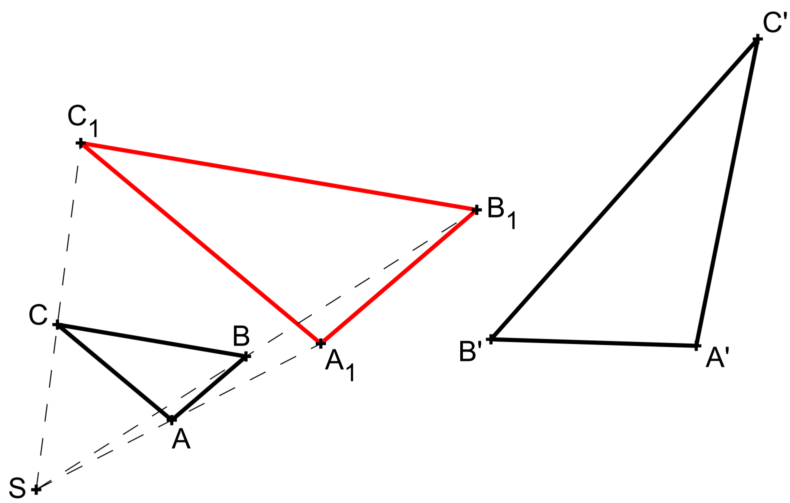
13 Podobnosti v rovině

Zopakujme si definici *podobného zobrazení v rovině* (stručně *podobnosti*): *Zobrazení f roviny (euklidovského prostoru E_2) na sebe se nazývá „podobnou transformací roviny“ (též „podobností v rovině“), jestliže existuje kladné reálné číslo k tak, že pro každé dva body X, Y roviny a jejich obrazy X', Y' platí:*

$$|X'Y'| = k|XY|.$$

Číslo k se nazývá koeficient podobnosti f.

Poznámky.
1. Každé podobné zobrazení je afinní.
2. Podobnosti s koeficientem $k \neq 1$ nazýváme *vlastní podobností.*



Obrázek 32: Každou podobnost lze rozložit na stejnolehlost a shodnost

Věta 48. *Každou podobnost v rovině s poměrem podobnosti k lze rozložit na stejnolehlost $H(S, k)$ a shodnost Z. Přitom střed stejnolehlosti můžeme volit libovolně a shodnost Z je tím určena jednoznačně.*

Věta 49 (O určenosti podobnosti v rovině)**.** *Každá podobnost v rovině je jednoznačně určena trojúhelníkem ABC a jeho obrazem $A'B'C'$ takovým, že $|A'B'| = k|AB|, |B'C'| = k|BC|, |A'C'| = k|AC|$, kde k, $k > 0$, je koeficient této podobnosti.*

Grupa podobností

Množina všech podobností eukleidovského prostoru E_n spolu s operací skládání tvoří grupu - tzv. *grupu podobností prostoru E_n.*

13.1 Podobnosti eukleidovské roviny

Víme, že každé podobné zobrazení eukleidovské roviny do sebe lze složit ze *stejnolehlosti* a *shodnosti.*

1. Stejnolehlost H volíme se středem v počátku soustavy souřadnic a s koeficientem $k > 0$:

$$H : X \mapsto \overline{X}; \quad \begin{aligned} \overline{x} &= kx \\ \overline{y} &= ky. \end{aligned}$$

2. Shodnost S je buď přímá nebo nepřímá:

$$S : \overline{X} \mapsto X'; \quad \begin{aligned} x' &= \overline{x} \cos\alpha \mp \overline{y} \sin\alpha + p \\ y' &= \overline{x} \sin\alpha \pm \overline{y} \cos\alpha + q. \end{aligned}$$

Výsledkem složení $S \circ H$ je potom přímá nebo nepřímá podobnost.

Přímá podobnost	**Nepřímá podobnost:**
$\begin{aligned} x' &= kx\cos\alpha - ky\sin\alpha + p \\ y' &= kx\sin\alpha + ky\cos\alpha + q. \end{aligned}$	$\begin{aligned} x' &= kx\cos\alpha + ky\sin\alpha + p \\ y' &= kx\sin\alpha - ky\cos\alpha + q. \end{aligned}$
$\begin{aligned} x' &= ax - by + p \\ y' &= bx + ay + q. \end{aligned}$	$\begin{aligned} x' &= ax + by + p \\ y' &= bx - ay + q. \end{aligned}$
$A^T \cdot A = (a^2 + b^2) \cdot I; \qquad k = \sqrt{a^2 + b^2}$	

Věta 50. *Každá vlastní podobnost eukleidovské roviny je buď stejnolehlost, nebo stejnolehlost složená s otočením kolem středu stejnolehlosti, nebo stejnolehlost složená s osovou souměrností, jejíž osa prochází středem stejnolehlosti.*

13.1.1 Úlohy – Podobnosti

1. Najděte všechny podobnosti euklidovské roviny, při kterých se bod $[1,0]$ zobrazí na bod $[4,-2]$ a bod $[2,3]$ na bod $[2,-8]$. **[2]**

2. Eulerovými body se nazývají středy úseček spojujících vrcholy trojúhelníku s průsečíkem jeho výšek.

Dokažte následující tvrzení:

Středy stran, paty výšek a Eulerovy body libovolného trojúhelníku leží na jedné kružnici. (*Tato kružnice se nazývá kružnice devíti bodů, Eulerova kružnice nebo Feuerbachova kružnice*.) **[3]**

3. Najděte podobnost euklidovské roviny, při které se zobrazí počátek na bod $[0,2]$, bod $[1,1]$ na počátek a bod $[2,0]$ na bod $[2,p]$. Určete p a najděte samodružné body a směry nalezené podobnosti. **[2]**

4. Najděte rovnice podobnosti, při které je počátek samodružný a obrazem bodu $[5,-3]$ je bod $[1,1]$. **[2]**

5. Určete všechny podobnosti, pro které jsou bod $[1,1]$ a směr vektoru $(1,1)$ samodružné. **[2]**

6. Napište rovnice všech podobností zobrazujících body $[1,2]$ a $[0,1]$ po řadě na body $[3,-1], [4,2]$. Rozložte je na stejnolehlost a shodnost. **[2]**

7. V rovině je dán čtverec $ABCD$ se středem S. Určete obraz bodu C v podobnosti, která zobrazuje body A, B, S po řadě na body B, D, C. Určete samodružný bod této podobnosti. **[2]**

8. Sestrojte alespoň jeden trojúhelník ABC, pro který platí $|AB| : |AC| = 3 : 5$, $\alpha = 60°$, $\rho = 1,8cm$(poloměr kružnice vepsané). **[2]**

9. Sestrojte kosodélník $ABCD$, je-li dáno $|\angle DAB| = \alpha$, $|\angle ABD| = \varepsilon$, $|AC| = e$. **[2]**

10. Je dána kružnice k a bod A, který je bodem vnější oblasti kružnice k. Sestrojte všechny sečny kružnice k, které procházejí bodem A a pro jejichž průsečíky X, Y s kružnicí platí $|AX| = 2|AY|$. **[2]**

11. Je dána kružnice $k(S; 4cm)$, její tečna t a bod $M \in k$ tak, že $|Mt| = 2cm$. Sestrojte úsečku XY procházející bodem M tak, aby $X \in k, Y \in t$ a $|MX| : |MY| = 3 : 2$. **[1]**

12. Jsou dány dvě různoběžky a, b a kružnice k tak, že $P \in a \cap b$ je bodem vnitřní oblasti kružnice k. Sestrojte všechny kružnice, které se dotýkají přímek a, b i kružnice k. [**2**]

13. Dokažte následující věty (za důkaz každé věty [**4**] body):

Věta 51 (Menelaova věta)**.** *Je dán trojúhelník ABC a přímka p, která neprochází žádným z bodů A, B, C, ale protíná přímky AB, BC, CA v bodech C', A', B'. Potom platí:*

$$(ABC') \cdot (BCA') \cdot (CAB') = 1.$$

Naopak, platí-li uvedený vztah, body A', B', C' leží na přímce.

Věta 52 (Pappova věta)**.** *Nechť jsou A', B', C', D' rovnoběžné nebo středové průměty čtyř navzájem různých bodů A, B, C, D přímky p na přímku p'; $p' \neq p$. Potom:*

$$(A'B'C'D') = (ABCD)$$

Věta 53 (Cevova věta)**.** *Nechť je dán trojúhelník ABC a bod M, který neleží na žádné z přímek AB, BC, CA. Průsečíky přímek AM, BM, CM s přímkami BC, CA, AB (různé od bodů A, B, C) označme postupně A', B', C'. Potom platí:*

$$(ABC') \cdot (BCA') \cdot (CAB') = -1.$$

Naopak, platí-li uvedený vztah, jsou přímky AA', BB', CC' buď navzájem rovnoběžné nebo se protínají v jediném bodě.

14. Zobrazení f euklidovské roviny do euklidovského trojrozměrného prostoru je vzhledem k zvoleným kartézským soustavám souřadnic dáno rovnicemi: $x' = 2x + ay - 1$, $y' = x + by + 2$, $z' = y + 1$. Určete koeficienty a, b tak, aby bylo zobrazení f podobné. Jaký je koeficient tohoto podobného zobrazení f?

15. Určete p, q, r tak, aby byla rovnicemi $x' = x - 2y + 2z + 4$, $y' = px + 2y + z - 2$, $z' = qx + ry + 2z - 2$ dána vzhledem ke kartézské soustavě souřadnic podobnost. Určete její samodružný bod a samodružné směry.