9 Shodnosti v rovině

Definice 18. *Zobrazení v rovině, které každým dvěma bodům* X, Y *přiřazuje body* X', Y' *tak, že*

$$|X'Y'| = |XY|$$

se nazývá **shodné zobrazení** *v rovině (též izometrické zobrazení).*

Poznámka. Můžeme též říci, že shodné zobrazení zachovává vzdálenost bodů, tj. pro shodné zobrazení $f : X \longrightarrow f(X)$ platí:

$$|f(X)f(Y)| = |XY|.$$

Věta 13. *Každé shodné zobrazení je prosté a afinní.*

Další vlastnosti shodných zobrazení:

1. Úsečka se zobrazí na úsečku.
2. Polopřímka se zobrazí na polopřímku.
3. Přímka se zobrazí na přímku.
4. Rovnoběžky se zobrazí na rovnoběžky.
5. Úhel se zobrazí na úhel s ním shodný.
6. Polorovina se zobrazí na polorovinu.

PŘÍKLAD 9.1. *V euklidovské rovině* E_2 *je zvolena kartézská soustava souřadnic. Určete, pro které hodnoty čísel a, b existuje shodné zobrazení roviny* E_2 *do sebe, zobrazující body* $[0, 0]$, $[2, 1]$, $[4, a]$ *po řadě na body* $[1, 2]$, $[3, 1]$, $[5, b]$*? Je toto shodné zobrazení určeno jednoznačně?*

Z řešení předchozího příkladu vyplývá poznatek, že pro jednoznačné určení shodnosti v rovině nesmí být příslušné trojice bodů kolineární (tj. nesmí ležet v přímce).

Věta 14 (O určenosti shodného zobrazení v rovině 1)**.** *Shodné zobrazení v rovině je jednoznačně určeno libovolnými třemi nekolineárními body* K, L, M *a třemi nekolineárními body* K', L', M'*, které jsou po řadě jejich obrazy.*

Poznámka. Již víme, že stejná věta platí pro všechna afinní zobrazení v rovině (viz věta 2 o určenosti afinního zobrazení na str. 29 a věta 5 o určenosti afinity v rovině na str. 45).

9.1 Rovnice shodnosti v rovině

Každou afinitu f v rovině můžeme zapsat soustavou rovnic

$$\begin{aligned} f:\ x' &= a_{11}x + a_{12}y + b_1 \\ y' &= a_{21}x + a_{22}y + b_2, \end{aligned} \tag{79}$$

kterou přepíšeme užitím matic do tvaru

$$f:\ \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \tag{80}$$

a stručně vyjádříme rovnicí

$$f:\ X' = A \cdot X + B. \tag{81}$$

Jak poznáme, že afinita (79) **je shodností?**

Je-li tato afinita shodností, platí pro všechny dvojice bodů $X[x_1, x_2], Y[y_1, y_2]$ a jejich obrazy $X'[x_1', x_2'], Y'[y_1', y_2']$ vztah $|X'Y'| = |XY|$, z něhož po dosazení souřadnic uvedených bodů dostaneme

$$\sqrt{(y_1' - x_1')^2 + (y_2' - x_2')^2} = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2}, \tag{82}$$

po umocnění obou stran na druhou

$$(y_1' - x_1')^2 + (y_2' - x_2')^2 = (y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2. \tag{83}$$

Nyní do levé strany (83) dosadíme z (79) (protože se body $X[x_1, x_2], Y[y_1, y_2]$ zobrazují v daném pořadí na body $X'[x_1', x_2'], Y'[y_1', y_2']$, dosazujeme takto: $x_1' = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + b_1,\ x_2' = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + b_2;\ y_1' = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + b_1,\ y_2' = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + b_2$). Dostaneme rovnost

$$\begin{aligned} (a_{11}y_1 + a_{12}y_2 - a_{11}x_1 - a_{12}x_2)^2 + (a_{21}y_1 + a_{22}y_2 - a_{21}x_1 + a_{22}x_2)^2 \\ = (y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2, \end{aligned} \tag{84}$$

kterou postupně upravíme na tvar obsahující výrazy $(y_1 - x_1)$ a $(y_2 - x_2)$. Nejprve vytkneme společné koeficienty

$$\begin{aligned} [a_{11}(y_1 - x_1) + a_{12}(y_2 - x_2)]^2 + [a_{21}(y_1 - x_1) + a_{22}(y_2 - x_2)]^2 \\ = (y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2, \end{aligned} \tag{85}$$

potom umocníme závorky na levé straně a zjednodušíme ji na tvar polynomu s proměnnými $(y_1 - x_1)$ a $(y_2 - x_2)$

$$(a_{11}^2 + a_{21}^2)(y_1 - x_1)^2 + 2(a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22})(y_1 - x_1)(y_2 - x_2) + (a_{12}^2 + a_{22}^2)(y_2 - x_2)^2 \\ = (y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2. \quad (86)$$

Nyní diskutujeme, za jakých podmínek je v (86) splněna rovnost levé strany s pravou stranou (využijeme toho, že dva polynomy jsou si rovny pro všechny hodnoty z příslušného oboru právě tehdy, když se rovnají koeficienty u sobě odpovídajících členů). Zjistíme tak, že rovnost $|X'Y'| = |XY|$ nastává právě tehdy, když jsou pro prvky matice A (tj. koeficienty soustavy (79)) splněny vztahy

$$\begin{aligned} a_{11}^2 + a_{21}^2 &= 1, \\ a_{12}^2 + a_{22}^2 &= 1, \\ a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22} &= 0, \end{aligned} \quad (87)$$

které lze stručně vyjádřit rovností

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (88)$$

Odpověď na výše uvedenou otázku je tedy taková, že **rovnice** (79) **je rovnicí shodnosti, právě když platí**

$$A^T \cdot A = E, \quad (89)$$

kde E **je jednotková matice,** jinak řečeno, když je matice A **ortonormální**.

Poznámky.

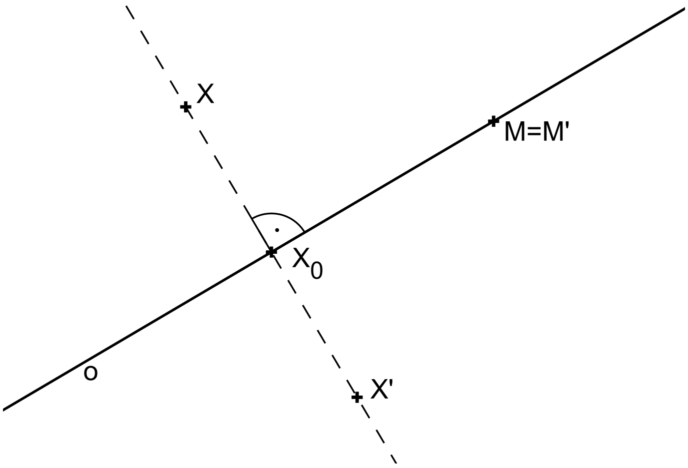
1. Platí $A^T \cdot A = E$. Potom je ale $A^T = A^{-1}$ a platí tedy i rovnost $A \cdot A^T = E$.

2. Zobrazení, pro která platí $|\det A| = 1$ nazýváme ekviafinní zobrazení, stručně **ekviafinity**. Je zřejmé, že každá shodnost je ekviafinita. Platí toto tvrzení i obráceně? Můžeme říci, že každá ekviafinita je shodností?

3. Je třeba si uvědomit, že při shodném zobrazení mezi euklidovskými prostory různých dimenzí není matice A čtvercová. Potom výše uvedené úvahy o inverzní matici nemají smysl a v platnosti zůstává pouze původní podmínka $A^T \cdot A = E$.

9.2 Osová souměrnost

Definice 19. *Nechť je dána přímka o, kterou nazýváme* **osa souměrnosti.** *Potom pro obraz M' libovolného bodu M této přímky o platí $M' \equiv M$. Ke každému bodu X, který neleží na přímce o, sestrojíme obraz X' následujícím způsobem: Bodem X vedeme kolmici k na přímku o a její patu označíme X_0. Na polopřímce opačné k polopřímce X_0X sestrojíme bod X' tak, že $|X'X_0| = |XX_0|$. Takto definované zobrazení nazýváme* **osová souměrnost s osou** *o a značíme ho $\mathcal{O}(o)$.*

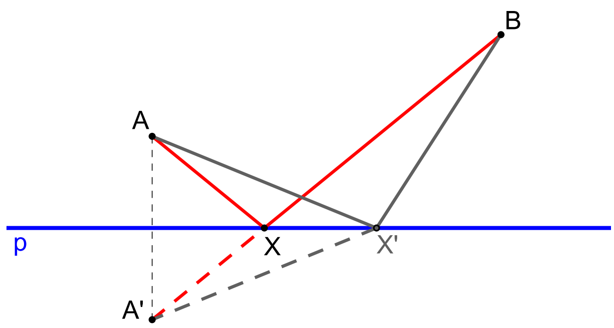


Obrázek 34: Definice osové souměrnosti

Poznámky:

1. O bodech X, X' říkáme, že je to dvojice bodů souměrně sdružených podle osy o.
2. Osová souměrnost je příkladem involutorního zobrazení (involuce).

PŘÍKLAD 9.2. *Je dána přímka p a body A, B v téže polorovině s hraniční přímkou p. Najděte všechny body $X \in p$ takové, že součet vzdáleností $|AX| + |BX|$ je minimální.*



Obrázek 35: Využití osové souměrnosti ke geometrickému řešení příkladu 35

Věta 15. *Osová souměrnost je shodné zobrazení.*

Samodružné body a směry osové souměrnosti

Každá shodnost je unikátní svou kombinací samodružných bodů a směrů. Později tuto skutečnost využijeme ke klasifikaci shodností.

Věta 16 (Alternativní definice osové souměrnosti)**.** *Shodné zobrazení, jehož všechny samodružné body vyplní přímku o, je souměrnost podle osy o.*

Věta 17. *Jestliže existují na přímce dva různé samodružné body, pak každý bod této přímky je samodružný.*

Věta 18. *Má-li shodnost aspoň tři nekolineární samodružné body, je to identita.*

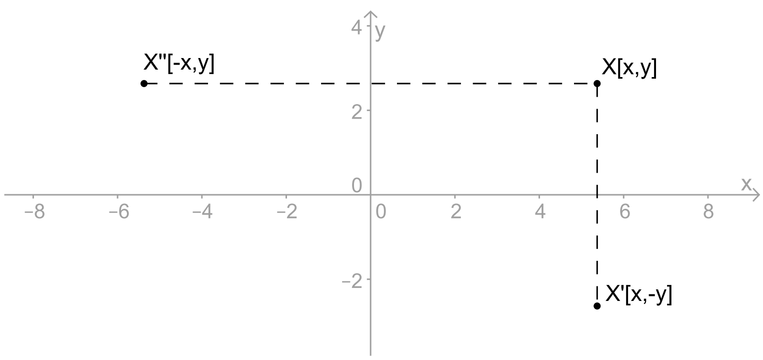
Věta 19. *Má-li shodnost dva různé samodružné body a není identitou, pak je osovou souměrností.*

Věta 20. *Samodružné přímky osové souměrnosti jsou přímky kolmé na osu souměrnosti.*

Analytické vyjádření osové souměrnosti $\mathbf{O}(o)$ v rovině

PŘÍKLAD 9.3. *Napište analytické vyjádření osové souměrnosti s osou v souřadnicové ose x (y).*

Řešení: Dle obrázku 36 je zřejmé, že uvedené osové souměrnosti mají níže uvedená analytická vyjádření.



Obrázek 36: Odvození rovnic osové souměrnosti s osou v souřadnicové ose x (y)

Osová souměrnost s osou x:

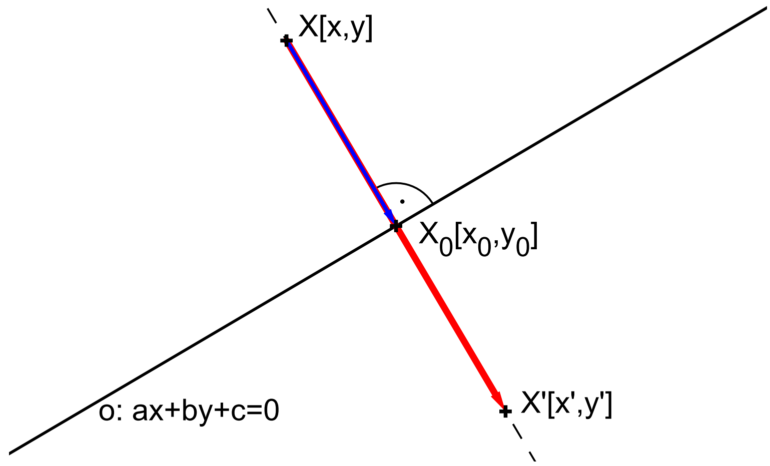
$$x' = x$$
$$y' = -y$$

Osová souměrnost s osou y:

$$x' = -x$$
$$y' = y$$

Ne vždy je ale možné osu souměrnosti takto výhodně umístit do souřadnicové osy. Proto si odvodíme rovnice osové souměrnosti s obecně umístěnou osou.

Osová souměrnost podle osy o dané rovnicí $o : ax + by + c = 0$



Obrázek 37: Odvození rovnic osové souměrnosti $O(o)$

Dle obrázku 37 platí

$$X' - X = 2(X_0 - X),$$
$$X_0 - X = k(a, b).$$

Z druhé rovnosti vyjádříme $x_0 = x + ka, y_0 = y + kb$ a dosadíme je do obecné rovnice osy o: $a(x + ka) + b(y + kb) + c = 0$. Odsud potom vyjádříme parametr $k = -\dfrac{ax + by + c}{a^2 + b^2}$, který dosadíme do rovnice

$$X' - X = 2k(a, b).$$

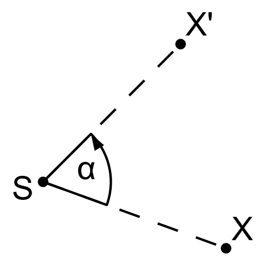
Po úpravě a rozepsání po složkách dostáváme rovnice osové souměrnosti $O(o)$:

$$x' = x - \frac{2a}{a^2 + b^2}(ax + by + c)$$
$$y' = y - \frac{2b}{a^2 + b^2}(ax + by + c)$$

PŘÍKLAD 9.4. *V eukleidovské rovině je dána souměrnost podle přímky* $p : 3x - 4y + 1 = 0$. *Napište rovnice této souměrnosti.*

9.3 Otočení

Definice 20. Otočení *neboli* **rotace** *je zobrazení určené středem S a orientovaným úhlem velikosti φ, které bodu S přiřazuje týž bod S a libovolnému bodu $X \neq S$ přiřazuje bod X' tak, že $|X'S| = |XS|$ a orientovaný úhel XSX' má velikost φ. Zobrazení značíme $\mathcal{R}(S, \varphi)$, bod S se nazývá střed otočení a orientovaný úhel velikosti φ je úhel otočení.*



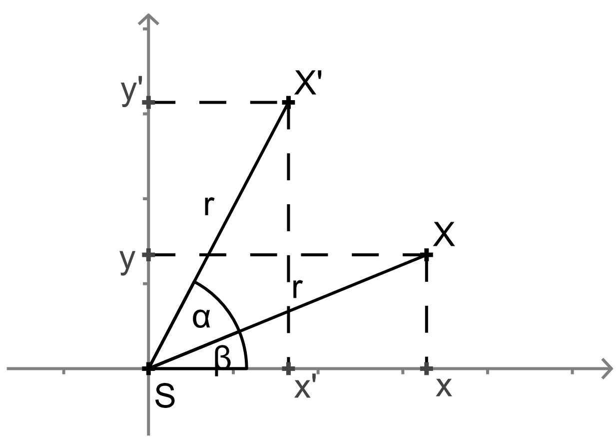
Obrázek 38: Otočení $\mathcal{R}(S, \alpha)$

Shodnost, která není ani identitou ani osovou souměrností, má nejvýše jeden samodružný bod

Věta 21 (Alternativní definice otočení)**.** *Shodnost s právě jedním samodružným bodem S je otočením; bod S je střed otočení.*

PŘÍKLAD 9.5. *Odvoďte analytické vyjádření otočení se středem v počátku souřadnicové soustavy o úhel α. Potom ukažte, že toto zobrazení má jediný samodružný bod - střed otočení.*

Řešení: Postupujeme podle obrázku 39.



Obrázek 39: Otočení $\mathcal{R}([0, 0], \alpha)$

Rovnice otočení o úhel α kolem počátku jsou

$$x' = x\cos\alpha - y\sin\alpha$$
$$y' = x\sin\alpha + y\cos\alpha$$

Věta 22. *Složením dvou osových souměrností s různoběžnými osami vznikne otočení, jehož středem je průsečík těchto os.*

Věta 23. *Každé otočení lze složit ze dvou osových souměrností, jejichž osy jsou různoběžky procházející středem otočení. Jednu z těchto os lze volit libovolně tak, že prochází středem otočení. Druhá je touto volbou určena jednoznačně.*

Věta 24. *Otočení se středem S a úhlem velikosti α převádí přímku p v přímku p' různoběžnou s p; přitom dva vrcholové úhly, které p a p' tvoří, mají velikost α.*

Analytické vyjádření otočení (rotace) $\mathbf{R}(S,\alpha)$ v rovině

Souřadnice středu: $S = [s_1, s_2]$

$$x' = (x - s_1)\cos\alpha - (y - s_2)\sin\alpha + s_1$$
$$y' = (x - s_1)\sin\alpha + (y - s_2)\cos\alpha + s_2$$

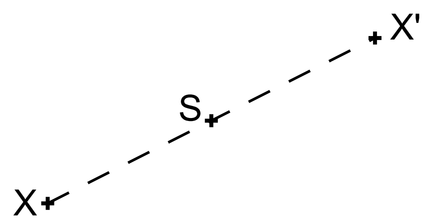
Po úpravě dostaneme:

$$x' = x\cos\alpha - y\sin\alpha + s_1 - s_1\cos\alpha + s_2\sin\alpha$$
$$y' = x\sin\alpha + y\cos\alpha + s_2 - s_1\sin\alpha - s_2\cos\alpha$$

PŘÍKLAD 9.6. *Afinní zobrazení euklidovské roviny na sebe zobrazuje vrchol A trojúhelníku ABC na bod B, bod B na bod C a bod C na bod A. Může to být zobrazení shodné? Jestliže ano, napište jeho rovnice vzhledem k vhodně zvolené kartézské soustavě souřadnic.*

9.4 Středová souměrnost

Definice 21. Středová souměrnost *se středem S je shodné zobrazení, které bodu S přiřazuje týž bod S a libovolnému bodu $X \neq S$ přiřazuje bod X' tak, že bod S' je středem úsečky XX'. Zobrazení značíme $\mathcal{S}(S)$.*



Obrázek 40: Středová souměrnost $\mathcal{S}(S)$

Poznámka. Středovou souměrnost můžeme chápat též jako speciální případ rotace $\mathbf{R}(S, \alpha)$ pro $\alpha = \pi$, tj. $\mathcal{S}(S) = \mathcal{R}(S, \pi)$.

Vlastnosti středové souměrnosti:

1) Lze ji rozložit na dvě osové souměrnosti, jejichž osy jsou navzájem kolmé a procházejí středem souměrnosti S; jedna z os je volitelná.

2) Vznikne složením libovolných dvou osových souměrností, jejichž osy jsou k sobě kolmé (střed souměrnosti S odpovídá průsečíku těchto os).

3) Je jednoznačně určena svým středem

4) Je to *involutorní zobrazení* (též *involuce*).

5) Středová souměrnost je *přímá shodnost.*

6) Středová souměrnost má jediný samodružný bod, střed S, a všechny směry samodružné.

Věta 25. *V souměrnosti podle středu S je obrazem každé přímky přímka s ní rovnoběžná. Přímka, která prochází středem S je samodružná.*

Analytické vyjádření středové souměrnosti $\mathbf{S}(S)$ v rovině

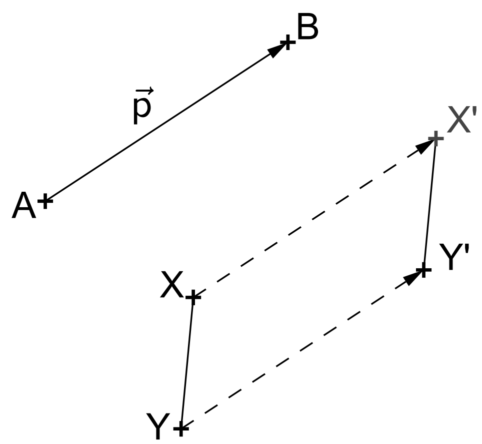
Souřadnice středu: $S = [s_1, s_2]$

$$x' = -x + 2s_1$$
$$y' = -y + 2s_2$$

Věta 26. *Každá shodnost v rovině se dá složit z nejvýše tří osových souměrností.*

9.5 Posunutí

Definice 22. *Orientovanou úsečkou AB je dán vektor $\vec{p} = \overrightarrow{AB}$.* **Posunutí** *neboli* **translace** *je zobrazení, které každému bodu X roviny přiřazuje bod X' tak, že platí $\overrightarrow{XX'} = \vec{p}$, tj. $X' = X + \vec{p}$. Zobrazení značíme $\mathcal{T}(\vec{p})$.*



Obrázek 41: Posunutí $\mathcal{T}(\vec{p})$

Poznámka. Posunutí (translaci) můžeme definovat též jako shodnost, která vznikne složením dvou osových souměrností s rovnoběžnými a různými osami. Směr posunutí je potom kolmý na směr těchto os a jeho velikost je rovna dvojnásobku jejich vzdálenosti.

Věta 27. *Každou translaci lze složit ze dvou osových souměrností s rovnoběžnými osami z nichž jednu lze volit libovolně, kolmo na směr translace a druhá je touto volbou určena jednoznačně.*

Věta 28. *Posunutí (translace) nemá žádný samodružný bod a zobrazuje přímku do přímky s ní rovnoběžné (tj. má všechny směry samodružné).*

Věta 29. *Nechť X' je obraz libovolného (proměnného) bodu X v dané translaci* **T**. *Pak všechny přímky XX' jsou navzájem rovnoběžné a všechny úsečky XX' jsou navzájem shodné.*

Analytické vyjádření posunutí $\mathbf{T}(\vec{p})$ v rovině

Rovnice posunutí $\mathcal{T}(\vec{p})$, kde $\vec{p} = (p_1, p_2)$:

$$x' = x + p_1$$
$$y' = y + p_2$$

PŘÍKLAD 9.7. *Jaké zobrazení může být výsledkem skládání dvou posunutí?*

9.6 Posunuté zrcadlení

PŘÍKLAD 9.8. *Je dána přímka p a dva body A, B v téže polorovině s hraniční přímkou p. Na přímce p sestrojte úsečku XY délky d tak, aby součet $|AX|+|XY|+|YB|$ byl co nejmenší.*

Víme, že každá shodnost v rovině se dá složit z nejvýše tří osových souměrností. V případech jedné a dvou osových souměrností už máme jasno - složením jedné osové souměrnosti může vzniknout samozřejmě jenom tato souměrnost, složením dvou osových souměrností pak lze vytvořit otočení (různoběžné osy), středovou soměrnost (kolmé osy), posunutí (rovnoběžné osy) a identitu (dvě totožné osy). Každé z těchto zobrazení je zároveň unikátní svou skladbou samodružných bodů a směrů

– osová souměrnost má přímku samodružných bodů a dva na sebe kolmé samodružné směry,

– otočení má jediný samodružný bod a žádný samodružný směr,

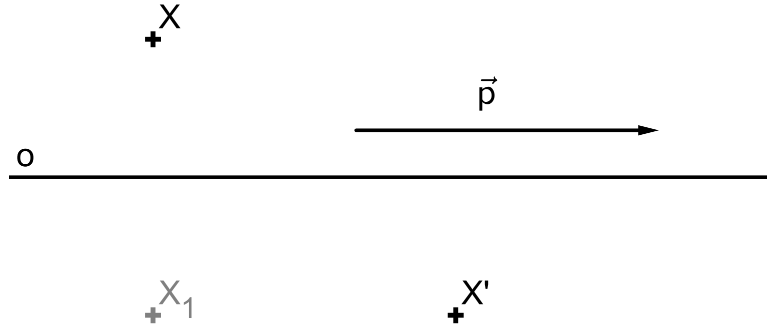
– středová souměrnost má jediný samodružný bod a všechny směry samodružné,

– identita má všechny body i směry samodružné.

Pokud existuje nějaké další shodné zobrazení, nemůže mít žádný samodružný bod (jinak by to bylo otočení, středová souměrnost, osová souměrnost nebo identita). Naším úkolem je proto vyšetřit, zda **existuje shodné zobrazení bez samodružných bodů, které vznikne složením tří osových souměrností.**

Ukáže se, že takové zobrazení skutečně existuje. Nazveme ho *posunuté zrcadlení* (též *posunutá souměrnost*).

Definice 23. *Je dána přímka o. Zobrazení složené z posunutí ve směru přímky o a osové souměrnosti podle osy o se nazývá posunuté zrcadlení (též posunutá souměrnost).*



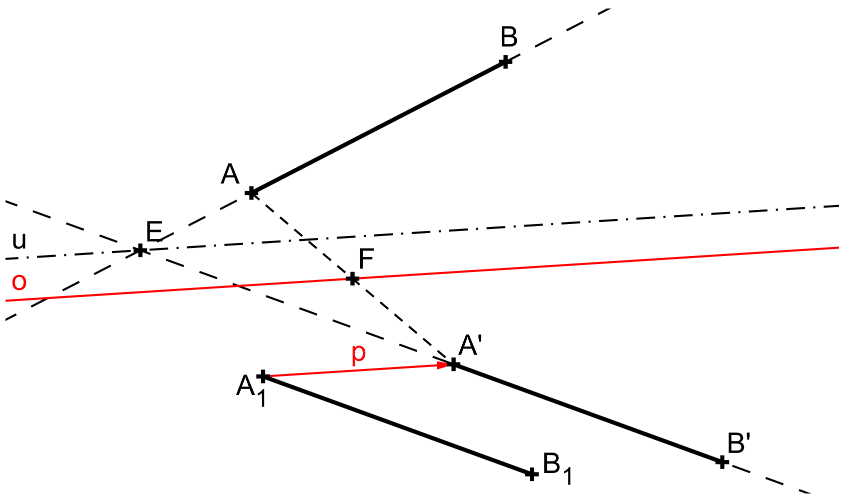
Obrázek 42: Posunuté zrcadlení $\mathcal{Z} : X \to X'$

Věta 30. *Posunuté zrcadlení se dá složit z osové a středové souměrnosti, přičemž střed středové souměrnosti neleží na ose osové souměrnosti.*

Věta 31. *Posunuté zrcadlení nemá samodružné body.*

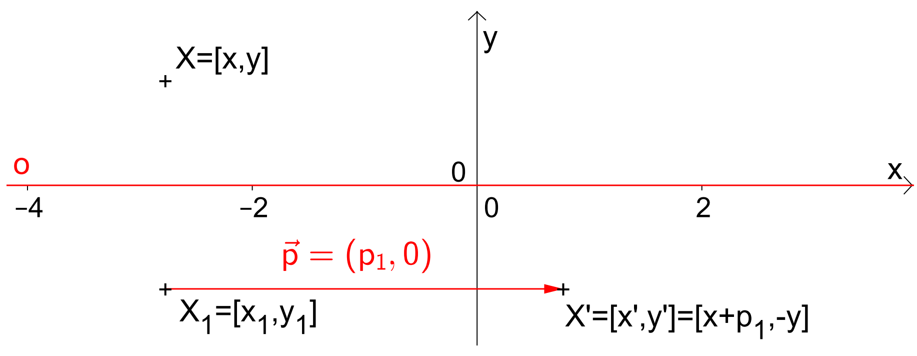
PŘÍKLAD 9.9. *Nechť AB, $A'B'$ jsou různoběžné a shodné úsečky. Dokažte, že existuje posunuté zrcadlení nebo osová souměrnost, které převádějí body A, B po řadě v body A', B'.*

Řešení:



Obrázek 43: Posunuté zrcadlení $\mathcal{Z} : AB \to A'B'$

Analytické vyjádření posunutého zrcadlení



Obrázek 44: Posunuté zrcadlení $\mathcal{Z} : X \to X'$

Posunuté zrcadlení dané osou souměrnosti v ose x a vektorem posunutí $\vec{p} = (p_1, 0)$ (viz Obr. 44)

$$\mathcal{Z} : \; x' = x + p_1, \quad y' = -y.$$

9.7 Shodnosti v rovině – Cvičení

Cvičení – Osová souměrnost

4. Napište rovnice souměrnosti podle přímky $o: 2x - 3y + 1 = 0$.

5. Sestrojte trojúhelník ABC, je-li dán obvod $o = 12cm$ a úhly $\alpha = 60°$, $\beta = 45°$.

6. Dokažte Vivianiho větu.

Věta 32 (Vivianiho věta)**.** *V rovnostranném trojúhelníku je hodnota součtu vzdáleností libovolného bodu od stran trojúhelníku konstantní, nezávislá na poloze bodu.*

7. Jsou dány dvě různoběžky p, q a bod A mimo ně. Najděte body $B \in p$, $C \in q$ tak, aby obvod trojúhelníku ABC byl minimální.

8. Řešte **Fagnanův problém**: „Danému ostroúhlému trojúhelníku vepište trojúhelník o nejmenším obvodu."

9. Sestrojte konvexní čtyřúhelník $ABCD$ se stranami dané velikosti, je-li $\mapsto AC$ osou vnitřního úhlu při vrcholu A.

10. Sestrojte čtverec $ABCD$, je-li dáno $a + e = 10cm$.

11. Sestrojte obdélník $ABCD$, je-li dáno $e = 7cm$, $a - b = 1cm$.

12. Sestrojte lichoběžník $ABCD$ $(AB \| CD)$, je-li dáno $b = 3cm$, $c = 2.5cm$, $d = 2.6cm$, $\alpha - \beta = 20°$.

13. Mascheroniova konstrukce. Je dána kružnice $k(S; r)$; dále je dána dvěma body A, B (body neleží na kružnici) její sečna p, která neprochází středem S. Sestrojte průsečíky přímky p s kružnicí k, aniž přitom použijete pravítka.

14. Dokažte, že body souměrně sdružené s průsečíkem výšek podle stran trojúhelníka, leží na kružnici trojúhelníku opsané.

15. Dokažte následující větu

Věta 33. *V každém trojúhelníku dělí osa libovolného vnitřního úhlu protější stranu v poměru stran přilehlých.*

16. Napište rovnice osové souměrnosti, zobrazující počátek na bod $[1, 5]$.

17. Je dána přímka p a dvě kružnice k_1, k_2 oddělené přímkou p. Sestrojte rovnostranný trojúhelník tak, aby na každé z kružnic k_1, k_2 byl jeden vrchol a jedna z výšek ležela na přímce p.

18. Jsou dány tři různé přímky p_1, p_2, p_3, procházející bodem S; na přímce p_1 je dán bod $A \neq S$. Sestrojte trojúhelník ABC, jehož osy vnitřních úhlů leží v přímkách p_1, p_2, p_3.

19. Jsou dány tři přímky o_1, o_2, o_3 procházející bodem O. Na o_1 dán bod A_1. Sestrojte $\triangle ABC$ tak, aby o_1, o_2, o_3 byly osami jeho stran a bod A_1 středem strany BC.

20. Jsou dány body X, Y a přímka p, která je odděluje. Sestrojte rovnoramenný trojúhelník ABC, jehož hlavním vrcholem je bod C, osou souměrnosti přímka p a jehož ramena mají danou velikost a. Přímka AC nechť prochází bodem X a přímka BC bodem Y.

21. Je dána přímka p a body A, B, ležící ve stejné polorovině s hraniční přímkou p. Sestrojte bod $X \in p$ tak, aby $|\angle AXp| = 2|\angle BXp|$.

22. Jsou dány body A, B, C a přímka p kolmá k přímce AB tak, že prochází bodem C a body A, B leží v téže polorovině určené přímkou p. Sestrojte na přímce p takový bod X, aby z něho byla vidět úsečka AB pod stejným úhlem jako úsečka BC.

23. Obrazy středu S kružnice opsané trojúhelníku ABC v osových souměrnostech podle přímek BC, AC, AB jsou vrcholy trojúhelníku $A_1B_1C_1$. Dokažte, že je tento trojúhelník shodný s trojúhelníkem ABC.

Otočení

24. Jsou dány dvě shodné úsečky AB, CD. Určete otočeení, které zobrazí A na C a B na D. **[2]**

25. Je dána kružnice $k(S; r)$ a bod $P \neq S$. Bodem P veďte přímku, na které kružnice vytíná úsečku dané velikosti d.

26. Jsou dány různé rovnoběžné přímky a, b, c a bod A, který leží na přímce a. Sestrojte všechny rovnostranné trojúhelníky ABC, jejichž vrcholy B, C leží po řadě na přímkách b, c.

27. Je dána kružnice $k(S; 3cm)$ a bod A ($|SA| = 1.5cm$). Sestrojte všechny tětivy XY kružnice k o délce $5.5cm$, které procházejí bodem A.

28. Je dána kružnice $k(S; r)$, bod B a úsečka délky d ($d < 2r$). Sestrojte tětivu XY kružnice k délky d tak, aby byla vidět z bodu B pod úhlem $60°$.

Otočení - Úlohy na domácí přípravu

29. Jsou dány dvě rovnoběžné přímky a, b a mimo ně bod C. Sestrojte rovnostranný trojúhelník ABC tak, aby jeho vrcholy A, B ležely po řadě na přímkách a, b.

30. Jsou dány kružnice k, přímka p a bod A ležící vně k. Sestrojte rovnostranný trojúhelník s vrcholem v bodě A tak, aby zbývající vrcholy ležely na k a na p.

31. Při odvalování kružnice po přímce se body soustavy spojené s kružnicí pohybují po trajektoriích, kterým se říká **cykloidy**. Rozlišujeme tři typy cykloid, v závislosti na tom, zda bod leží vně, na nebo uvnitř kružnice. Zobrazte tyto křivky pomocí programu GeoGebra.

Středová souměrnost

32. Je dána kružnice $k(O; r)$ a přímka p, která má od středu O vzdálenost $v > 0$; dále je dán bod S, který leží uvnitř poloroviny pO. Sestrojte úsečku se středem S, která má krajní body K, P po řadě na kružnici k a na přímce p.

33. Je dána kružnice $k(S, r)$. Bodem P, který leží vně kružnice k, veďte přímku p, která protíná kružnici v bodech A, B tak, že A je středem úsečky BP.

34. Je dán úhel AVB a bod S jeho vnitřku. Sestrojte na rameni VA bod X a na rameni VB bod Y tak, aby bod S byl středem úsečky XY.

35. Je dána úsečka AA_1 ($|AA_1| = 5cm$). Sestrojte všechny trojúhelníky ABC, pro které je AA_1 těžnicí t_a a pro které platí: $c = 4cm, b = 7cm$.

36. Je dána úsečka AA_1 ($|AA_1| = 5cm$). Sestrojte všechny trojúhelníky ABC, pro které je AA_1 těžnicí t_a a pro které platí: $\gamma = 45°, \beta = 60°$.

37. Jsou dány dvě kružnice k_1, k_2, které se protínají ve dvou bodech Q a R. Bodem Q veďte přímku, která vytíná na obou kružnicích tětivy stejné délky.

Středová souměrnost - Úlohy na domácí přípravu

38. Je dán trojúhelník ABC a jeho vnitřní bod M. Sestrojte všechny úsečky XY se středem M a s krajními body X, Y na hranici trojúhelníku.

39. Vepište danému rovnoběžníku $ABCD$ čtverec $XYUV$ tak, aby na každé straně rovnoběžníku ležel jeden vrchol čtverce.

40. Je dán úhel AVB a bod S jeho vnitřku. Sestrojte na rameni VA bod X a na rameni VB bod Y tak, aby XYS byl rovnoramenný pravoúhlý trojúhelník s přeponou XY.

41. Je dána úsečka AA_1; $|AA_1| = 4.5cm$. Sestrojte všechny pravoúhlé trojúhelníky ABC s pravým úhlem při vrcholu C, v nichž AA_1 je těžnicí t_a a $t_b = 6cm$.

Posunutí

42. Jsou dány přímka p a dvě nesoustředné kružnice $k_1(S_1, r_1)$, $k_2(S_2, r_2)$. Veďte přímku rovnoběžnou s přímkou p tak, aby na ní kružnice k_1, k_2 vytínaly shodné tětivy.

43. Sestrojte čtyřúhelník $ABCD$, jehož úhlopříčky svírají pravý úhel, jsou-li dány velikosti úhlopříček $|AC| = e$, $|BD| = f$ a velikosti úhlů $|\angle ABC| = 90°$, $|\angle ADC| = \delta$.

44. Sestrojte lichoběžník, jsou-li dány velikosti jeho stran a, b, c, d.

45. Sestrojte čtyřúhelník $ABCD$, jsou-li dány velikosti jeho stran $|AB| = a, |BC| = b, |CD| = c, |DA| = d$ a odchylka ω přímek AD, BC.

46. Sestrojte rovnoběžník, jsou-li dány délky jeho stran a velikost úhlu jeho úhlopříček.

47. Sestrojte lichoběžník $ABCD$, jsou-li dány délky obou jeho základen a, c a obou jeho úhlopříček e, f.

48. Jsou dány dvě různoběžky a, b a úsečka délky r. Sestrojte všechny kružnice k se středem na přímce a, poloměrem r, které na přímce b vytínají tětivu délky r.

Posunuté zrcadlení

49. Jsou dány dvě různoběžky a, b a na nich dva body $A \neq B$ (A na a, B na b). Určete bod X na a a bod Y na b tak, aby platilo $|AX| = |BY|$ a dále aby:

a) $XY \| p$, kde p je daná přímka; [1]

b) $XY = d$, kde d je předem daná úsečka; [1]

c) střed úsečky XY ležel na dané přímce q. [1]

10 Grupa shodností eukleidovského prostoru

Věta 34. *Každou shodnost v rovině lze složit z nejvýše tří osových souměrností.*[12]

10.1 Skládání shodných zobrazení

(a) Přímou shodnost lze rozložit v sudý počet osových souměrností, nepřímou shodnost v lichý počet osových souměrností.

(b) Složíme-li dvě shodnosti přímé nebo dvě shodnosti nepřímé, dostaneme shodnost přímou; složíme-li shodnost přímou a nepřímou, vznikne shodnost nepřímá.

10.2 Grupa shodností v rovině

Poznatky získané řešením výše uvedených příkladů nasvědčují tomu, že *množina shodností* v rovině spolu *s operací skládání zobrazení* tvoří grupu. Některé podmnožiny množiny shodností navíc tvoří spolu s operací skládání zobrazení podgrupy.

PŘÍKLAD 10.1. *Ověřte následující tvrzení:*

(a) Všechny shodnosti v rovině tvoří grupu G_S.

(b) Všechny přímé shodnosti tvoří podgrupu G'_S grupy G_S.

(c) Množina všech translací doplněná identitou, tvoří grupu, která je podgrupou grupy přímých shodností.

(d) Množina všech translací a středových souměrností, doplněná identitou, tvoří podgrupu grupy G'_S.

PŘÍKLAD 10.2. *Trojúhelník ABC byl převeden otočením daného smyslu se středem S a úhlem velikosti $\omega = 120°$ v trojúhelník $A_1B_1C_1$, který byl dále převeden posunutím $\mathcal{T}(A_1 \to A_2)$ v trojúhelník $A_2B_2C_2$. Určete otočení, které převádí přímo $\triangle ABC$ v $\triangle A_2B_2C_2$.*

PŘÍKLAD 10.3. *Je dán rovnostranný trojúhelník ABC. Najděte všechny shodnosti, které převádějí tento trojúhelník do něho samého. Zkoumejte vlastnosti množiny těchto shodností spolu s operací skládání shodností.*

[12]viz též str. 78, věta 26

10.3 Klasifikace shodností roviny

Cílem klasifikace shodností v rovině (obecně afinních zobrazení v prostoru A_n) je získat úplný (vyčerpávající) přehled těchto zobrazení a jejich analytických vyjádření. Postupujeme od obecné podoby rovnice zobrazení. Z té analýzou všech možných konfigurací samodružných bodů a směrů, které toto zobrazení připouští, dostaneme úplný přehled všech jeho variant.

Myšlenka úplné klasifikace shodností: Klasifikace shodností roviny je založena na zkoumání možných samodružných bodů a směrů zobrazení, které je dáno rovnicí (soustavou lineárních rovnic)

$$f: \ X' = A \cdot X + B. \tag{90}$$

Tento postup si nejprve ilustrujeme řešením následujícího příkladu, poté provedeme obecnou klasifikaci shodností roviny E_2, viz str. 91, a trojrozměrného prostoru E_3, viz str. 96.

PŘÍKLAD 10.4. *Zjistěte, zda existuje shodnost E_2, při které se bod $K = [10; 0]$ zobrazí na počátek $K' = [0; 0]$ a bod $L = [25; 20]$ na bod $L' = [0; 25]$. V kladném případě napište rovnice tohoto zobrazení a najděte jeho samodružné body.*

Než začneme aplikovat níže uvedený postup, stojí za to si u takovýchto úloh ověřit, zda je vůbec splněna definice shodného zobrazení, tj. zda $|K'L'| = |KL|$.

Řešení v programu wxMaxima:

Definujeme obecnou podobu matic A, B z rovnice (90).

```
(%i30) A:matrix([a11,a12],[a21,a22]); b:matrix([b1],[b2]);
```

(%o30) $\begin{pmatrix} a11 & a12 \\ a21 & a22 \end{pmatrix}$

(%o31) $\begin{pmatrix} b1 \\ b2 \end{pmatrix}$

Do rovnice (90) dosadíme dané body a jejich obrazy, dostaneme dvojice rovnic `s1` a `s2`. Třetí skupinu rovnic `s3` dostaneme z podmínky $A^T \cdot A - I = 0$.

```
(%i32) s1:A.[10,0]+b-[0,0]; s2:A.[25,20]+b-[0,25];
       s3:transpose(A).A-ident(2);
```

(%o32) $\begin{pmatrix} b1 + 10\,a11 \\ b2 + 10\,a21 \end{pmatrix}$

(%o33) $\begin{pmatrix} b1 + 20\,a12 + 25\,a11 \\ b2 + 20\,a22 + 25\,a21 - 25 \end{pmatrix}$

(%o34) $\begin{pmatrix} a21^2 + a11^2 - 1 & a21\,a22 + a11\,a12 \\ a21\,a22 + a11\,a12 & a22^2 + a12^2 - 1 \end{pmatrix}$

Dohromady tak máme soustavu sedmi rovnic o šesti naznámých `a11, a12, a21, a22, b1, b2`.

```
(%i35) rov:[s1[1,1],s1[2,1],s2[1,1],s2[2,1],s3[1,1],s3[1,2],s3[2,2]];
```

(%o35) $[b1 + 10\,a11, b2 + 10\,a21, b1 + 20\,a12 + 25\,a11, b2 + 20\,a22 + 25\,a21 - 25, a21^2 + a11^2 - 1, a21\,a22 + a11\,a12, a22^2 + a12^2 - 1]$

Soustavu má dvě řešení (nejedná se o soustavu lineárních rovnic, proto může mít dvě řešení).

```
(%i36) res:solve(rov,[a11,a12,a21,a22,b1,b2]);
```

(%o36) $[[a11 = \frac{4}{5}, a12 = -\frac{3}{5}, a21 = \frac{3}{5}, a22 = \frac{4}{5}, b1 = -8, b2 = -6], [a11 = -\frac{4}{5}, a12 = \frac{3}{5}, a21 = \frac{3}{5}, a22 = \frac{4}{5}, b1 = 8, b2 = -6]]$

Dvěma řešením odpovídají dvě různé shodnosti. Zjistili jsme tedy, že existují dvě shodnosti, které převádějí body K, L na body K', L' (což se, vzhledem ke větě o určenosti shodného (afinního) zobrazení dalo čekat). Pokračujeme v řešení úlohy pro každou z těchto shodností zvlášť. Nejprve si připravíme matici `RovTr` pro zápis rovnic uvažovaných shodností (není nutnou součástí postupu řešení, jedná se jenom o usnadnění vizuální prezentace rovnic v programu).

```
(%i37) RovTr:matrix([x1=a11*x+a12*y+b1],[y1=a21*x+a22*y+b2]);
```

(%o37) $\begin{pmatrix} x1 = a12\,y + a11\,x + b1 \\ y1 = a22\,y + a21\,x + b2 \end{pmatrix}$

I. Shodnost daná rovnicemi

$$x1 = \frac{4\,x}{5} - \frac{3\,y}{5} - 8$$
$$y1 = \frac{3\,x}{5} + \frac{4\,y}{5} - 6$$

Definujeme matice `A1, B1` tohoto zobrazení a zapíšeme jeho rovnice.

```
(%i38) A1:ev(A,res[1]); B1:ev(b,res[1]);
```

(%o38) $\begin{pmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix}$

(%o39) $\begin{pmatrix} -8 \\ -6 \end{pmatrix}$

```
(%i40) R1:ev(RovTr,res[1]);
```

(%o40) $\begin{pmatrix} x1 = -\frac{3\,y}{5} + \frac{4\,x}{5} - 8 \\ y1 = \frac{4\,y}{5} + \frac{3\,x}{5} - 6 \end{pmatrix}$

Samodružné body najdeme řešením rovnice $X = A \cdot X + B$, pro snazší zpracování programem přepsané do tvaru $A \cdot X + B - X = 0$.

```
(%i41) RovSB1:A1.[x,y]+B1-[x,y]; solve([RovSB1[1,1],RovSB1[2,1]],[x,y]);
```

(%o41) $\begin{pmatrix} -\frac{3\,y}{5} - \frac{x}{5} - 8 \\ -\frac{y}{5} + \frac{3\,x}{5} - 6 \end{pmatrix}$

(%o42) $[[x = 5, y = -15]]$

Uvažované shodné zobrazení má tedy jediný samodružný bod $S = [5, -15]$.

Pro určení samodružných směrů řešíme charakteristickou rovnici (75) homomorfismu asociovaného s daným shodným zobrazením.

```
(%i43) CharA1:A1-%lambda*ident(2);
       CharR1:expand(determinant(CharA1))=0;
       solve(CharR1,%lambda);
```

(%o43) $\begin{pmatrix} \frac{4}{5} - \lambda & -\frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{4}{5} - \lambda \end{pmatrix}$

(%o44) $\lambda^2 - \frac{8\,\lambda}{5} + 1 = 0$

(%o45) $[\lambda = -\frac{3\,i - 4}{5}, \lambda = \frac{3\,i + 4}{5}]$

Charakteristická rovnice nemá reálné kořeny. To znamená, že uvažované shodné zobrazení nemá samodružné směry.

Protože uvažované zobrazení má právě jeden samodružný bod a nemá žádný samodružný směr, jedná se o OTOČENÍ.

II. Shodnost daná rovnicemi

$$x1 = -\frac{4\,x}{5} + \frac{3\,y}{5} + 8$$
$$y1 = \frac{3\,x}{5} + \frac{4\,y}{5} - 6$$

Definujeme matice `A2, B2` tohoto zobrazení a zapíšeme jeho rovnice.

```
(%i46) A2:ev(A,res[2]); B2:ev(b,res[2]);
```

(%o46) $\begin{pmatrix} -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix}$

(%o47) $\begin{pmatrix} 8 \\ -6 \end{pmatrix}$

```
(%i48) R2:ev(RovTr,res[2]);
```

(%o48) $\begin{pmatrix} x1 = \frac{3\,y}{5} - \frac{4\,x}{5} + 8 \\ y1 = \frac{4\,y}{5} + \frac{3\,x}{5} - 6 \end{pmatrix}$

Samodružné body najdeme řešením rovnice $X = A \cdot X + B$, pro snazší zpracování programem přepsané do tvaru $A \cdot X + B - X = 0$.

```
(%i49) RovSB2:A2.[x,y]+B2-[x,y]; solve([RovSB2[1,1],RovSB2[2,1]],[x,y]);
```

(%o49) $\begin{pmatrix} \frac{3\,y}{5} - \frac{9\,x}{5} + 8 \\ -\frac{y}{5} + \frac{3\,x}{5} - 6 \end{pmatrix}$

(%o50) []

Uvažované shodné zobrazení tedy nemá žádný samodružný bod.

Pro určení samodružných směrů řešíme charakteristickou rovnici (75) homomorfismu asociovaného s daným shodným zobrazením.

```
(%i51) CharA2:A2-%lambda*ident(2);
       CharR2:expand(determinant(CharA2))=0;
       solve(CharR2,%lambda);
```

(%o51) $\begin{pmatrix} -\lambda - \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{4}{5} - \lambda \end{pmatrix}$

(%o52) $\lambda^2 - 1 = 0$

(%o53) $[\lambda = -1, \lambda = 1]$

Charakteristická rovnice má dva reálné kořeny (vlastní čísla). Každému z nich odpovídá jeden vlastní (charakteristický) vektor určující samodružný směr. Postupně dosadíme získaná vlastní čísla λ do soustavy (její matice) (74) a řešíme.

```
(%i54) RovSS2:A2.[u,v]-[%lambda*u,%lambda*v];
```

(%o54) $\begin{pmatrix} \frac{3v}{5} - \lambda u - \frac{4u}{5} \\ -\lambda v + \frac{4v}{5} + \frac{3u}{5} \end{pmatrix}$

```
(%i55) RovSS21:ev(RovSS2,%lambda=-1);
       solve([RovSS21[1,1],RovSS21[2,1]],[u,v]);
```

(%o55) $\begin{pmatrix} \frac{3v}{5} + \frac{u}{5} \\ \frac{9v}{5} + \frac{3u}{5} \end{pmatrix}$ *solve : dependentequationseliminated* : (2)

(%o56) $[[u = -3\,\%r3, v = \%r3]]$

První samodružný směr je určen vektorem $\vec{u}_1 = (-3, 1)$.

```
(%i57) RovSS22:ev(RovSS2,%lambda=1);
       solve([RovSS22[1,1],RovSS22[2,1]],[u,v]);
```

(%o57) $\begin{pmatrix} \frac{3v}{5} - \frac{9u}{5} \\ \frac{3u}{5} - \frac{v}{5} \end{pmatrix}$ *solve : dependentequationseliminated* : (2)

(%o58) $[[u = \frac{\%r4}{3}, v = \%r4]]$

Druhý samodružný směr je určen vektorem $\vec{u}_2 = (1, 3)$.

Protože uvažované zobrazení nemá žádný samodružný bod a má dva (na sebe kolmé) samodružné směry, jedná se o POSUNUTÉ ZRCADLENÍ.

Klasifikace shodností roviny

Z podmínky $A^T \cdot A = E$ plyne, že afinní zobrazení určené rovnicemi

$$\begin{array}{rcrcrcr} x' & = & a_{11}x & + & a_{12}y & + & b_1 \\ y' & = & a_{21}x & + & a_{22}y & + & b_2, \end{array}$$

je shodností právě tehdy, když platí následující rovnosti:

$$\begin{aligned} a_{11}^2 + a_{21}^2 = a_{12}^2 + a_{22}^2 &= 1 \\ a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22} = a_{12}a_{11} + a_{22}a_{21} &= 0 \end{aligned}$$

Potom je zřejmé, že existuje úhel $\alpha \in \langle 0°; 360°)$ takový, že lze napsat

$$\begin{aligned} a_{11} &= \cos\alpha, \\ a_{21} &= \sin\alpha, \\ a_{12}\cos\alpha + a_{22}\sin\alpha &= 0, \\ a_{22} &= \varepsilon\cos\alpha, \\ a_{12} &= -\varepsilon\sin\alpha, \text{kde } \varepsilon = \pm 1. \end{aligned}$$

Hodnota ε určuje, zda se jedná o shodnost přímou ($\varepsilon = 1$) nebo nepřímou ($\varepsilon = -1$).

I. Přímé shodnosti

Každou přímou shodnost v rovině můžeme vyjádřit rovnicemi ve tvaru

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1' &=& x_1\cos\alpha &-& x_2\sin\alpha &+& b_1 \\ x_2' &=& x_1\sin\alpha &+& x_2\cos\alpha &+& b_2 \end{array}.$$

Samodružné body

Samodružné body přímé shodnosti jsou řešením soustavy rovnic

$$\begin{aligned} x_1(1-\cos\alpha) + x_2\sin\alpha &= b_1 \\ -x_1\sin\alpha + x_2(1-\cos\alpha) &= b_2. \end{aligned} \tag{91}$$

Nejprve nás bude zajímat přímá shodnost v rovině, která má právě jeden samodružný bod. Soustava (91) má právě jedno řešení, pokud je regulární, tj. pokud pro její determinant platí

$$\begin{vmatrix} (1-\cos\alpha), & \sin\alpha \\ -\sin\alpha, & (1-\cos\alpha) \end{vmatrix} \neq 0.$$

Po úpravě dostaneme

$$2(1-\cos\alpha) \neq 0,$$

což vede k podmínce

$$\cos\alpha \neq 1.$$

Tak dostáváme

1) OTOČENÍ (ROTACI).

Stačí volit počátek soustavy souřadné v onom jediném samodružném bodě a dostaneme známé vyjádření rotace kolem počátku o úhel α:

$$
\begin{aligned}
x_1' &= x_1 \cos\alpha - x_2 \sin\alpha \\
x_2' &= x_1 \sin\alpha + x_2 \cos\alpha
\end{aligned}
$$

Samodružné směry

Samodružné směry (tj. vektory těchto směrů) přímé shodnosti jsou **netriviálním** řešením soustavy homogenních rovnic

$$
\begin{aligned}
u_1(\lambda - \cos\alpha) + u_2 \sin\alpha &= 0 \\
-u_1 \sin\alpha + u_2(\lambda - \cos\alpha) &= 0.
\end{aligned} \tag{92}
$$

Ta má netriviální (tj. nekonečně mnoho) řešení právě tehdy, když je splněna charakteristická rovnice přímé shodnosti v rovině

$$
\begin{vmatrix} (\lambda - \cos\alpha), & \sin\alpha \\ -\sin\alpha, & (\lambda - \cos\alpha) \end{vmatrix} = 0. \tag{93}
$$

Úpravou (93) dostaneme rovnici

$$
(\lambda - \cos\alpha)^2 + \sin^2\alpha = 0,
$$

která je splněna za předpokladu, že $\sin\alpha = 0$ a zároveň $\cos\alpha = 1 = \lambda$ nebo $\cos\alpha = -1 = \lambda$. Pro $\cos\alpha = -1$ tak dostáváme

2) STŘEDOVOU SOUMĚRNOST

s analytickým vyjádřením

$$
\begin{aligned}
x_1' &= -x_1 + b_1 \\
x_2' &= -x_2 + b_2.
\end{aligned}
$$

Za podmínky, že $\cos\alpha = 1$ dostaneme, pro $b_1 = b_2 = 0$,

3) IDENTITU

$$
\begin{aligned}
x_1' &= x_1 \\
x_2' &= x_2
\end{aligned}
$$

a pro $b_1 \neq 0 \vee b_2 \neq 0$ dostáváme

4) POSUNUTÍ

$$
\begin{aligned}
x_1' &= x_1 + b_1 \\
x_2' &= x_2 + b_2.
\end{aligned}
$$

II. Nepřímé shodnosti

Každou nepřímou shodnost v rovině můžeme vyjádřit rovnicemi ve tvaru

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1' & = & x_1 \cos\alpha & + & x_2 \sin\alpha & + & b_1 \\ x_2' & = & x_1 \sin\alpha & - & x_2 \cos\alpha & + & b_2. \end{array}$$

Samodružné směry

K vyšetření nepřímých shodností použijeme samodružné směry. Řešením charakteristické rovnice

$$\begin{vmatrix} (\lambda - \cos\alpha), & -\sin\alpha \\ -\sin\alpha, & (\lambda + \cos\alpha) \end{vmatrix} = 0, \tag{94}$$

dostaneme podmínku

$$\lambda = \pm 1,$$

která odpovídá tomu, že uvažované zobrazení má dva navzájem kolmé samodružné směry. Jeden, pro $\lambda = 1$, se zachovává, druhý, pro $\lambda = -1$, se mění v opačný. Volme soustavu souřadnou tak, aby osa x měla směr odpovídající $\lambda = 1$. Směr osy y pak zřejmě odpovídá $\lambda = -1$. Potom je nepřímá shodnost popsána rovnicemi

$$\begin{array}{rcrcr} x_1' & = & x_1 & + & b_1 \\ x_2' & = & -x_2 & + & b_2. \end{array}$$

Pokud je $b_1 = 0$, má uvažované zobrazení **přímku samodružných bodů** a jedná se tedy o

5) OSOVOU SOUMĚRNOST

$$\begin{array}{rcrcr} x_1' & = & x_1 & & \\ x_2' & = & -x_2 & + & b_2. \end{array}$$

Pokud je ale $b_1 \neq 0$, má pouze **samodružnou přímku** a jedná se o

6) POSUNUTÉ ZRCADLENÍ.

10.4 Cvičení – Shodnosti v rovině

50. Určete parametr s tak, aby existovala shodnost roviny zobrazující body $[0,0]$, $[3,4]$ po řadě na body $[5,0]$, $[9,s]$. Napište rovnice tohoto zobrazení a souřadnice obrazu bodu $[5,0]$. **[2]**

51. Určete a, b, c tak, aby rovnice $x' = \dfrac{3}{4}x + by + 1, \quad y' = ax + cy - 1$ vyjadřovaly shodnost. **[3]**

52. Shodné zobrazení euklidovské roviny do euklidovského prostoru je dáno vzhledem ke kartézským soustavám souřadnic rovnicemi

a) $x' = x + \dfrac{1}{2}y + 1,\ y' = ax + \dfrac{1}{2}y - 1,\ z' = bx + cy + 3,$

b) $x' = x + by - 2,\ y' = \dfrac{1}{2}y + 1,\ z' = ax + cy - 3.$

Určete koeficienty a, b, c.

53. Najděte souřadnice obrazu bodu $B = [1,2]$ v otočení v E_2 kolem středu $S = [3,-4]$ o úhel $\alpha = 420°$. Napište rovnice této shodnosti.

54. Určete p, q tak, aby existovala shodnost zobrazující body $[3,0]$, $[1,2]$, $[-1,-1]$ po řadě na body $[1,4]$, $[p,2]$, $[2,q]$. Najděte samodružné body a směry tohoto zobrazení.

55. Napište rovnice středové souměrnosti v E_2 podle středu $S = [-4,5]$.

56. Napište rovnice shodnosti roviny E_2, která vznikne složením tří osových souměrností s osami o rovnicích: $x = 0,\ y = 0,\ x - 2y = 0$.

57. Rotace kolem bodu $S = [2;1]$ v E_2 zobrazuje bod $A = [1;1]$ na bod A'. Najděte souřadnice bodu A', jestliže pro úhel rotace α platí $\alpha = \frac{2}{3}\pi$.

58. Najděte souřadnice středu a úhel rotace, která je dána rovnicemi: $x' = \frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y + 1,\ y' = \frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y - 2$.

59. Najděte rovnice obrazu přímky p v rotaci v E_2 kolem středu $S = [-2;1]$ o úhel $\alpha = \frac{\pi}{6}$, jestliže $p : x - y + 1 = 0$.

10.5 Klasifikace shodností prostoru E_3

Věta 35. *Každé shodné zobrazení v prostoru* E_3 *lze složit z nejvýše čtyř rovinových souměrností.*

Některá shodná zobrazení v prostoru:

- Otočení kolem osy
- Posunutí
- Osová souměrnost
- Středová souměrnost
- Šroubový pohyb (torze)

Postup klasifikace shodností v trojrozměrném prostoru lze nečekaně zjednodušit. Vhodné umístění soustavy souřadnic nám dovolí využívat poznatky z klasifikace shodností v rovině.

Každé shodné zobrazení f v prostoru můžeme zapsat soustavou rovnic

$$\begin{array}{rrcrcrcrcr} f: & x_1' & = & a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & a_{13}x_3 & + & b_1 \\ & x_2' & = & a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & a_{23}x_3 & + & b_2 \\ & x_3' & = & a_{31}x_1 & + & a_{32}x_2 & + & a_{33}x_3 & + & b_3, \end{array}$$

kterou lze užitím matic přepsat do tvaru

$$f: \begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

a pak stručně vyjádřit rovnicí

$$f: \ X' = A \cdot X + B. \tag{95}$$

Stejně jako v rovině i v prostoru platí, že (95) je shodností právě tehdy, když je

$$A^T \cdot A = E, \tag{96}$$

Důležitou skutečností je, že charakteristická rovnice tohoto zobrazení, která se dá stručně zapsat ve tvaru

$$\det(A - \lambda E) = 0, \tag{97}$$

kde E je jednotková matice, je algebraickou rovnicí **třetího stupně** vzhledem k neznámé λ. Vzhledem k tomu, že imaginární kořeny se vyskytují vždy ve dvojicích (navzájem komplexně sdružených čísel), má algebraická rovnice třetího stupně vždy alespoň jeden kořen reálný. V případě rovnice (97) ho označme λ_0. Shodnost v E_3 má tak vždy alespoň jeden samodružný směr $\vec{u}$; $\vec{u}' = \lambda_0 \vec{u}$. V případě shodností se zachovává velikost vektoru, tj. platí $||\vec{u}'|| = ||\lambda_0 \vec{u}|| = ||\vec{u}||$. Potom je zřejmé, že hodnota λ_0 bude 1 nebo -1. Předpokládejme, že vektor $\vec{u}$ je jednotkový a volme soustavu souřadnou tak, aby měla osa z směr tohoto vektoru. Při takto zvolené soustavě souřadné se rovnice shodnosti zjednoduší na tvar

$$
\begin{array}{rcrcrcrcr}
x_1' & = & a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & & & + & b_1 \\
x_2' & = & a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & & & + & b_2 \\
x_3' & = & & & & \pm & x_3 & + & b_3.
\end{array}
$$

Potom je požadavek, aby byla matice tohoto zobrazení

$$
\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \pm 1 \end{bmatrix}
$$

ortonormální, splněn právě tehdy, když je ortonormální matice

$$
\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}.
$$

To je ale úloha, kterou jsme řešili při klasifikaci shodností v rovině. Víme tedy, že při vhodné volbě os x, y připadají v úvahu následující možnosti, jak může tato matice vypadat:

$$
\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}; \text{ pro } \sin\alpha \neq 0.
$$

Ke každé z těchto matic existují dvě soustavy rovnic (protože uvažujeme $\pm z$). Posouzením množin samodružných bodů příslušných zobrazení a vhodnými volbami soustavy souřadné se dobereme k výsledné klasifikaci:

1) IDENTITA ($b_1 = b_2 = b_3 = 0$) nebo POSUNUTÍ

$$
\begin{array}{rcrcr}
x_1' & = & x_1 & + & b_1 \\
x_2' & = & x_2 & + & b_2 \\
x_3' & = & x_3 & + & b_3.
\end{array}
$$

2) SOUMĚRNOST PODLE ROVINY ($b_1 = b_2 = 0$) nebo

SOUMĚRNOST PODLE ROVINY složená s POSUNUTÍM podél této roviny

$$\begin{aligned} x_1' &= x_1 + b_1 \\ x_2' &= x_2 + b_2 \\ x_3' &= -x_3 + b_3. \end{aligned}$$

3) SOUMĚRNOST PODLE OSY rovnoběžné se z ($b_3 = 0$) nebo

SOUMĚRNOST PODLE OSY rovnoběžné se z složená s POSUNUTÍM podél této osy

$$\begin{aligned} x_1' &= -x_1 + b_1 \\ x_2' &= -x_2 + b_2 \\ x_3' &= x_3 + b_3. \end{aligned}$$

4) STŘEDOVÁ SOUMĚRNOST

$$\begin{aligned} x_1' &= -x_1 + b_1 \\ x_2' &= -x_2 + b_2 \\ x_3' &= -x_3 + b_3. \end{aligned}$$

5) OTOČENÍ kolem osy rovnoběžné se z ($b_3 = 0$) nebo

OTOČENÍ kolem osy rovnoběžné se z složené s POSUNUTÍM podél této osy

$$\begin{aligned} x_1' &= x_1 \cos\alpha - x_2 \sin\alpha + b_1 \\ x_2' &= x_1 \sin\alpha + x_2 \cos\alpha + b_2 \\ x_3' &= x_3 + b_3. \end{aligned}$$

6) OTOČENÍ kolem osy rovnoběžné se z složené se SOUMĚRNOSTÍ podle roviny kolmé k této ose

$$\begin{aligned} x_1' &= x_1 \cos\alpha - x_2 \sin\alpha + b_1 \\ x_2' &= x_1 \sin\alpha + x_2 \cos\alpha + b_2 \\ x_3' &= -x_3 + b_3. \end{aligned}$$

Poznámky.

1. Každá přímá shodnost v prostoru se dá složit z otočení kolem přímky a posunutí podél této přímky. Potom můžeme říci, že každá dvě shodná tělesa v prostoru můžeme ztotožnit posunutím, otočením nebo šroubovým pohybem.

2. Nepřímá shodnost se dostane z přímé přidáním souměrnosti podle roviny.

10.6 Cvičení – Shodnosti prostoru E_3

60. Ověřte, že rovnicemi

$$\begin{aligned}
x' &= \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}y + \frac{2}{3}z + \frac{2}{3} \\
y' &= \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}y - \frac{2}{3}z - \frac{2}{3} \\
z' &= -\frac{2}{3}x - \frac{2}{3}y - \frac{1}{3}z + \frac{2}{3}
\end{aligned}$$

je dáno shodné zobrazení E_3 na sebe, najděte jeho samodružné body a směry.

61. Napište rovnice posunutí v E_3, v němž se bod $M = [-2, 3, 1]$ zobrazí na bod $M' = [5, 0, -4]$. Najděte souřadnice obrazu bodu $A = [1, 1, 1]$ v tomto posunutí.

10.7 Shodná zobrazení v prostoru E_n

Věta 36. *Ke každé shodnosti f v E_n existuje k souměrností podle nadrovin tak, že f je jejich složením, $k < n + 2$.*