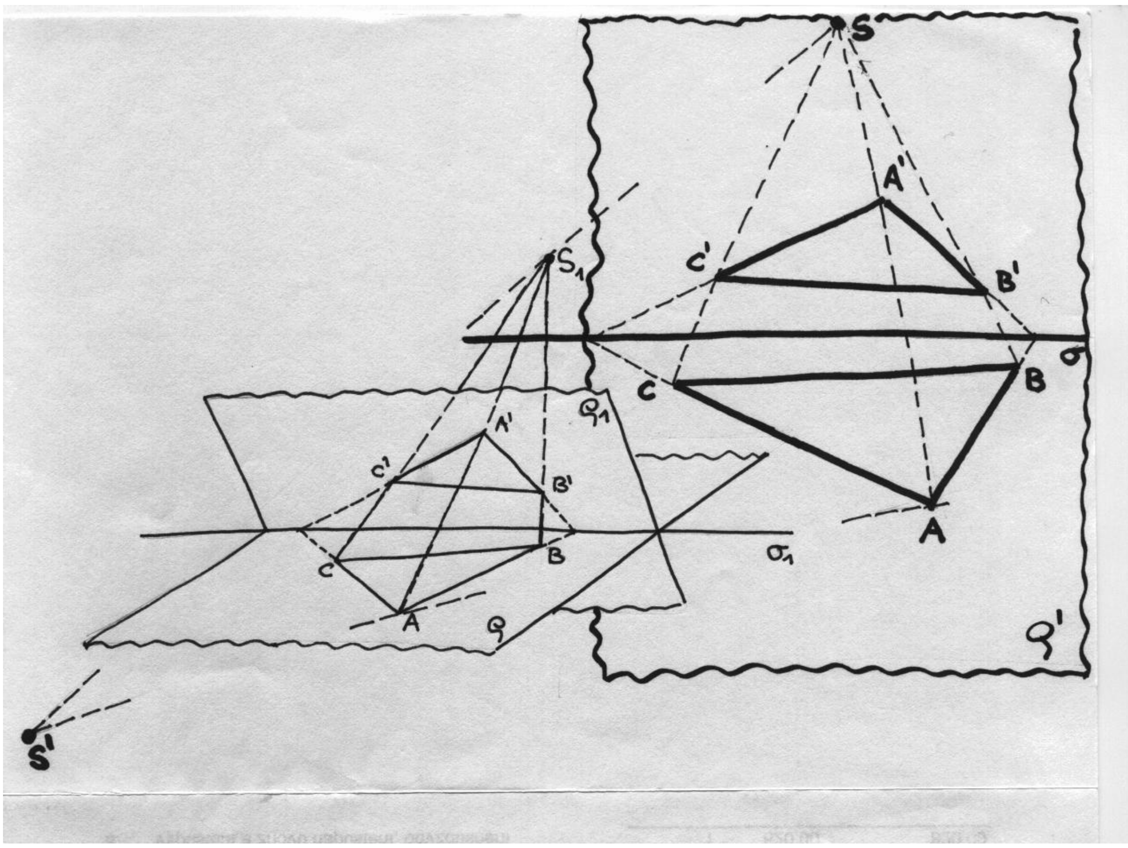
20 Středová kolineace

Jak naznačuje Obr. 99, středová kolineace (se středem S), jako vzájemně jednoznačné zobrazení $\bar{E}_2$ na sebe, je výsledkem středového průmětu (se středem S') středového promítání (se středem S_1) mezi dvěma různoběžnými rovinami v prostoru E_3.



Obrázek 99: Vznik středové kolineace

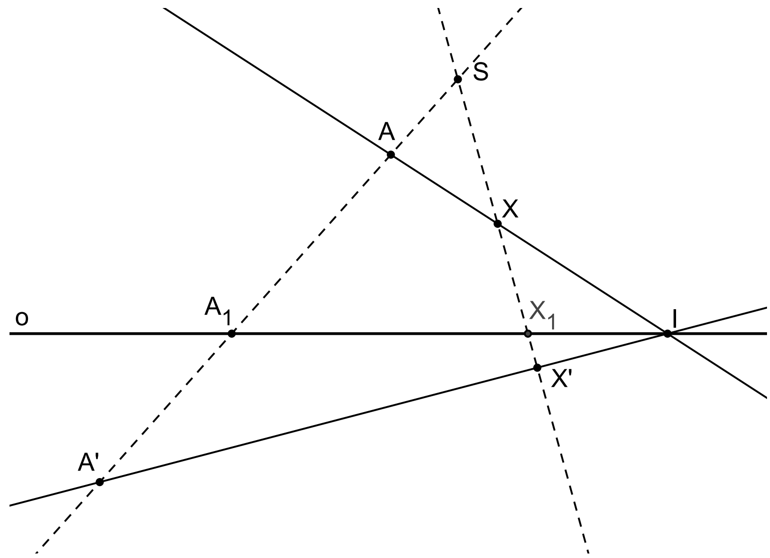
Definice 35 (Středová kolineace). *Středovou kolineací (též perspektivní kolineací, osovou kolineací ci homologií) rozumíme vzájemně jednoznačné zobrazení roviny $\bar{E}_2$ těchto vlastností (viz Obr. 100):*

1. *Spojnice odpovídajících si bodů procházejí pevným bodem* - **středem kolineace**.

2. *Průsečík odpovídajících si přímek leží na pevné přímce* - **ose kolineace**.

3. *Incidence se zachovává.*

Poznámka. Tři kolineární body (tj. tři body na přímce) přejdou tímto zobrazením opět v body kolineární - proto KOLINEACE.



Obrázek 100: Zobrazení bodu ve středové kolineaci se středem S a s osou o

Poznámka. Středová kolineace je určena:

- osou o (samodružná přímka)

- středem S (samodružný bod)

- dvojicí odpovídajících si bodů $A,\ A'$; $S \in AA'$ nebo přímek $p,\ p'$; $S \notin p, p'$.

PŘÍKLAD 20.1. *Ve středové kolineaci určené osou o, středem S a dvojicí bodů $A,\ A'$ sestrojte:*

a) obraz bodu X,

b) obraz přímky p.

PŘÍKLAD 20.2. *Ve středové kolineaci určené středem, osou a jedním párem odpovídajících si přímek sestrojte:*

a) obraz bodu B,

b) obraz přímky m.

Věta 73. *Střed a každý bod osy kolineace jsou jejími samodružnými body. Osa kolineace a každá přímka procházející jejím středem jsou samodružné přímky.*

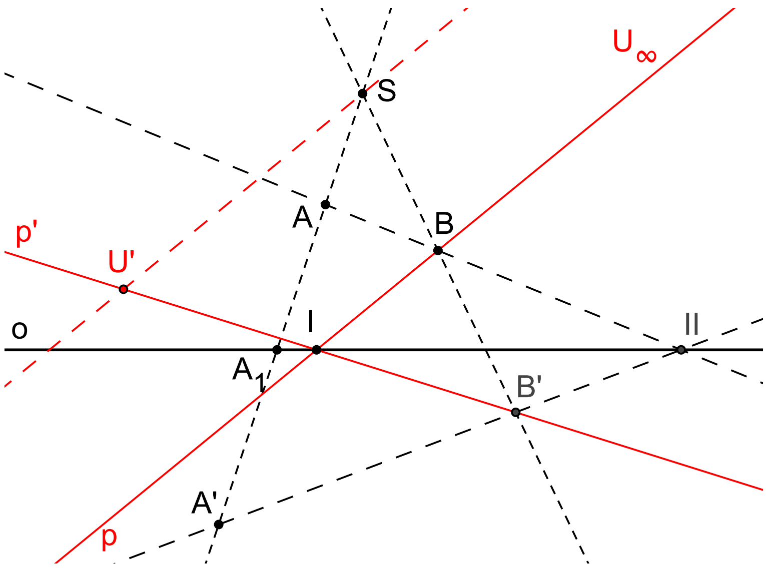
Věta 74. *Kolineace je určena, je-li dán její* **střed**, **osa** *a jeden* **pár odpovídajících si bodů nebo přímek**, *jež nejsou incidentní ani se středem, ani s osou kolineace.*

Charakteristika kolineace

$$(SA_1AA') = (SB_1BB') = \lambda$$

PŘÍKLAD 20.3. *Středová kolineace je určena středem, osou a dvojicí sobě odpovídajících bodů. Sestrojte obraz nevlastního bodu U_∞ přímky p.*

Řešení: Viz Obr. 101.



Obrázek 101: Zobrazení nevlastního bodu přímky p ve středové kolineaci se středem S a s osou o

Úběžník a úběžnice

- Úběžník je bod, který je v dané kolineaci obrazem nevlastního bodu (viz bod U' na Obr. 101).
- Úběžnice je přímka, která je obrazem nevlastní přímky.

PŘÍKLAD 20.4. *Úběžnice je rovnoběžná s osou kolineace. Dokažte.*

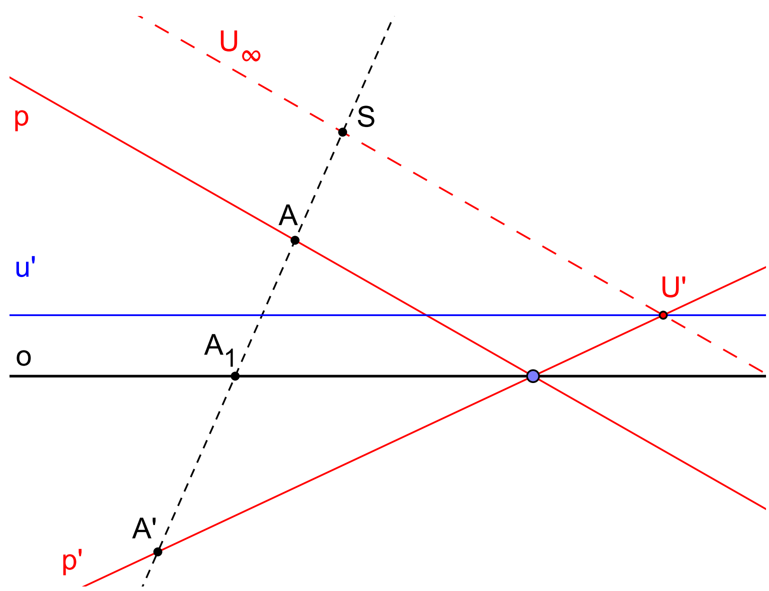
Řešení: Důkaz založíme na skutečnosti, že osa kolineace je přímkou samodružných bodů. Protože úběžnice je obrazem nevlastní přímky, nemůže mít s osou kolineace jiný společný bod než bod nevlastní.

PŘÍKLAD 20.5. *Sestrojte úběžnici v kolineaci dané středem, osou a*

a) párem odpovídajících si bodů,

b) párem odpovídajících si přímek.

Řešení: Řešení ad a) viz Obr. 102



Obrázek 102: Zobrazení úběžnice u' ve středové kolineaci se středem S a s osou o

PŘÍKLAD 20.6. *Ve středové kolineaci najděte alespoň jeden bod V, jehož obrazem je* **nevlastní bod**.

Věta 75. *V kolineaci existují dvě úbežnice (1. a 2. úběžnice nebo úběžnice a protiúběžnice). Vzdálenost středu kolineace od jedné z nich je rovna vzdálenosti osy kolineace od druhé z nich; přitom buď obě tyto úběžnice leží mezi středem a osou kolineace, nebo střed a osa kolineace leží mezi těmito úběžnicemi.*

Věta 76. *Kolineace je určena středem, osou a jednou úběžnicí.*

PŘÍKLAD 20.7. *Ve středové kolineaci určené středem S, osou o a úběžnicí u sestrojte obraz bodu A.*

Věta 77. *Dvojpoměr se kolineací zachovává.*

PŘÍKLAD 20.8. *Střed úsečky se kolineací většinou nezachovává. Ukažte.*

PŘÍKLAD 20.9. *Středová kolineace je dána středem S, osou o a dvojicí bodů B, B_∞. Najděte obraz bodu A.*

20.1 Kolineace kružnice a kuželosečky

Kuželosečce odpovídá v kolineaci zase kuželosečka. Obrazem kružnice v kolineaci tak může být elipsa, parabola nebo hyperbola. Na čem to závisí?

PŘÍKLAD 20.10. *Sestrojte elipsu, která odpovídá kružnici k v kolineaci dané osou, středem a úběžnicí.*

Při konstrukci obrazu kuželosečky v kolineaci využíváme následující vlastnosti:

1. Tečna kuželosečky k přejde kolineací v tečnu kuželosečky k'.

2. Dvojpoměr se kolineací zachovává.

3. Přímkám rovnoběžným s osou kolineace odpovídají přímky téhož směru.

4. Kuželosečky k, k' odpovídající si v kolineaci mají společné průsečíky s osou kolineace a společné tečny vedené k nim ze středu kolineace.

5. <u>Polární vlastnosti kuželoseček:</u>

- Je-li přímka p polárou bodu P vzhledem ke kuželosečce k, pak body dotyku T_1, T_2 tečen kuželosečky k z bodu P jsou průsečíky p s k.

- Bod P indukuje na kuželosečce involuci.

- Dva body, z nichž každý leží na poláře toho druhého vzhledem k téže kuželosečce, se nazývají sdružené póly.

6. Průměr kuželosečky

- každá vlastní přímka, jejíž pól je bod nevlastní

- spojnice bodu dotyku dvou rovnoběžných tečen kuželosečky (kromě paraboly)

- spojnice průsečíku dvou tečen kuželosečky se středem úsečky určené body dotyku těchto tečen s kuželosečkou

- spojnice středu dvou rovnoběžných tětiv

- každá přímka procházející středem kuželosečky (středové)

7. Střed kuželosecky

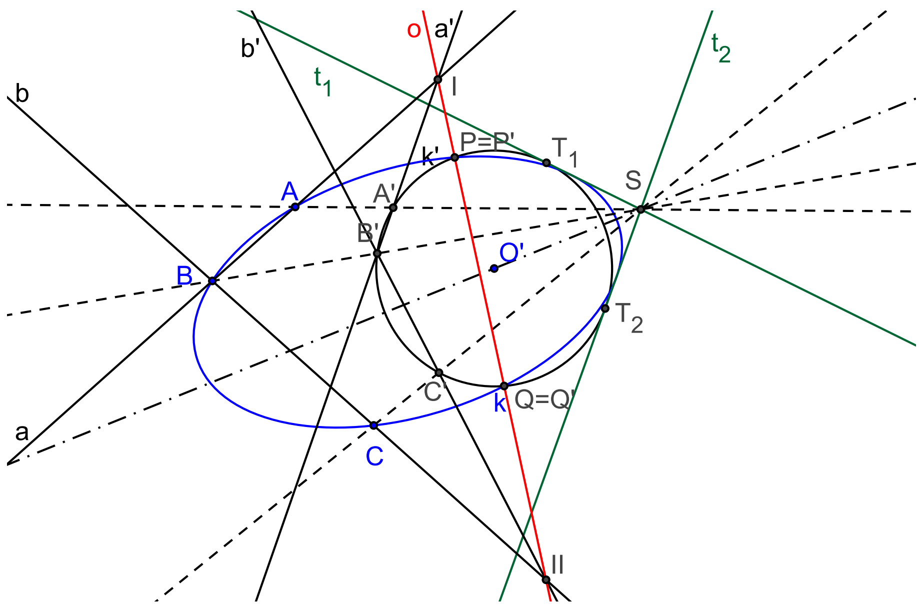
- Pro středové kuželosečky (elipsa, hyperbola) je to pól nevlastní přímky. Pól nevlastní přímky vzhledem k parabole je bod dotyku nevlastní přímky s parabolou.

PŘÍKLAD 20.11. *Sestrojte parabolu, která odpovídá kružnici k v dané kolineaci.*

PŘÍKLAD 20.12. *Sestrojte hyperbolu, která odpovídá kružnici k v dané kolineaci.*

PŘÍKLAD 20.13. *Sestrojte kuželosečku, znáte-li tři její body a dvě tečny.*

Řešení: Viz Obr. 103



Obrázek 103: Konstrukce kuželosečky (elipsy) z daných 3 bodů a 2 tečen

PŘÍKLAD 20.14. *Středová kolineace* v $\overline{E}_2$ *je dána osou* o*:* $y = 0$, *středem* $S =< 1, 0, a >$ *a dvojicí bodů* $B =< 1, 0, b >$, $B'_\infty =< 0, 0, b' >$. *Volte hodnoty parametrů* a, b, r *tak, aby obrazem kružnice* $x^2 + y^2 = r^2$ *byla postupně* **parabola**, **hyperbola** *a* **elipsa**. *Sestrojte.*