Věta 29 (O skládání stejnolehlostí)**.** *Složením dvou stejnolehlostí* $H_1(S_1, \kappa_1)$, $H_2(S_2, \kappa_2)$ *vznikne*

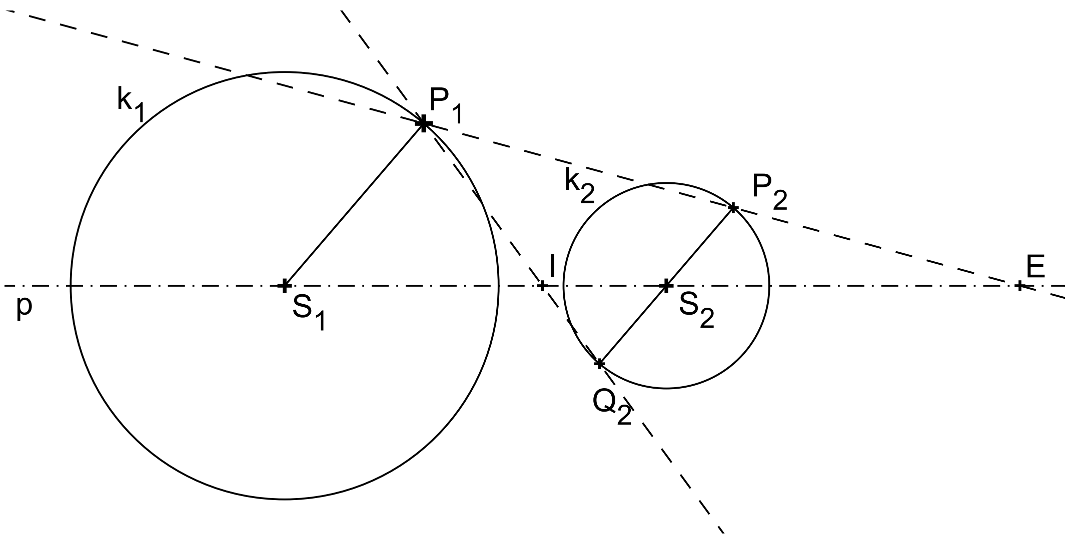
1. IDENTITA, jestliže $\kappa_1\kappa_2 = 1$ *a* $S_1 = S_2$,

2. POSUNUTÍ, jestliže $\kappa_1\kappa_2 = 1$ *a* $S_1 \neq S_2$,

3. STEJNOLEHLOST $H(S, \kappa)$ *s koeficientem* $\kappa = \kappa_1\kappa_2$, *jestliže* $\kappa_1\kappa_2 \neq 1$. *Přitom, pro* $S_1 = S_2$ *je také* $S = S_1 = S_2$, *pro* $S_1 \neq S_2$ *leží bod* S *na přímce* S_1S_2.

5.3 Stejnolehlost kružnic

Pro dvě kružnice $k_1(S_1; r_1)$, $k_2(S_2; r_2)$ s různými poloměry existují právě dvě stejnolehlosti, které převádějí kružnici k_1 do kružnice k_2: $\mathrm{H}_1(E, r_2/r_1)$ a $\mathrm{H}_2(I, -r_2/r_1)$ (Bod E se někdy označuje jako „vnější střed stejnolehlosti“, bod I potom jako „vnitřní střed stejnolehlosti“.). Jestliže se kružnice dotýkají v bodě T, je $T = I$ v případě vnějšího dotyku a $T = E$ v případě vnitřního dotyku kružnic.



Obrázek 20: Stejnolehlost kružnic

Věta 30 (Mongeova věta)**.** *Jsou-li* k_1, k_2, k_3 *tři kružnice, které mají různé poloměry a jejichž středy neleží v přímce, platí pro vnější a vnitřní středy stejnolehlostí každých dvou z nich následující vztahy:*

i) Všechny tři vnější středy stejnolehlosti E_{12}, E_{13}, E_{23} *leží v přímce.*

ii) Každé dva vnitřní středy stejnolehlosti a jeden vnější leží v přímce.

iii) Tři vnitřní středy stejnolehlosti I_{12}, I_{13}, I_{23} *neleží v přímce.*

PŘÍKLAD 5.3. *Je dána kružnice k, přímka p, která je vnější přímkou kružnice k, a bod $A \in p$. Sestrojte všechny kružnice, které se dotýkají přímky p v bodě A a kružnice k.*

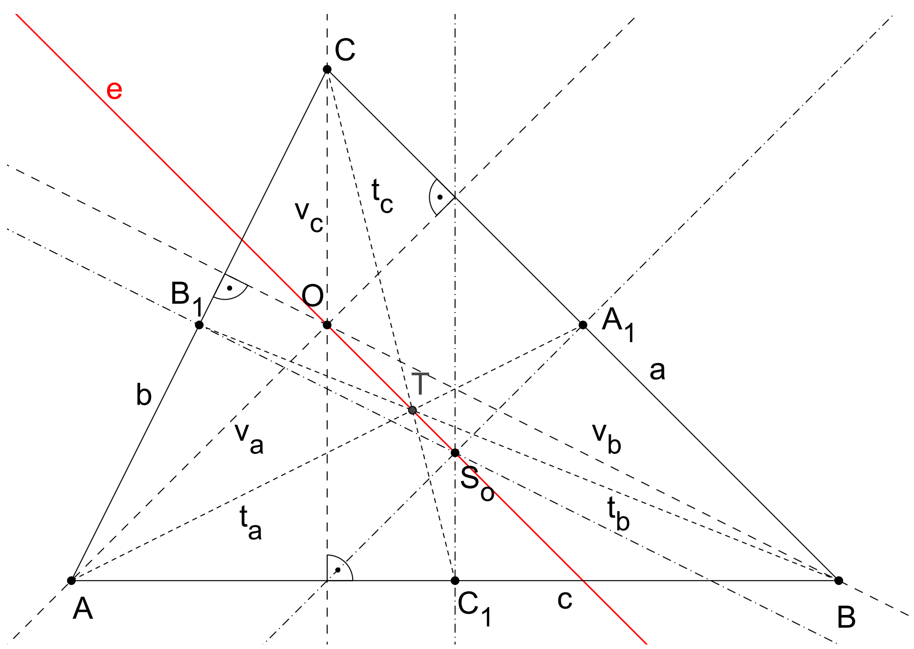
PŘÍKLAD 5.4. *Jsou dány dvě různoběžky a, b a bod M, který leží uvnitř jednoho jejich úhlu. Sestrojte všechny kružnice, které procházejí bodem M a dotýkají se přímek a, b.*

PŘÍKLAD 5.5. *Jsou dány dvě různoběžky m, n a kružnice k ležící uvnitř jednoho jejich úhlu. Sestrojte všechny kružnice, které se dotýkají přímek m, n i kružnice k.*

PŘÍKLAD 5.6. (Eulerova přímka) *V trojúhelníku ABC označme T těžiště, V průsečík výšek a S střed kružnice trojúhelníku opsané. Máme dokázat, že buď všechny tři body splynou v jediný, nebo jsou navzájem různé a leží na jedné přímce (Eulerova přímka) tak, že platí $(S, V; T) = -\frac{1}{2}$.*

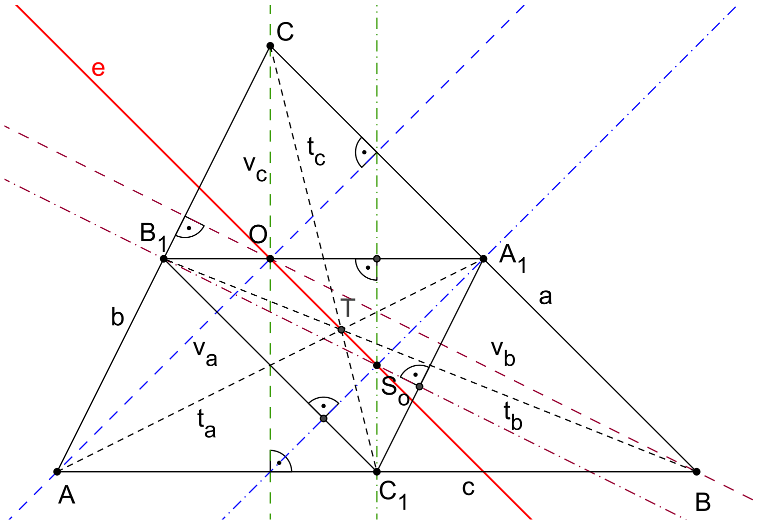
Eulerova přímka

V trojúhelníku ABC označme T těžiště, O průsečík výšek a S_o střed kružnice trojúhelníku opsané. Potom buď všechny tyto tři body splývají v jediný, nebo jsou navzájem různé a leží na společné přímce tak, že platí $(S_oOT) = -\dfrac{1}{2}$. Tuto přímku nazýváme *Eulerova přímka*, viz Obr. 21.



Obrázek 21: Eulerova přímka

K důkazu výše uvedeného tvrzení využijeme stejnolehlost $H(T, -\dfrac{1}{2})$. Z Obr. 22 je patrné, že v této stejnolehlosti se $\triangle ABC$ zobrazí na $\triangle A_1B_1C_1$. Protože výškami



Obrázek 22: $H(T, -\frac{1}{2}) : \triangle ABC \to \triangle A_1B_1C_1$

(výšky teď chápeme jako přímky) $\triangle A_1B_1C_1$ jsou osy stran původního $\triangle ABC$, můžeme říci, že výšky trojúhelníku ABC se ve stejnolehlosti $H(T, -\frac{1}{2})$ zobrazí na osy jeho stran. Potom se ale průsečík výšek O zobrazí na průsečík os stran (tj. střed kružnice opsané $\triangle ABC$) S_o. Z vlastností stejnolehlosti plyne, že příslušné tři body O, S_o, T leží v přímce a platí pro ně $(S_oOT) = -\frac{1}{2}$.

Konstrukce Eulerovy přímky a její souvislost s kružnicí devíti bodů (viz str. 32) je znázorněna v apletu *„Eulerova přímka. Kružnice devíti bodů.“*

PŘÍKLAD 5.7. (Kružnice devíti bodů, též Feuerbachova či Eulerova kružnice) *V trojúhelníku ABC označme V průsečík výšek, S střed kružnice opsané, C_1, A_1, B_1 středy stran AB, BC, CA. Nechť k_0 je kružnice procházející body A_1, B_1, C_1. Dokažte:*

1) Na kružnici k_0 leží též paty A_0, B_0, C_0 výšek v_a, v_b, v_c a středy úseček AV, BV, CV.

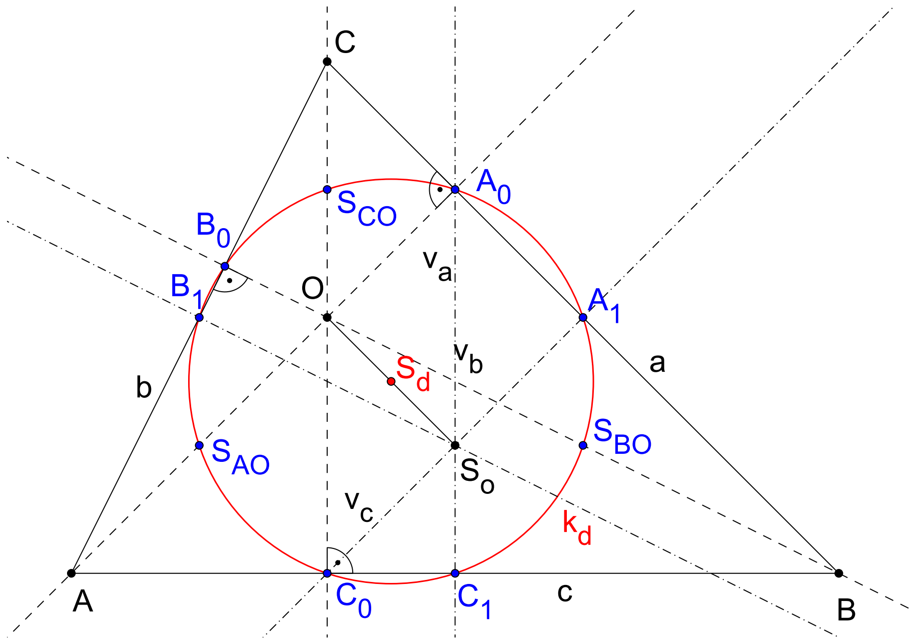
2) Střed kružnice k_0 je středem úsečky SV, pokud $S \not\equiv V$; pokud je $S \equiv V$ splyne střed k_0 s bodem S.

3) Poloměr kružnice k_0 je roven polovině poloměru kružnice trojúhelníku opsané.

Kružnice devíti bodů

V trojúhelníku ABC označme O průsečík výšek, S_o střed kružnice opsané, C_1, A_1, B_1 středy stran AB, BC a CA. Jestliže k_d je kružnice procházející body A_1, B_1 a C_1, potom na ni leží také paty A_0, B_0, C_0 výšek v_a, v_b, v_c a středy úseček AO, BO, CO. Tato kružnice se nazývá *kružnice devíti bodů* (též *Feuerbachova* či *Eulerova kružnice*), viz Obr. 23

Střed kružnice k_d je středem úsečky S_oO, její poloměr je roven polovině poloměru kružnice trojúhelníku ABC opsané.



Obrázek 23: Kružnice devíti bodů

Konstrukce kružnice devíti bodů a její souvislost s Eulerovou přímkou (viz str. 31) je znázorněna v apletu *„Eulerova přímka. Kružnice devíti bodů.“*

PŘÍKLAD 5.8. *Platí tato věta: Jsou-li dány dvě rovnoběžné úsečky různých délek, existují právě dvě stejnolehlosti, které zobrazí první úsečku na druhou. Dokážete je vždy najít?*