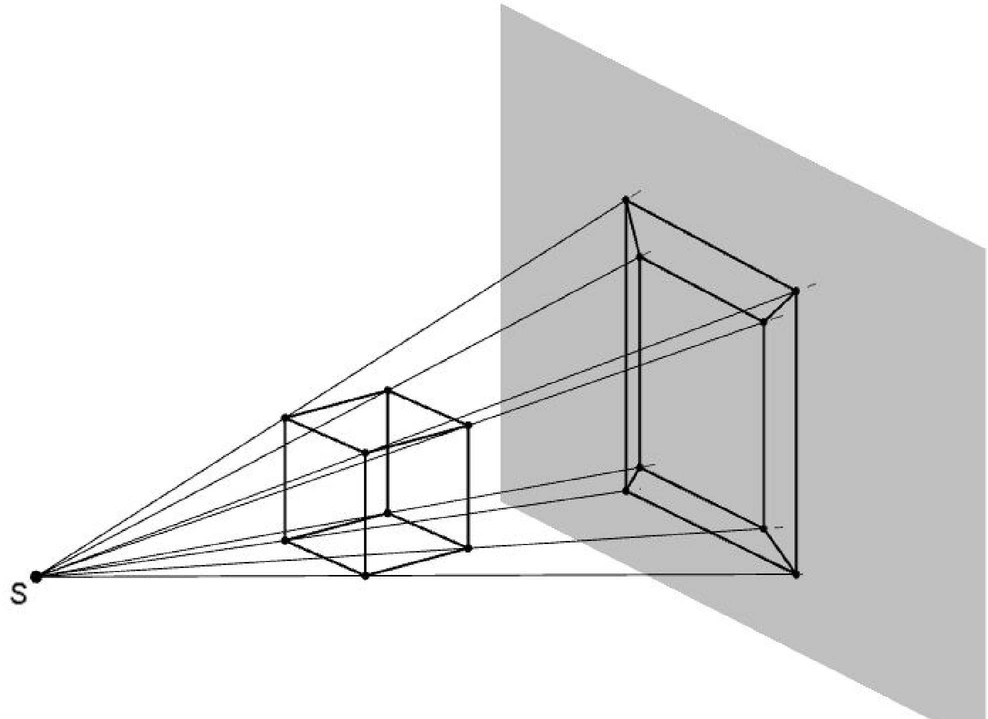
3 Afinní zobrazení

Afinní zobrazení (viz níže uvedená Def. 13) se obecně uskutečňuje mezi dvěma afinními bodovými prostory, jejichž dimenze nemusejí být stejné. Příkladem afinního zobrazení z prostoru A_3 do prostoru A_2 je středové promítání (z trojrozměrného prostoru do roviny) na Obr. 10.

Častěji se budeme setkávat s afinním zobrazením, které se uskutečňuje v rámci jednoho afinního bodového prostoru (většinou se bude jednat o rovinu, konkrétně o *eukleidovský prostor* E_2 nebo trojrozměrný prostor, konkrétně o *eukleidovský prostor* E_3). Je-li takové afinní zobrazení afinního bodového prostoru na sebe vzájemně jednoznačné, nazýváme ho *afinní transformace* daného bodového prostoru, zkráceně *afinita*.

Mezi afinity patří např. shodnosti v rovině nebo stejnolehlost, které se vyučují v matematice na základních a středních školách.



Obrázek 10: Středové promítání z trojrozměrného prostoru do roviny

Definice 13 (Afinní zobrazení)**.** *Zobrazení f afinního prostoru A do afinního prostoru A' se nazývá afinní, jestliže má tuto vlastnost: Leží-li navzájem různé body B, C, D z prostoru A na přímce, pak jejich obrazy $f(B), f(C), f(D)$ buď splývají, nebo jsou navzájem různé, leží na jedné přímce a jejich dělící poměr se rovná dělícímu poměru jejich vzorů, tj.:*

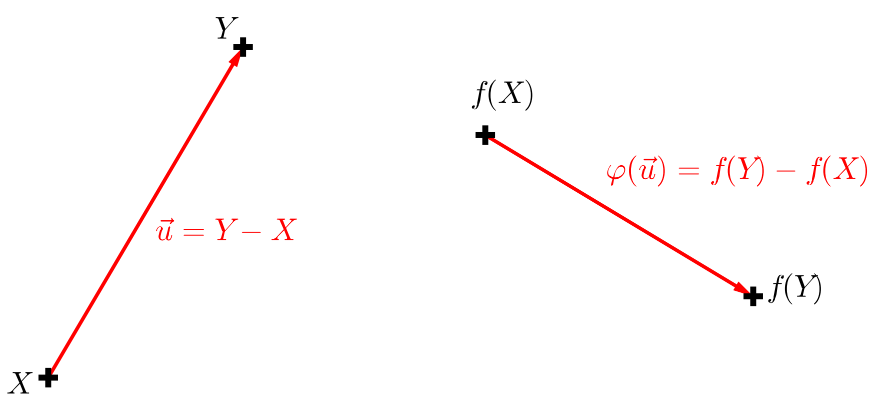
$$(f(B), f(C); f(D)) = (B, C; D).$$

Definice 14 (Asociovaný homomorfismus[1]zobrazení f)**.** *Uvažujme afinní zobrazení f prostoru A do prostoru A', např. $f : E_2 \to E_2$. Potom* **asociovaným** *(tj. jednoznačně přiřazeným)* **homomorfismem** *afinního zobrazení f rozumíme lineární zobrazení φ, které zobrazuje zaměření V prostoru A do zaměření V' prostoru A' takto:*

$$\vec{u} = Y - X \Rightarrow \varphi(\vec{u}) = f(Y) - f(X), \tag{3}$$

kde X, Y jsou body z A, $\vec{u} \in V$; $f(X), f(Y)$ body z A', $\varphi(\vec{u}) \in V'$.

Role asociovaného homomorfismu φ afinního zobrazení f je patrná z Obr. 11. Afinní zobrazení f se uskutečňuje mezi body, tj. zobrazuje body X, Y po řadě na body $f(X), f(Y)$. Homomorfismus φ asociovaný s f potom „operuje“ na vektorech příslušejících dvojicím těchto bodů, tj. vektor $\vec{u} = Y - X$ zobrazuje na vektor $\varphi(\vec{u}) = f(Y) - f(X)$.



Obrázek 11: Asociovaný homomorfismus φ afinního zobrazení f

[1] *Zobrazení φ vektorového prostoru V do vektorového prostoru V' se nazývá homomorfismus (též „lineární zobrazení“), jestliže pro všechna $\vec{u}, \vec{v} \in V$, $k \in \mathbb{T}$ (místo obecného tělesa $\mathbb{T}$ můžeme uvažovat $\mathbb{R}$) platí:*

$$\begin{aligned} &(1) \quad \varphi(\vec{u} + \vec{v}) = \varphi(\vec{u}) + \varphi(\vec{v}), \\ &(2) \quad \varphi(k\vec{u}) = k\varphi(\vec{u}). \end{aligned}$$

3.1 Rovnice afinního zobrazení z A_n do A_m

Nechť afinní bodový prostor A_n je určen počátkem P a bází $\vec{e}_1, ..., \vec{e}_n$, tzn. $A_n = \{P; \vec{e}_1, ..., \vec{e}_n\}$. Podobně nechť $A'_m = \{Q; \vec{d}_1, \vec{d}_2, ..., \vec{d}_m\}$. Nechť f je afinní zobrazení A_n do A'_m a φ asociované zobrazení k f tak, že

$$\varphi(\vec{e}_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij}\vec{d}_i\,; \quad j = 1, ..., n, \tag{4}$$

tzn. koeficienty a_{ij} jsou souřadnice vektorů $\varphi(\vec{e}_j)$ v bázi zaměření prostoru A_m,

$$f(P) = Q + \sum_{i=1}^{m} b_i\vec{d}_i\,, \tag{5}$$

tzn. počátek $P \in A_m$ se zobrazuje do bodu $f(P) \in A'_m$, který má při počátku Q souřadnice b_i.

S ohledem na výše uvedené úmluvy nyní určíme vztah mezi souřadnicemi libovolného bodu $X \in A_n$ a jeho obrazu $f(X) \in A'_m$. Vyjádřeme souřadnice X, $f(X)$:

$$X = P + \sum_{j=1}^{n} x_j\vec{e}_j\,, \tag{6}$$

$$f(X) = Q + \sum_{i=1}^{m} x'_i\vec{d}_i\,. \tag{7}$$

Zobrazíme-li bod X v afinitě f, můžeme dle uvedených vlastností zobrazení f a φ psát:

$$f(X) = f(P) + \sum_{j=1}^{n} x_j\varphi(\vec{e}_j).$$

Po dosazení z (4) a (5) dostáváme

$$f(X) = Q + \sum_{i=1}^{m} b_i\vec{d}_i + \sum_{j=1}^{n} x_j \sum_{i=1}^{m} a_{ij}\vec{d}_i,$$

po úpravě

$$f(X) = Q + \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + b_i \right) \vec{d}_i. \tag{8}$$

Porovnáme-li koeficienty při $\vec{d}_i$ ve vyjádřeních (7) a (8), dostáváme hledané rovnice

$$x_i' = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + b_i, \quad i = 1, 2, ..., m \tag{9}$$

Jinou formou zápisu (9) je soustava rovnic

$$\begin{aligned} x_1' &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n + b_1 \\ x_2' &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n + b_2 \\ &\vdots \\ x_n' &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n + b_n, \end{aligned}$$

maticový zápis soustavy

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_m' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}, \tag{10}$$

případně maticová rovnice

$$\mathbf{X}' = A \cdot \mathbf{X} + B. \tag{11}$$

3.2 Rovnice homomorfismu asociovaného s afinním zobrazením

Nyní ještě určíme rovnice asociovaného zobrazení φ. Nechť vektor $\vec{u} \in V_n$ se zobrazí do vektoru $\varphi(\vec{u}) \in V'_m$. Pro souřadnice vzoru $\vec{u}$ a obrazu $\varphi(\vec{u})$ platí

$$\vec{u} = \sum_{j=1}^{n} u_j \vec{e}_j; \tag{12}$$

$$\varphi(\vec{u}) = \sum_{i=1}^{m} u_i' \vec{d}_i \tag{13}$$

Na (12) aplikujeme zobrazení φ a upravíme dle (4). Dostaneme

$$\varphi(\vec{u}) = \sum_{j=1}^{n} u_j \varphi(\vec{e}_j) = \sum_{j=1}^{n} u_j \sum_{i=1}^{m} a_{ij} \vec{d}_i.$$

Po úpravě

$$\varphi(\vec{u}) = \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} u_j \right) \vec{d}_i. \tag{14}$$

Srovnáním (14) s (13) dostaneme hledané rovnice asociovaného zobrazení:

$$u'_i = \sum_{j}^{n} a_{ij} u_j, \quad i = 1, ..., m. \tag{15}$$

3.3 Věta o určenosti afinního zobrazení

Věta 2 (O určenosti afinního zobrazení)**.** *Mějme dva afinní bodové prostory A_n, A'_m. Nechť $M_0, M_1, M_2, ..., M_n$ je $n+1$ lineárně nezávislých bodů v A_n, $M'_0, M'_1, ..., M'_n$ $n+1$ libovolně zvolených bodů v A'_m. Pak existuje právě jedno afinní zobrazení f prostoru A_n do A'_m, které přiřazuje bodům M_j body M'_j tak, že*

$$M'_j = f(M_j);\ \ j = 0, 1, ..., n.$$

Důkaz. Ze Def. 14 asociovaného homomorfismu φ plyne, že jeho vztah k afinnímu zobrazení f lze vyjádřit vztahem $\varphi(X - P) = f(X) - f(P)$, který můžeme psát ve tvaru

$$f(X) = f(P) + \varphi(X - P). \tag{16}$$

Odtud je zřejmé, že afinní zobrazení f lze určit (zadat) jednou dvojicí bodů ve vztahu „vzor $\to$ obraz“, v případě (16) je to dvojice $P \to f(P)$, a asociovaným homomorfismem φ. Z toho plyne důkaz věty 2: Afinní zobrazení je určeno dvojicí bodů „vzor $\to$ obraz“ $M_0 \to M'_0$ a asociovaným homomorfismem φ jednoznačně určeným n nezávislými vektory $M_1 - M_0, M_2 - M_0, \dots, M_n - M_0$ a jejich obrazy (které mohou být závislé) $M'_1 - M'_0, M'_2 - M'_0, \dots, M'_n - M'_0$. □

PŘÍKLAD 3.1. *Zjistěte, zda existuje afinní zobrazení $f : A_2 \to A_3$, při kterém se body $B[1, 0]$, $C[0, 1]$, $D[2, p]$ zobrazí po řadě na body $B'[2, 1, -1]$, $C'[3, 2, 0]$, $D'[1, 0, 2]$.*

Řešení v programu wxMaxima:

```
(%i1) r1:a11+b1=2; r2:a21+b2=1; r3:a31+b3=-1; r4:a12+b1=3; r5:a22+b2=2;
      r6:a32+b3=0; r7:2*a11+p*a12+b1=1; r8:2*a21+p*a22+b2=0;
      r9:2*a31+p*a32+b3=2;
```

(%o1) $b1 + a11 = 2$

(%o2) $b2 + a21 = 1$

(%o3) $b3 + a31 = -1$

(%o4) $b1 + a12 = 3$

(%o5) $b2 + a22 = 2$

(%o6) $b3 + a32 = 0$

(%o7) $a12\, p + b1 + 2\, a11 = 1$

(%o8) $a22\, p + b2 + 2\, a21 = 0$

(%o9) $a32\, p + b3 + 2\, a31 = 2$

```
(%i10) res:solve([r1,r2,r3,r4,r5,r6,r7,r8,r9],
       [a11,a12,a21,a22,a31,a32,b1,b2,b3])[1];
```

(%o10) $[a11 = -1, a12 = 0, a21 = -1, a22 = 0, a31 = -\frac{p-3}{p+1}, a32 = \frac{4}{p+1}, b1 = 3, b2 = 2, b3 = -\frac{4}{p+1}]$

```
(%i11) ev([x1=a11*x+a12*y+b1,y1=a21*x+a22*y+b2,z1=a31*x+a32*y+b3],res);
```

(%o11) $[x1 = 3 - x, y1 = 2 - x, z1 = \frac{4\, y}{p+1} - \frac{(p-3)\, x}{p+1} - \frac{4}{p+1}]$

PŘÍKLAD 3.2. *Určete rovnici afinního zobrazení $f : A_2 \to A_1$, při kterém se body $[2, 1]$, $[3, 2]$, $[0, 1]$ zobrazí po řadě na body $[2]$, $[0]$, $[8]$.*

PŘÍKLAD 3.3. *Určete rovnice rovnoběžného promítání prostoru A_3 do průmětny $\pi \subset A_3$, vzhledem k pevné lineární soustavě souřadnic prostoru A_3, je-li dána průmětna π rovnicí $2x_1+x_2-x_3+2 = 0$ a směr promítání je určen vektorem $\vec{s} = (2; 1; 3)$.*

PŘÍKLAD 3.4. *Určete rovnice afinního zobrazení $f : A_3 \to A_2$, které bodům $A = [1, 2, 3]$, $B = [0, 1, 1]$, $C = [1, -1, 2]$, $D = [3, 0, 1]$ přiřazuje v daném pořadí body $A' = [-1, 3]$, $B = [0, 2]$, $C = [0, 0]$, $D = [3, 1]$.*

3.4 Cvičení – Afinní zobrazení

1. Určete rovnici afinního zobrazení $f : A_2 \to A_1$, při kterém se body $[2, 1]$, $[3, 2]$, $[0, 1]$ zobrazí po řadě na body $[2]$, $[4]$, $[10]$.

2. Pro jaké hodnoty parametrů p, q existuje afinní zobrazení $f : A_2 \to A_2'$, při kterém se body $[2, 1]$, $[-2, 3]$, $[4, 0]$ zobrazí po řadě na body $[p, 3]$, $[0, q]$, $[1, 1]$.