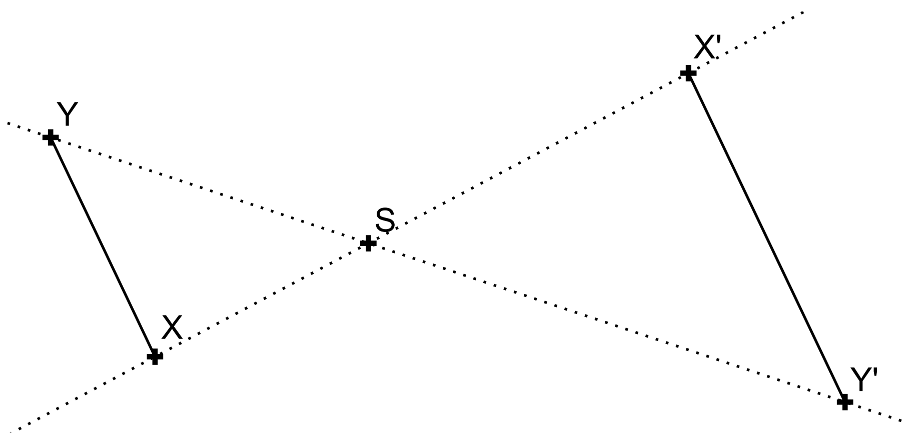
12 Stejnolehlost

Patří mezi tzv. homotetie, tj. afinní zobrazení, která mají všechny směry samodružné.

Definice 25. *Budiž dán bod S a reálné číslo κ (různé od 0 a 1).* **Stejnolehlost** $\mathrm{H}(S;\kappa)$ *se středem S a koeficientem κ je zobrazení, které každému bodu X roviny přiřadí bod X' tak, že*

$$\overrightarrow{SX'} = \kappa\overrightarrow{SX}.$$



Obrázek 47: Stejnolehlost $H(S,\kappa = -1.5)$

Poznámka. Stejnolehlost můžeme definovat i více popisně: *Budiž dán bod S a reálné číslo κ (různé od 0 a 1).* **Stejnolehlost** $\mathrm{H}(S;\kappa)$ *se středem S a koeficientem κ je zobrazení, které každému bodu X roviny přiřadí bod X' tímto způsobem:*

1. Pro $X \equiv S$ je $X' \equiv X$,

2. Pro $X \not\equiv S$ je $|X'S| = |\kappa| \cdot |XS|$,

pro $\kappa > 0$ leží X' leží na polopřímce $\overrightarrow{SX}$ a

pro $\kappa < 0$ leží X' leží na polopřímce opačné k $\overrightarrow{SX}$.

Poznámka. Zobrazení inverzní k stejnolehlosti $\mathrm{H}(S;\kappa)$ je stejnolehlost $\mathrm{H}^{-1}\left(S;\dfrac{1}{\kappa}\right)$.

Základní vlastnosti stejnolehlosti $H(S,\kappa)$:

1. Obrazem přímky je přímka s ní rovnoběžná.

2. Obrazem úsečky AB je úsečka $A'B'$; $\quad |A'B'| = |\kappa| \cdot |AB|$.

3. Obrazem polopřímky je polopřímka s ní souhlasně ($\kappa > 0$) nebo nesouhlasně ($\kappa < 0$) rovnoběžná .

4. Obrazem úhlu $\angle AVB$ je úhel $\angle A'V'B'$; $\quad |\angle A'V'B'| = |\angle AVB|$.

PŘÍKLAD 12.1. *Jsou dány dva různé body A, B a reálné číslo $\lambda \neq 0, 1$. Najděte na přímce AB bod C tak, aby platilo $(ABC) = \lambda$.*

12.1 Analytické vyjádření stejnolehlosti

Rovnice stejnolehlosti $\mathrm{H}(S;\kappa)$: $\quad H : X' = \kappa X + (1-\kappa)S.$

PŘÍKLAD 12.2. *Napište rovnice stejnolehlosti afinní roviny $\mathbf{A}_2$, která zobrazuje bod $B = [2, 0, -1]$ na bod $C = [0, 1, 3]$ a má koeficient $\kappa = -2$. Najděte souřadnice jejího středu.*

Řešení v programu wxMaxima:

```
(%i1) B:[2,0,-1]$ C:[0,1,3]$ S:[s1,s2,s3]$
(%i4) H:C-S=-2*(B-S);
```

(%o4) $[-s1, 1-s2, 3-s3] = [-2\,(2-s1)\,, 2\,s2, -2\,(-s3-1)]$

```
(%i5) res:solve(lhs(H)-rhs(H),[s1,s2,s3])[1];
```

(%o5) $[s1 = \frac{4}{3}, s2 = \frac{1}{3}, s3 = \frac{1}{3}]$

```
(%i6) S:ev(S,res);
```

(%o6) $[\frac{4}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}]$

12.2 Skládání stejnolehlostí

Věta 47 (O skládání stejnolehlosti a translace)**.** *Zobrazení složené ze stejnolehlosti $\mathrm{H}(S;\kappa)$ a translace $X' = X + \vec{t}$ je stejnolehlost $\mathrm{H}'(Q;\kappa)$, kde $Q = S + \dfrac{1}{1-\kappa}\vec{t}$.*

Věta 48 (O skládání stejnolehlostí)**.** *Složením dvou stejnolehlostí* $H_1(S_1, \kappa_1)$, $H_2(S_2, \kappa_2)$ *vznikne*

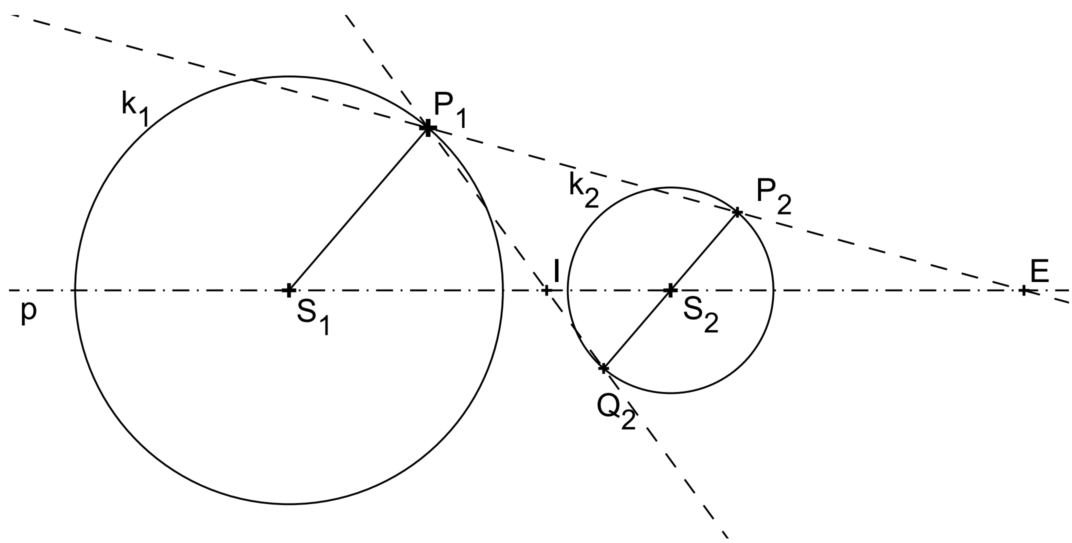
1. IDENTITA, jestliže $\kappa_1 \kappa_2 = 1$ *a* $S_1 = S_2$,

2. POSUNUTÍ, jestliže $\kappa_1 \kappa_2 = 1$ *a* $S_1 \neq S_2$,

3. STEJNOLEHLOST $H(S, \kappa)$ *s koeficientem* $\kappa = \kappa_1 \kappa_2$*, jestliže* $\kappa_1 \kappa_2 \neq 1$*. Přitom, pro* $S_1 = S_2$ *je také* $S = S_1 = S_2$*, pro* $S_1 \neq S_2$ *leží bod* S *na přímce* $S_1 S_2$*.*

12.3 Stejnolehlost kružnic

Pro dvě kružnice $k_1(S_1; r_1)$, $k_2(S_2; r_2)$ s různými poloměry existují právě dvě stejnolehlosti, které převádějí kružnici k_1 do kružnice k_2: $\mathrm{H}_1(E, r_2/r_1)$ a $\mathrm{H}_2(I, -r_2/r_1)$ (Bod E se někdy označuje jako „vnější střed stejnolehlosti“, bod I potom jako „vnitřní střed stejnolehlosti“.). Jestliže se kružnice dotýkají v bodě T, je $T = I$ v případě vnějšího dotyku a $T = E$ v případě vnitřního dotyku kružnic.



Obrázek 48: Stejnolehlost kružnic

PŘÍKLAD 12.3. *Je dána kružnice* k*, přímka* p*, která je vnější přímkou kružnice* k*, a bod* $A \in p$*. Sestrojte všechny kružnice, které se dotýkají přímky* p *v bodě* A *a kružnice* k*.*

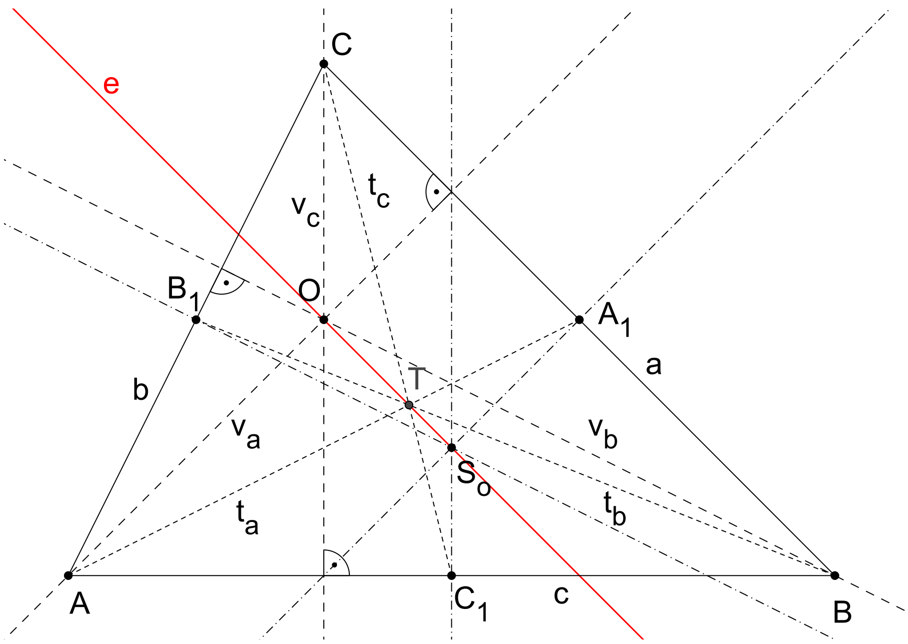
PŘÍKLAD 12.4. *Jsou dány dvě různoběžky* a, b *a bod* M*, který leží uvnitř jednoho jejich úhlu. Sestrojte všechny kružnice, které procházejí bodem* M *a dotýkají se přímek* a, b*.*

PŘÍKLAD 12.5. *Jsou dány dvě různoběžky* m, n *a kružnice* k *ležící uvnitř jednoho jejich úhlu. Sestrojte všechny kružnice, které se dotýkají přímek* m, n *i kružnice* k*.*

PŘÍKLAD 12.6. (Eulerova přímka) *V trojúhelníku ABC označme T těžiště, V průsečík výšek a S střed kružnice trojúhelníku opsané. Máme dokázat, že buď všechny tři body splynou v jediný, nebo jsou navzájem různé a leží na jedné přímce (Eulerova přímka) tak, že platí $(S, V; T) = -\frac{1}{2}$.*

Eulerova přímka

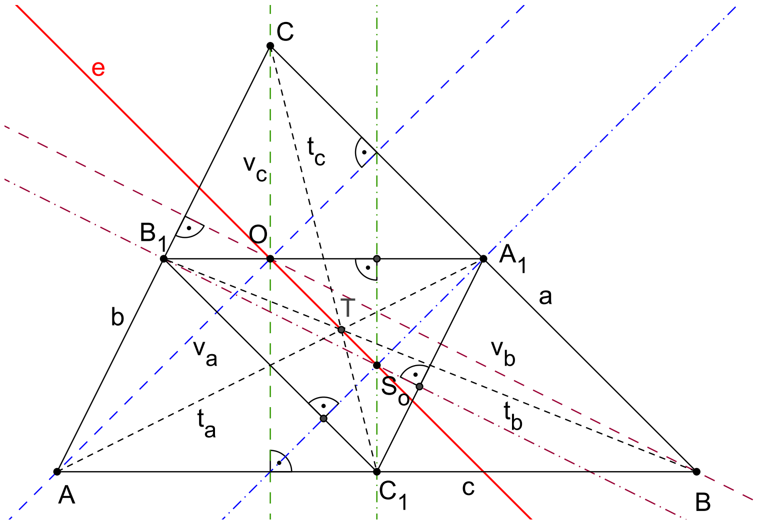
V trojúhelníku ABC označme T těžiště, O průsečík výšek a S_o střed kružnice trojúhelníku opsané. Potom buď všechny tyto tři body splývají v jediný, nebo jsou navzájem různé a leží na společné přímce tak, že platí $(S_oOT) = -\dfrac{1}{2}$. Tuto přímku nazýváme *Eulerova přímka*, viz Obr. 60.



Obrázek 49: Eulerova přímka

K důkazu výše uvedeného tvrzení využijeme stejnolehlost $H(T, -\dfrac{1}{2})$. Z Obr. 61 je patrné, že v této stejnolehlosti se $\triangle ABC$ zobrazí na $\triangle A_1B_1C_1$. Protože výškami (výšky teď chápeme jako přímky) $\triangle A_1B_1C_1$ jsou osy stran původního $\triangle ABC$, můžeme říci, že výšky trojúhelníku ABC se ve stejnolehlosti $H(T, -\dfrac{1}{2})$ zobrazí na osy jeho stran. Potom se ale průsečík výšek O zobrazí na průsečík os stran (tj. střed kružnice opsané $\triangle ABC$) S_o. Z vlastností stejnolehlosti plyne, že příslušné tři body O, S_o, T leží v přímce a platí pro ně $(S_oOT) = -\dfrac{1}{2}$.

Konstrukce Eulerovy přímky a její souvislost s kružnicí devíti bodů (viz str. 121) je znázorněna v apletu *„Eulerova přímka. Kružnice devíti bodů."*



Obrázek 50: $H(T, -\frac{1}{2}) : \triangle ABC \to \triangle A_1B_1C_1$

PŘÍKLAD 12.7. (Kružnice devíti bodů, též Feuerbachova či Eulerova kružnice) *V trojúhelníku ABC označme V průsečík výšek, S střed kružnice opsané, C_1, A_1, B_1 středy stran AB, BC, CA. Nechť k_0 je kružnice procházející body A_1, B_1, C_1. Dokažte:*

1) Na kružnici k_0 leží též paty A_0, B_0, C_0 výšek v_a, v_b, v_c a středy úseček AV, BV, CV.

2) Střed kružnice k_0 je středem úsečky SV, pokud $S \not\equiv V$; pokud je $S \equiv V$ splyne střed k_0 s bodem S.

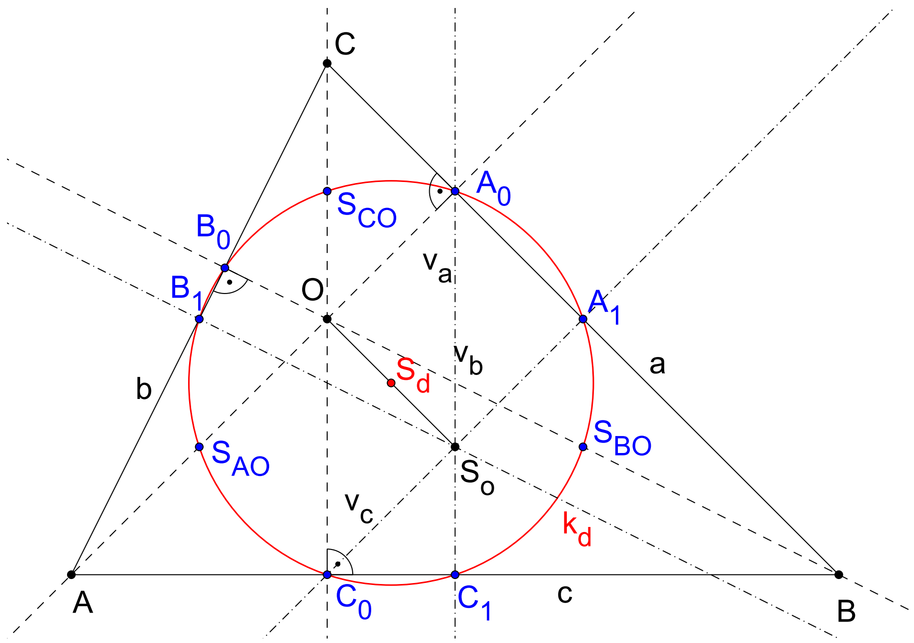
3) Poloměr kružnice k_0 je roven polovině poloměru kružnice trojúhelníku opsané.

Kružnice devíti bodů

V trojúhelníku ABC označme O průsečík výšek, S_o střed kružnice opsané, C_1, A_1, B_1 středy stran AB, BC a CA. Jestliže k_d je kružnice procházející body A_1, B_1 a C_1, potom na ni leží také paty A_0, B_0, C_0 výšek v_a, v_b, v_c a středy úseček AO, BO, CO. Tato kružnice se nazývá *kružnice devíti bodů* (též *Feuerbachova* či *Eulerova kružnice*), viz Obr. 59

Střed kružnice k_d je středem úsečky S_oO, její poloměr je roven polovině poloměru kružnice trojúhelníku ABC opsané.

Konstrukce kružnice devíti bodů a její souvislost s Eulerovou přímkou (viz str. 122) je znázorněna v apletu *„Eulerova přímka. Kružnice devíti bodů.“*



Obrázek 51: Kružnice devíti bodů

PŘÍKLAD 12.8. *Platí tato věta: Jsou-li dány dvě rovnoběžné úsečky různých délek, existují právě dvě stejnolehlosti, které zobrazí první úsečku na druhou. Dokážete je vždy najít?*

12.4 Mongeova věta

Jsou-li dány tři různé kružnice v rovině, vnitřní a vnější středy příslušející každým dvěma z nich jsou dohromady spjaty zajímavými geometrickými vztahy, viz Obr. 52. Ty jsou předmětem *Mongeovy věty.*

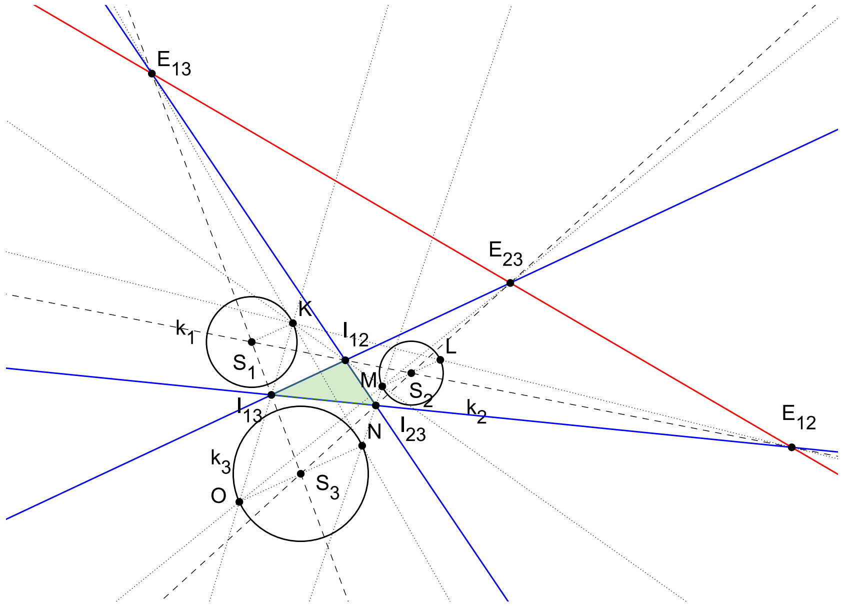
Věta 49 (Mongeova věta)**.** *Jsou-li k_1, k_2, k_3 tři kružnice, které mají různé poloměry a jejichž středy neleží v přímce, platí pro vnější a vnitřní středy stejnolehlostí každých dvou z nich následující vztahy:*

i) Všechny tři vnější středy stejnolehlosti E_{12}, E_{13}, E_{23} leží v přímce.

ii) Každé dva vnitřní středy stejnolehlosti a jeden vnější leží v přímce.

iii) Tři vnitřní středy stejnolehlosti I_{12}, I_{13}, I_{23} neleží v přímce.

Důkaz. V důkazu využijeme tvrzení věty 48, že složením stejnolehlostí s různými středy vznikne pro $\kappa_1\kappa_2 \neq 1$ stejnolehlost, jejíž střed leží na přímce určené středy těchto stejnolehlostí. Pak už stačí mezi danými třemi kružnicemi najít tři stejnolehlosti takové, že jedna z nich je složením zbývajících dvou. Dynamický GeoGebra aplet k důkazu je na adrese `https://www.geogebra.org/m/osR9mHs8`. □



Obrázek 52: Mongeova věta o třech kružnicích v rovině

12.5 Cvičení – Stejnolehlost

62. Do půlkruhu s průměrem AB vepište čtverec $KLMN$ tak, aby strana KL ležela na úsečce AB a další dva vrcholy M, N na dané půlkružnici.

63. Je dána přímka p, kružnice k a bod A. Sestrojte všechny úsečky XY tak, aby platilo: $X \in p$, $Y \in k$, $A \in XY$, $|AY| = 3|AX|$.

64. Jsou dány dvě různoběžky a, b a kružnice k tak, že a je sečnou a b je vnější přímkou kružnice k. Sestrojte všechny kružnice, které se dotýkají přímek a, b i kružnice k.

65. Sestrojte trojúhelník ABC, je-li dáno:

a) $v_a = 5cm$, $a : b : c = 2 : 3 : 4$,

b) α, β, v_c,

c) α, β, t_c,

d) $a : b = 3 : 5$, $\gamma = 60°$, $t_c = 6cm$.

Stejnolehlost – Úlohy na domácí přípravu

66. Určete p tak, aby existovala stejnolehlost se středem $[3, 2]$, zobrazující bod $[1, 4]$ na bod $[2, p]$. Napište rovnice této stejnolehlosti. **[2]**

67. Je dána kružnice k a bod M uvnitř této kružnice. Sestrojte všechny tětivy kružnice, které jsou bodem M rozděleny na části v poměru $2 : 3$. **[1]**

68. Narýsujte libovolný trojúhelník ABC. Uvnitř strany AC sestrojte bod X a uvnitř strany BC bod Y tak, aby platilo $|AX| = |XY|$ a $XY \parallel AB$. **[2]**