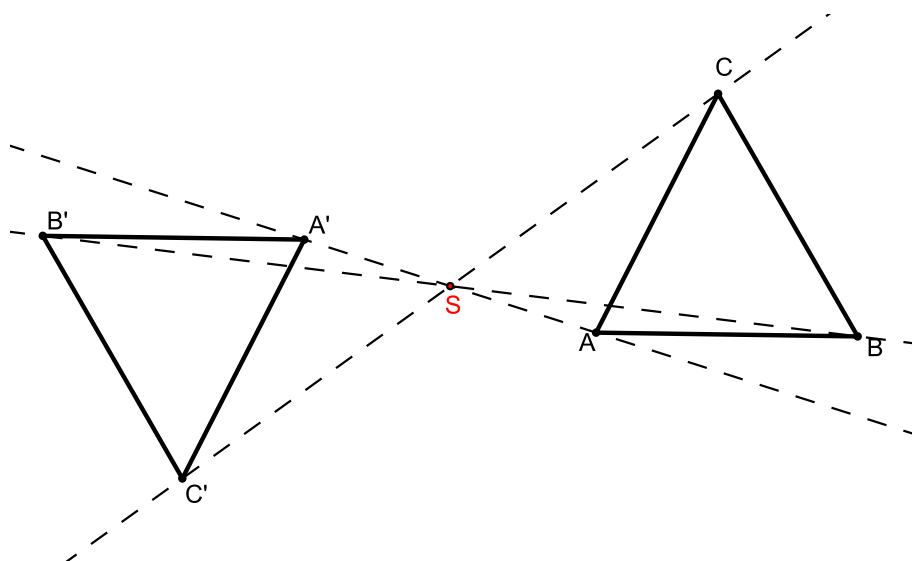
2 Geometrická zobrazení

Definice 9 (Geometrické zobrazení). *Zobrazením (geometrickým zobrazením) rozumíme předpis, kterým je libovolnému bodu X (který je prvkem dané množiny, např. roviny) jako jeho obraz jednoznačně přiřazen bod $X' = f(X)$.*

Definice 10 (Vzájemně jednoznačné zobrazení). *Vzájemně jednoznačným zobrazením rozumíme zobrazení, které je prosté a zároveň je zobrazením na množinu (tj. že dvěma různými body (vzorů) jsou přiřazeny dva různé obrazy a zároveň platí, že každý bod množiny, do níž zobrazujeme, je obrazem nějakého bodu z množiny vzorů).*

Příklady geometrických zobrazení

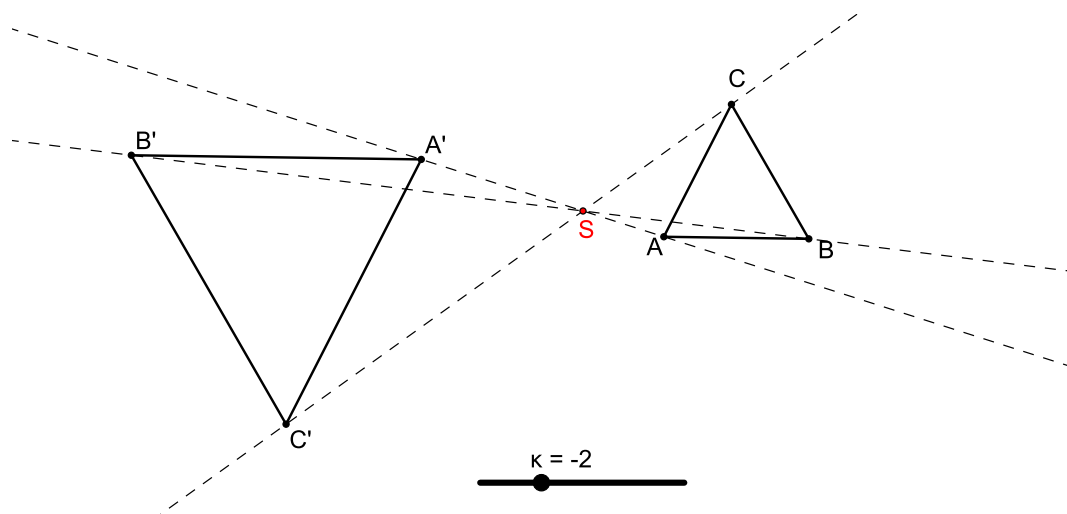
Středová souměrnost, viz Obr. 3¹



Obrázek 3: Středová souměrnost se středem S

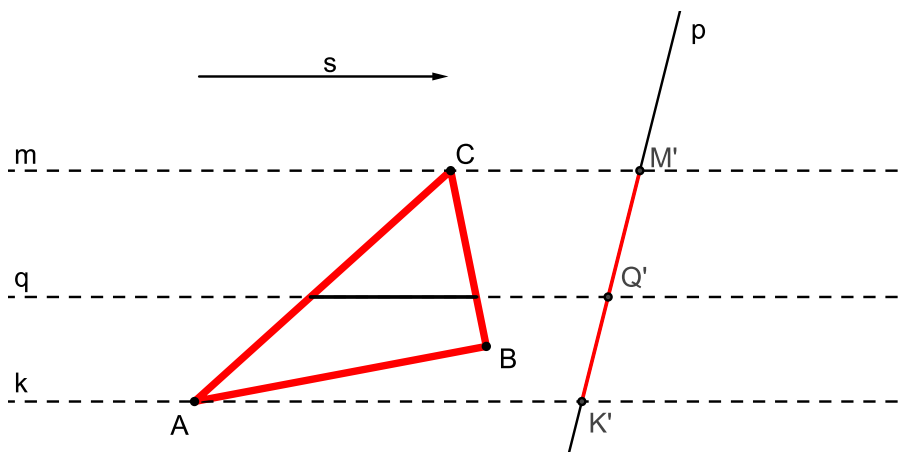
¹Středová souměrnost je příkladem *vzájemně jednoznačného geometrického zobrazení* (stejně jako všechna ostatní shodná zobrazení i stejnolehlost).

Stejnolehlost (daná středem S a koeficientem κ), viz Obr. 4



Obrázek 4: Stejnolehlost se středem S a s koeficientem $\kappa = -2$

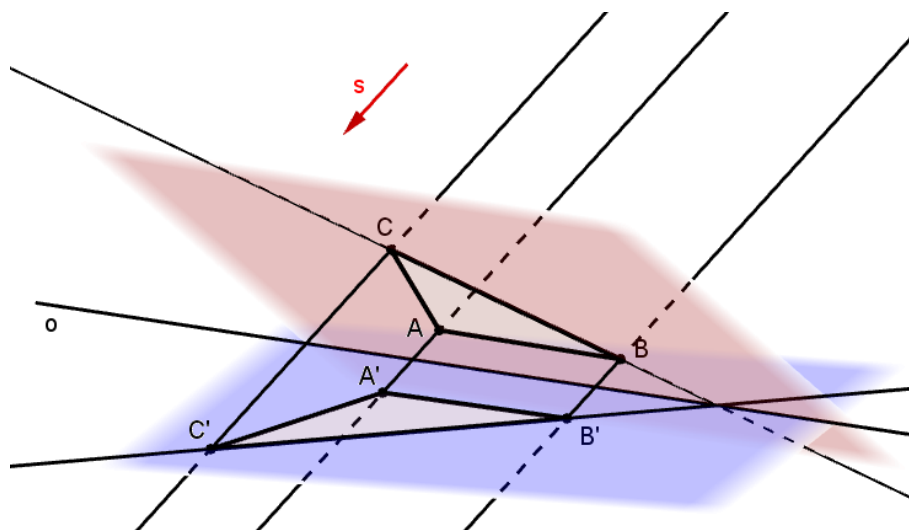
Rovnoběžné promítání do přímky (dané směrem \vec{s} a přímkou p), viz Obr. 5²



Obrázek 5: Rovnoběžné promítání ve směru \vec{s} z roviny do přímky p

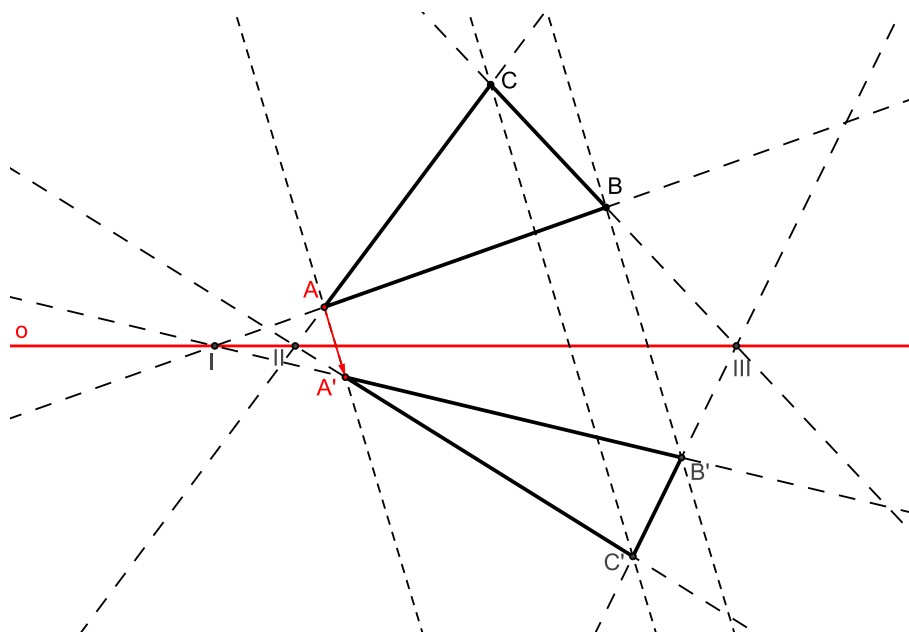
²Rovnoběžné promítání do přímky není prosté. Z obrázku je patrné, že všechny body přímky rovnoběžné se směrem \vec{s} se zobrazují do jednoho bodu. Například body přímek k, m, q se v uvedeném pořadí zobrazují do bodů K', M', Q' .

Rovnoběžné promítání se směrem \vec{s} mezi dvěma různoběžnými rovinami v prostoru E_3 , viz Obr. 6.



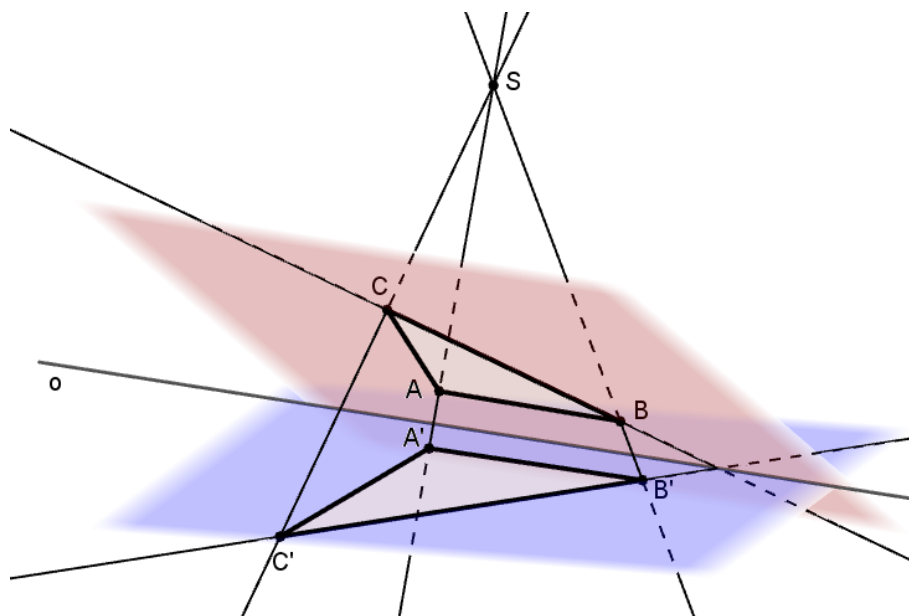
Obrázek 6: Rovnoběžné promítání mezi dvěma různoběžnými rovinami (dalo vznik *osové afinitě*)

Osová afinita (daná osou o a dvojicí bodů A, A' ve vztahu vzor a obraz), viz Obr. 7



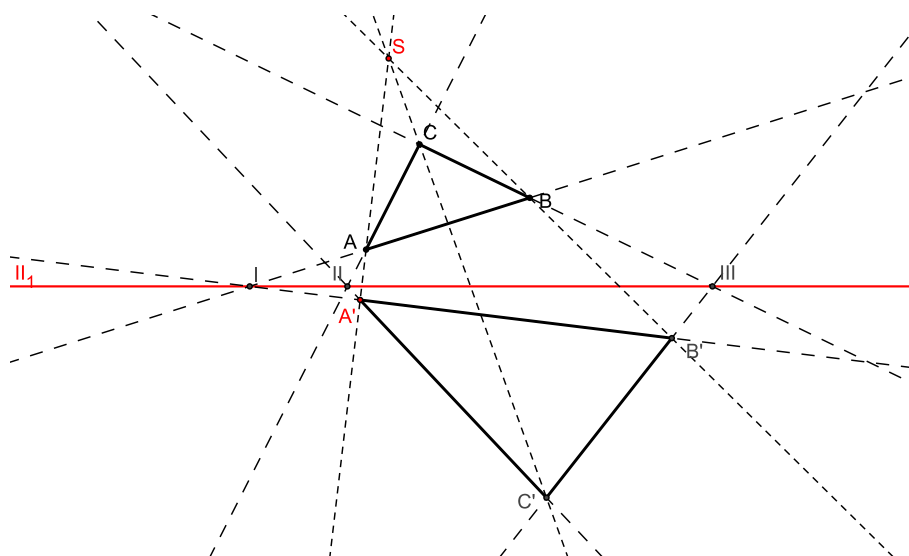
Obrázek 7: Osová afinita daná osou o a dvojicí bodů A, A'

Středové promítání se středem S mezi dvěma různoběžnými rovinami v prostoru E_3 , viz Obr. 8.



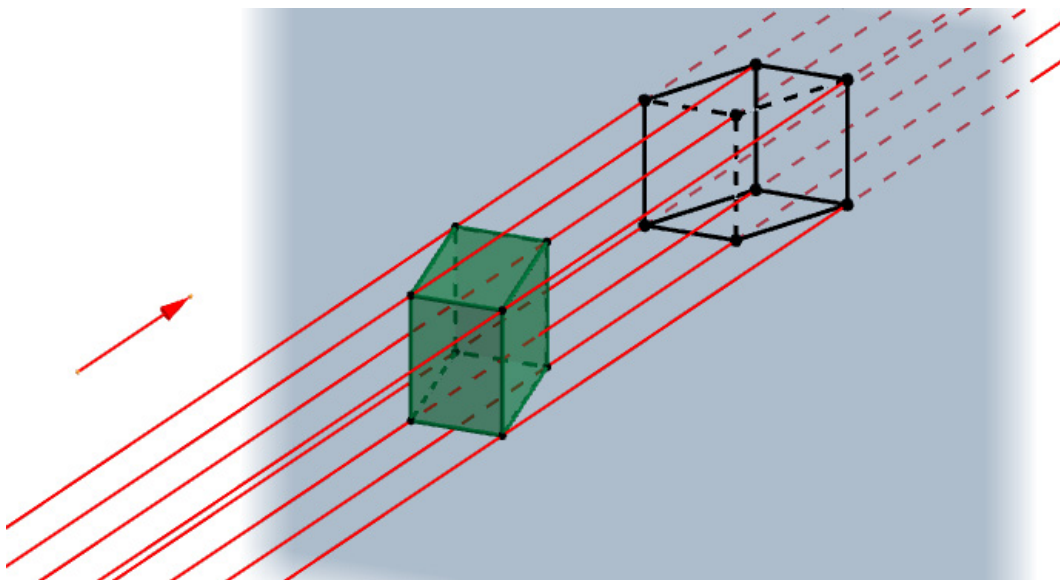
Obrázek 8: Středové promítání mezi dvěma různoběžnými rovinami (dalo vznik *středové kolineaci*)

Středová kolineace (daná osou o , středem S a dvojicí bodů A, A' ve vztahu vzor a obraz), viz Obr. 9



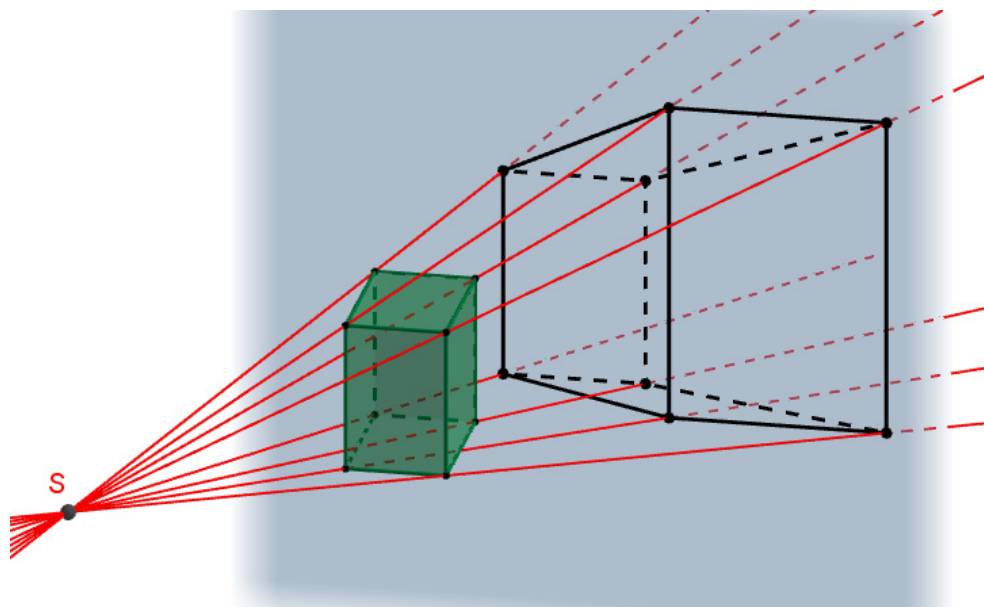
Obrázek 9: Středová kolineace daná středem S , osou o a dvojicí bodů A, A'

Rovnoběžné promítání (z trojrozměrného prostoru do roviny; dané směrem \vec{s}), viz Obr. 10.



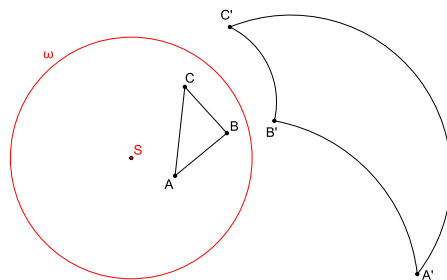
Obrázek 10: Rovnoběžné promítání trojrozměrného útvaru do roviny

Středové promítání (z trojrozměrného prostoru do roviny; dané středem S), viz Obr. 11



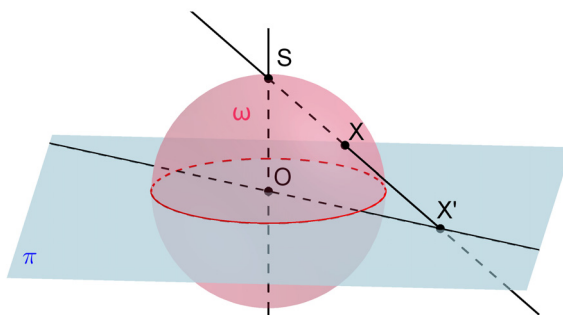
Obrázek 11: Středové promítání trojrozměrného útvaru do roviny

Kruhová inverze (daná *určující kružnicí* $\omega = (S, r)$ a vztahem $|SX| \cdot |SX'| = r^2$ mezi vzorem X a obrazem X'), viz Obr. 12

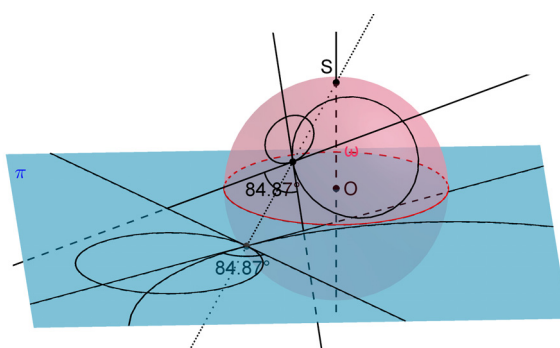


Obrázek 12: Kruhová inverze daná kružnicí ω

Stereografická projekce³, viz Obr. 58



Obrázek 13: Stereografická projekce



Obrázek 14: Stereografická projekce: obrazem kružnice je kružnice, velikost úhlu se zachovává (tzv. *konformní* zobrazení).

³Stereografický průmět kulové plochy je středovým průmětem kulové plochy pro střed promítání S ležící na kulové ploše ω a pro průmětnu π rovnoběžnou s tečnou rovinou kulové plochy ve středu promítání S