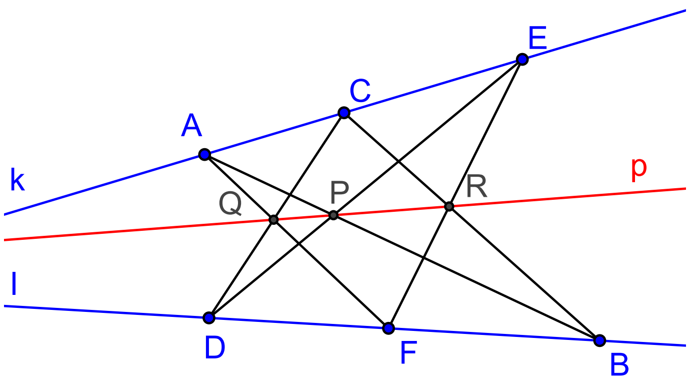
21 Vybrané věty projektivní geometrie

21.1 Pappova věta o šestiúhelníku

Následující větu poprvé dokázal *Pappos z Alexandrie* kolem roku 300 n. l. Její význam pro základy projektivní geometrie byl však rozpoznán až v 17. století, [2].

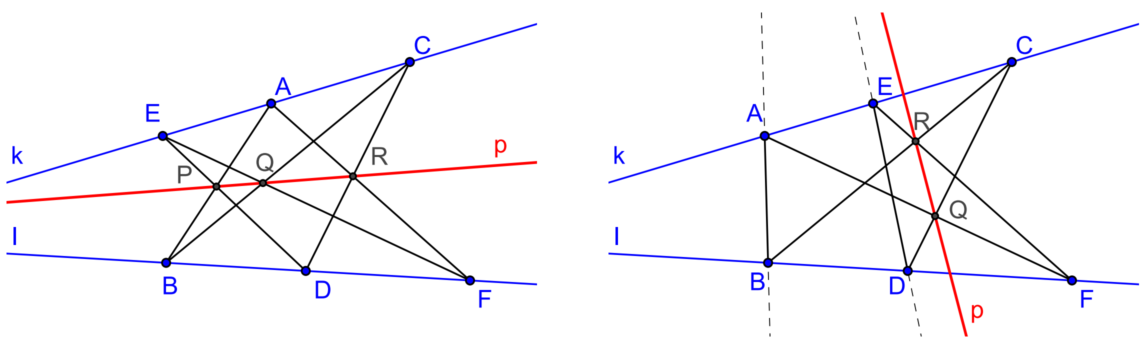
Věta 78 (Pappova věta o šestiúhelníku)**.** *Jestliže A, C, E je trojice kolineárních bodů ležících na přímce k a B, D, F je další trojice kolineárních bodů tentokrát ležících na l, a jestliže se přímky AB, CD, EF protínají v uvedeném pořadí postupně s přímkami DE, FA, BC, potom jejich průsečíky $P = AB \cap DE, Q = CD \cap FA$ a $R = EF \cap BC$ leží v přímce (viz Obr. 104, přímka p, tzv. Pappova přímka).*

Důkaz. Větu zde uvádíme bez důkazu. Pěkný důkaz s využitím Menelaovy věty je publikován v [2]. $\square$



Obrázek 104: Pappova věta o šestiúhelníku

„Projektivní charakter“ věty 78 spočívá v tom, že pojednává čistě jenom o incidenci, bez jakékoliv závislosti na délkách úseček a velikostech úhlů, i bez ohledu na uspořádání bodů (viz Obr. 105).



Obrázek 105: Pappova věta o šestiúhelníku, jiná uspořádání vrcholů

21.2 Šestiúhelník

Výše uvedená věta 78 je deklarována ve spojení s šestiúhelníkem. Je otázkou, s jakým. Jedná se o šestiúhelník $ABCDEFGH$ (že jsou jeho vrcholy „zpřeházené“ a nejdou pěkně „dokola“, jak jsme zvyklí, to nevadí). Body P, Q, R pak můžeme interpretovat jako průsečíky „protilehlých stran“ tohoto šestiúhelníku (více viz např. `https://en.wikipedia.org/wiki/Pappus%27s_hexagon_theorem`).

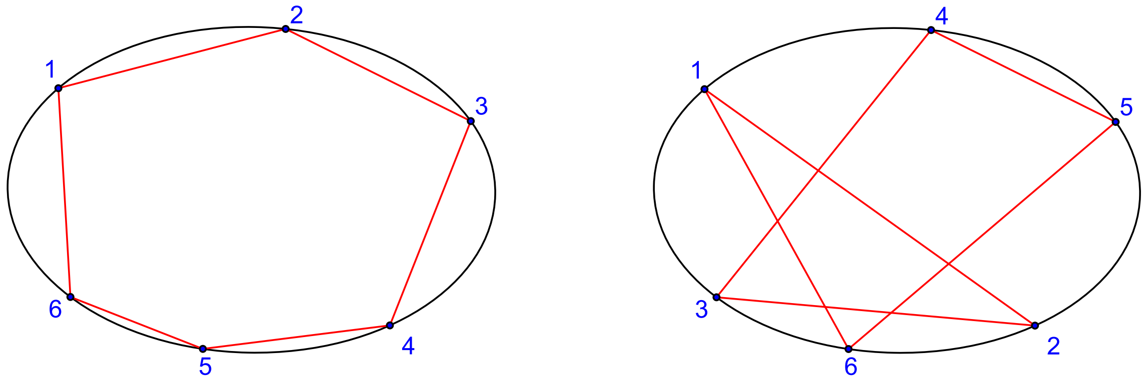
Proč nás zajímá právě uspořádání šesti bodů v rovině? Je známo, že kuželosečka je jednoznačně určena pěti body (viz např. nástroj *Kuželosečka daná pěti body* programu GeoGebra)[1].

Vezmeme-li libovolnou pětici bodů, vždycky je jimi určena nějaká kuželosečka. Nabízí se tak otázka, jakou podmínkou musí být spjato *šest bodů*, aby všechny ležely na jedné kuželosečce. Takovouto podmínku, kterou splňuje šest bodů ležících na jedné kuželosečce, objevil francouzský matematik a filozof *Blaise Pascal* (1623–1662) a uveřejnil ji roku 1640 (objevil ji ve svých 16 letech!), [6]. *Pascalově větě*, která o této podmínce pojdenává, se budeme věnovat v následující kapitole 21.3. Zde si nejprve uvedeme některé poznatky a důležité pojmy související s „organizací“ šesti bodů do formy šestiúhelníku.

Vzhledem k výše uvedenému je pochopitelné, že se budeme zabývat šesti body na kuželosečce (pro názornost se omezujeme na kružnici nebo elipsu). Šest bodů na kuželosečce, z nichž žádné tři sousední neleží v přímce, můžeme chápat jako vrcholy šestiúhelníku, který je kuželosečce vepsán. *Uvažujme jedno takové rozmístění šesti bodů na dané kuželosečce.* Pokud budeme body (a jejich pořadí jako vrcholů šestiúhelníku) rozlišovat očíslováním $1, 2, 3, 4, 5, 6$, je dobré si uvědomit, že existuje tolik vepsaných šestiúhelníků odpovídajících dané šestici bodů, kolik je možných způsobů očíslování (též můžeme říkat *pojmenování*) těchto bodů, tj. $6! = 720$. Přitom ale vždy 12 z těchto šestiúhelníků má stejný „tvar“ a liší se jenom pojmenováním vrcholů (který z vrcholů má číslo 1 a zda pokračujeme v záporném či v kladném smyslu, tj. 6 možností „očíslování vrcholů“ na jednu stranu a 6 možností „očíslování vrcholů“ na druhou stranu). Daným šesti bodům na kuželosečce tak lze přiřadit $720/12 = 60$ různých šestiúhelníků. Dva konkrétní příklady vidíme na Obr. 106.

U šestiúhelníku rozlišujeme dvojice vrcholů *sousedních* (1-2, 2-3, 3-4, 4-5, 5-6, 6-1), *střídavých* (1-3, 2-4, 3-5, 4-6, 5-1, 6-2) a *protilehlých* (1-4, 2-5, 3-6). Přímku spojující dvojici protilehlých vrcholů šestiúhelníku budeme nazývat *diagonálou* (14, 25, 36).

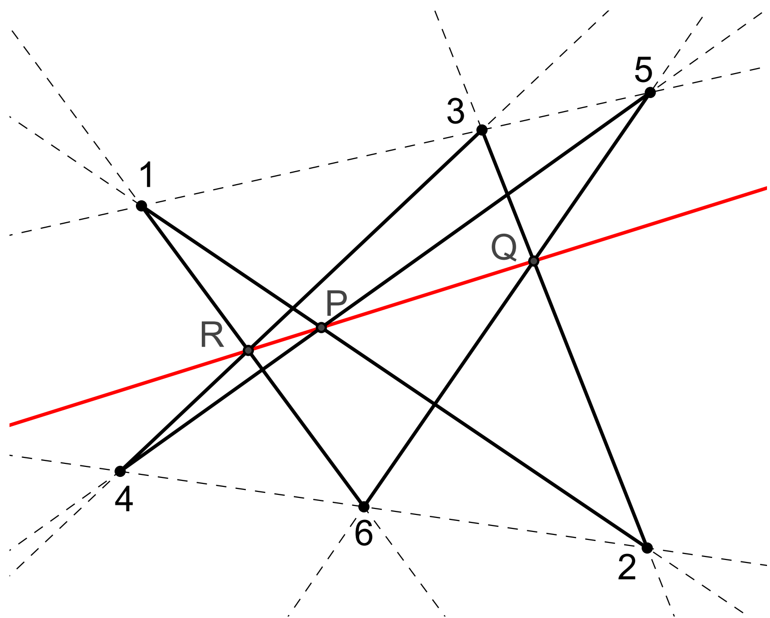
[1] Tuto skutečnost můžeme zdůvodnit například tím, že dvě kuželosečky mohou mít nejvýše čtyři společné body. Pro jejich odlišení pak potřebujeme o jeden bod navíc. Další možností je argumentovat počtem vstupních údajů potřebných pro výpočet rovnice kuželosečky, tj. určení šesti koeficientů a, b, c, d, e, f v rovnici $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$. Vzhledem k tomu, že se jedná o homogenní rovnici, vystačíme se souřadnicemi pěti bodů.



Obrázek 106: Dva příklady šestiúhelníku vepsaného dané elipse (pro pevně zvolené umístění 6 bodů)

Mezi stranami šestiúhelníku nás budou zajímat *protilehlé strany* (12-45, 23-56, 34-61). Šestiúhelník má tedy tři dvojice protilehlých stran a tři diagonály.

Ačkoliv tři sousední vrcholy nesmí být kolineární, pro jiné trojice vrcholů to možné je. Větu 78 tak můžeme přeformulovat tímto způsobem: *Jestliže je každá trojice střídavých vrcholů šestiúhelníku kolineární a jestliže se tři dvojice jeho protilehlých stran protínají, potom jsou průsečíky těchto stran kolineární* (viz Obr. 107).



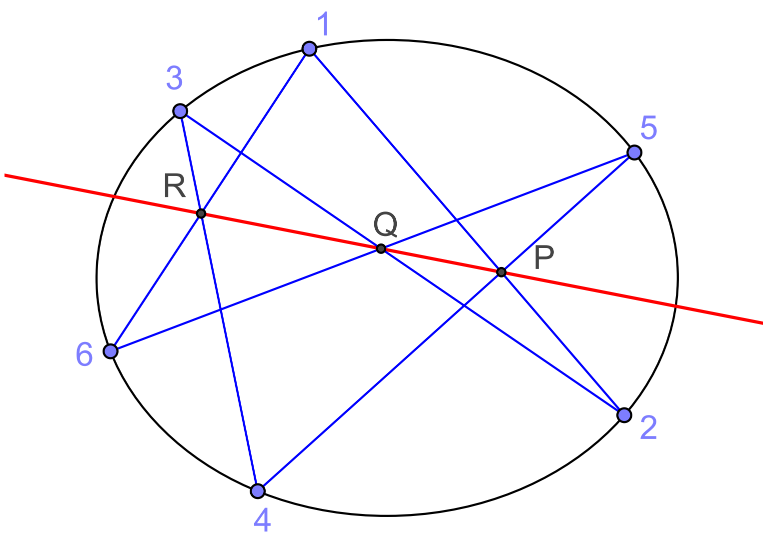
Obrázek 107: Pappova věta pro šestiúhelník 123456

21.3 Pascalova věta

Jak už bylo uvedeno, následující větu formuloval ve svých 16 letech francouzský matematik a filozof *Blaise Pascal*, [2, 6].

Věta 79 (Pascalova věta)**.** *Průsečíky protilehlých stran šestiúhelníku vepsaného kuželosečce jsou tři body ležící na jedné přímce (tzv. Pascalova přímka) a naopak, léží-li průsečíky protilehlých stran šestiúhelníku na jedné přímce, je tento šestiúhelník vepsán kuželosečce.*

Důkaz. Větu zde uvádíme bez důkazu. Důkaz jejího speciálního případu pro šestiúhelník vepsaný kružnici s využitím Menelaovy věty je publikován v [2]. ☐



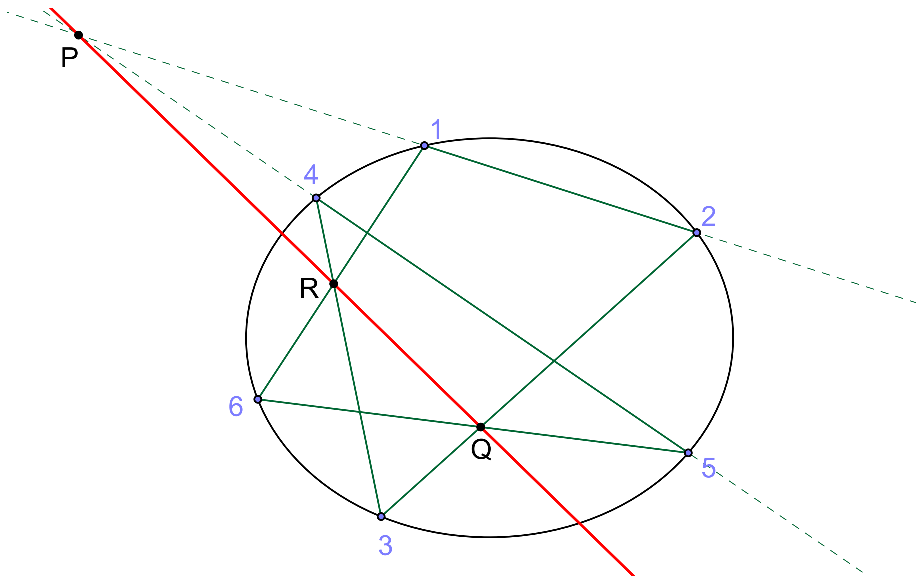
Obrázek 108: Pascalova věta

Poznámka. B. Pascal formuloval výše uvedenou větu pro šestiúhelník vepsaný kružnici. Byl si však vědom její platnosti i pro šestiúhelník vepsaný libovolné kuželosečce, [2].

Pascalovu větu můžeme využít při řešení rozličných konstrukčních úloh. Pro ilustraci zde uvedeme dva příklady, řadu dalších konstrukcí najde zájemce v [6].

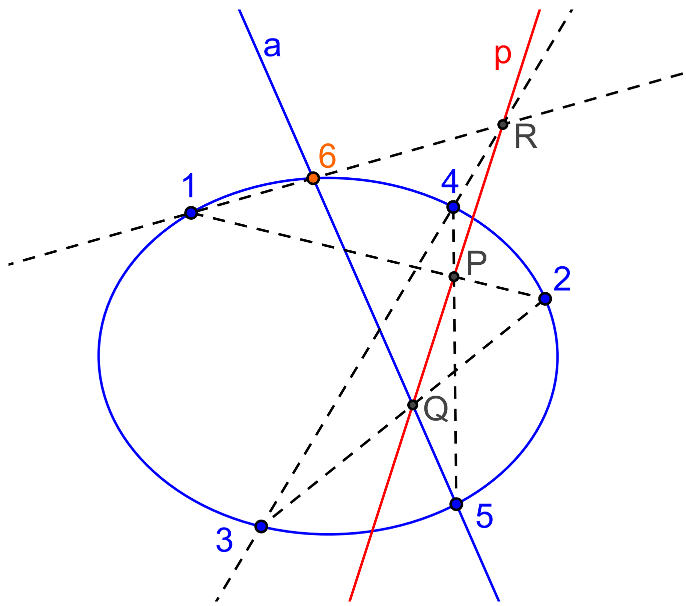
PŘÍKLAD 21.1. *Je dáno pět bodů určujících kuželosečku. Jedním z nich prochází přímka. Určete její druhý průsečík s příslušnou kuželosečkou.*

Řešení: Zadání i postup řešení ilustruje Obr. 110. Danými pěti body jsou body $1, 2, 3, 4, 5$. Danou přímkou je přímka a procházející bodem 5. Hledaným průsečíkem je potom bod 6. Konstrukce založená na Pascalově větě (věta 79) je zřejmá. Dané



Obrázek 109: Pascalova věta

body spolu s hledaným chápeme jako vrcholy šestiúhelníku vepsaného kuželosečce. Z daných prvků jsme schopni sestrojit body P a Q, tj. i Pascalovu přímku p. Jejím průsečíkem R s přímkou 34 potom musí dle Pascalovy věty procházet přímka 16. Bod 6 tedy určíme jako průsečík přímek a a $1R$.



Obrázek 110: Pascalova věta

PŘÍKLAD 21.2. *Kuželosečka v rovině je dána pěti body. Určete další její body.*

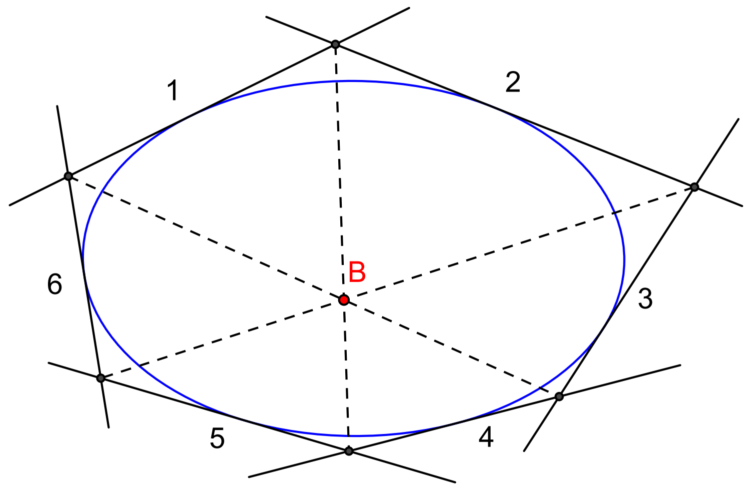
Řešení: Několikrát opakujeme konstrukci z řešení příkladu 21.1, pro různě zvolené přímky a.

21.4 Brianchonova věta

Věta, kterou v roce 1806 publikoval francouzský matematik a chemik *C. J. Brianchon* (1783–1864), je duální větou k větě Pascalově, [6].

Věta 80 (Brianchonova věta)**.** *Tři přímky spojující protilehlé vrcholy šestiúhelníku procházejí jedním bodem (tzv. Brianchonův bod) a obráceně, pokud spojnice protilehlých vrcholů šestiúhelníku procházejí jedním bodem, je tento šestiúhelník opsán kuželosečce (viz Obr. 111).*

Důkaz. Větu uvádíme bez důkazu. Důkaz její varianty pro kružnic viz [2]. □



Obrázek 111: Brianchonova věta

Užitím Brianchonovy věty řešte následující příklady. Více podobných konstrukčních úloh na využití věty 80 viz [6].

PŘÍKLAD 21.3. *Kuželosečka je dána pěti tečnami. Daným bodem na jedné z nich veďte další tečnu k této kuželosečce.*

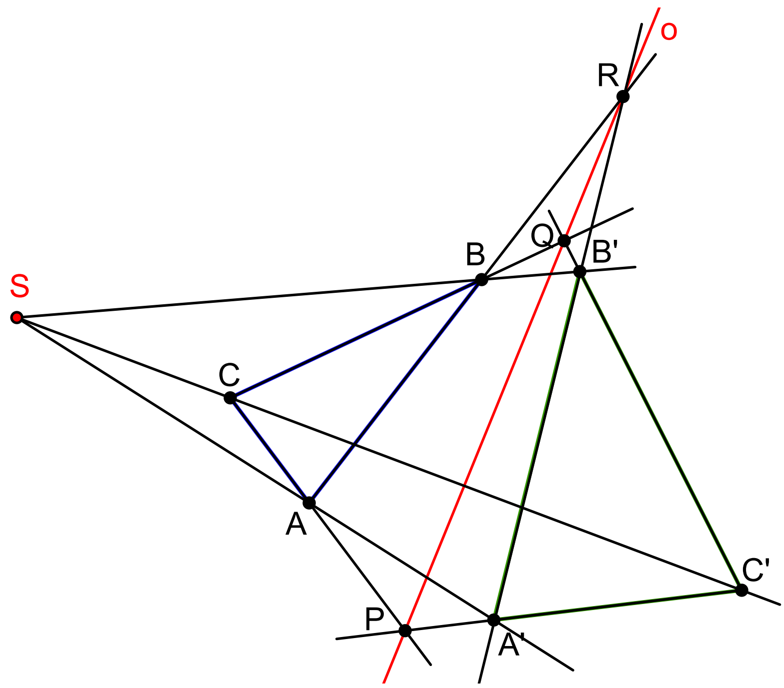
PŘÍKLAD 21.4. *Kuželosečka v rovině je dána pěti tečnami. Sestrojte několik dalších jejích tečen.*

21.5 Desarguesova věta

Následující větu o perspektivě dvou trojúhelníků formuloval na základě hlubšího studia teorie perspektivy francouzský architekt *G. Desargues* (1593–1662).

Věta 81 (Desarguesova věta o trojúhelnících)**.** *Jestliže je jeden ze dvou trojúhelníků obrazem druhého ve středovém promítání, leží průsečíky tří dvojic sobě odpovídajících stran těchto trojúhelníků v jedné přímce. Naopak, leží-li tři průsečíky sobě odpovídajících stran dvojice trojúhelníků v přímce, protínají se přímky spojující sobě odpovídající vrcholy v jednom bodě (viz Obr.).*

Důkaz. Větu uvádíme bez důkazu. ☐



Obrázek 112: Desarguesova věta

Poznámka. Vztah mezi dvojicí trojúhelníků popsaný Desarguesovou větou známe ze *středové kolineace.*