14 Axiomatická výstavba geometrie

„Důkladnost matematiky spočívá na definicích, axiómech, důkazech.“

Immanuel Kant

Základy axiomatické výstavby geometrie i celé matematiky položil Eukleides (kolem r. 300 př.n.l.) ve svých Základech (viz [3] *Eukleidovy základy (Elementa)*, překlad F. Servít, 1907, nebo [2] *Základy. Knihy I–IV, V–VI, VII–IX, X, XI–XI.*, koment. Petrem Vopěnkou, 2008–2012.)

Eukleides pojal výklad geometrie v Základech axiomaticky. Celou geometrii odvodil ze 14 axiomů[1], z nichž 5 nazval postuláty[2] (postuláty můžeme chápat jako formulace základních úloh, které lze v rovině konstruovat; Servít je nazýval „Úkoly prvotné“), [7], [9].

Eukleidovy postuláty:

1. Dva dané (různé) body spojit úsečkou.
2. Danou úsečku na jedné i druhé straně libovolně prodloužit.
3. Vytvořit kružnici s daným středem a procházející daným bodem (různým od středu).
4. Všechny pravé úhly jsou shodné.
5. Dvě přímky v rovině, které protínají jinou přímku této roviny a tvoří s ní po jedné straně vnitřní úhly, jejichž součet je menší dvou pravých, se vždy protínají a to po té straně, kde je součet menší.

Poznámka. Konstrukce uskutečňované podle prvních tří Eukleidových postulátů jsou známé jako *eukleidovské konstrukce*, též konstrukce kružítkem a pravítkem (bez měřítka) (anglicky *Compass and straightedge constructions*). Ne každou geometrickou úlohu lze řešit pomocí těchto konstrukcí, viz např. *kvadratura kruhu*, *zdvojení krychle* a *trisekce úhlu*. Nemožnost vyřešit tyto tři úlohy pouze užitím kružítka a pravítka byla dokázána až v 19. století, po vytvoření náležitého matematického aparátu. Nemožnost eukleidovské konstrukce *zdvojení krychle* a *trisekce úhlu* dokázal *Pierre Wantzel* v roce 1837. Nemožnost eukleidovské konstrukce *kvadratury kruhu* pak vyplynula z důkazu transcendentnosti čísla π, který podal *Ferdinand von Lindemann* v roce 1882.

[1] *axiom* – základní věta, poučka, zásada, která se přijímá a bez důkazu považuje za pravdivou: log., mat. tvrzení deduktivní teorie přijaté bez důkazu; *Akademický slovník cizích slov*, Academia, Praha, 2001

[2] *postulát* – princip, požadavek nebo tvrzení určité vědecké teorie přijaté bez důkazů a tvořící její východisko: log. axiom; *Akademický slovník cizích slov*, Academia, Praha, 2001

Některé překlady Základů uvádějí jenom 4 postuláty. Postulát o rovnoběžkách pak řadí mezi axiomy, jako XI. nebo XII. Soustava axiomů eukleidovské geometrie tak není jednoznačně určena. Těchto soustav může být více a mohou se lišit podobou axiomů i jejich počtem. Co je v jedné soustavě axiomem, může být v jiné soustavě větou deduktivně odvozenou. Během historie interpretace Eukleidových Základů tak vznikla například celá řada vět ekvivalentních s postulátem o rovnoběžkách, viz str. 118.

Soustava axiomů eukleidovské geometrie představená v Základech není vytvořena příliš důsledně a trpí některými logickými nedostatky. Nápravu učinil až David Hilbert (1862 - 1943) na přelomu 19. a 20. století. Svou představu, že v logicky dokonale vystavěném systému axiomů v podstatě ztrácí smysl původní význam jednotlivých použitých pojmů, vyjádřil známým výrokem:

> *„Vždy musíme být schopni místo body, přímky a roviny říkat stoly, židle a půllitry.“*

Tím se otevírá cesta k různým *modelům abstraktní geometrie*. Zanedlouho si uvedeme například *Poincarého model* nebo *Beltramiho–Kleinův model*.

Požadavky na soustavu axiomů:

1. *Bezespornost* – z daných axiomů nelze odvodit zároveň V i $\neg V$.
2. *Nezávislost* – žádný z axiomů soustavy by neměl být logickým důsledkem ostatních (soustava by tedy neměla obsahovat žádný zbytečný axiom).
3. *Úplnost* – všechny modely odvozené ze soustavy axiomů jsou vzájemně izomorfní, tj. platí v nich stejné věty.

14.1 Hilbertova soustava axiomů eukleidovské geometrie

Axiomy této soustavy lze rozdělit do následujících pěti skupin (v závorce je vždy uveden symbol, nebo více symbolů, pro příslušnou skupinu axiomů):

- axiomy incidence (**I**),
- a. uspořádání (**U**),
- a. shodnosti (**S**),
- a. spojitosti (**A, C, D**),
- axiom rovnoběžnosti (**R**).

I. Axiomy incidence I

I1: Dva různé body mají společnou jednu přímku.
I2: Přímka obsahuje aspoň dva různé body.
I3: Existuje aspoň jedna trojice různých bodů, které nepatří téže přímce.
I4: Jestliže tři body nepatří jedné přímce, potom patří jediné rovině.
I5: Jestliže dva různé body přímky p **leží v rovině** ρ, **potom všechny body přímky** p **leží v** ρ.
I6: Jestliže průnik dvou rovin není prázdný, obsahuje aspoň dva navzájem různé body.
I7: Existuje aspoň jedna čtveřice bodů, které neleží v téže rovině.
I8: Rovina obsahuje aspoň jeden bod.

Definice 28. *Tři body, které leží na téže přímce, nazýváme* **kolineární**.

PŘÍKLAD 14.1. *Užitím axiomů* **I** *dokažte následující věty:*

Věta 57. *Průnikem dvou různých rovin, které mají společný aspoň jeden bod, je přímka.*

Důkaz. $I6 \longrightarrow I1 \longrightarrow I5$ □

Věta 58. *Tři nekolineární body jsou navzájem různé.*

Důkaz. $A = B = C$ nebo $A = B \neq C$ vede ke sporu □

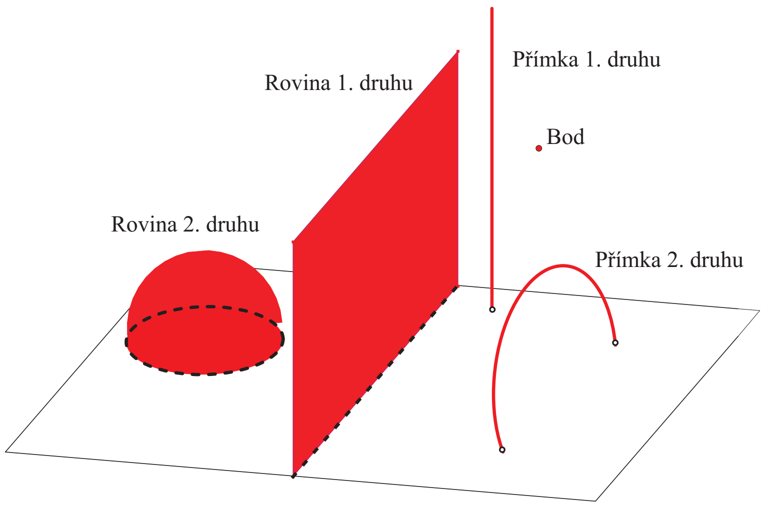
MODELY GEOMETRIE [I]

Tj. modely geometrie založené pouze na axiomech incidence.

- **M1: Minimální model**
  - čtyři body,
  - šest přímek (protože existuje $\binom{4}{2} = 6$ neuspořádaných dvojic ze čtyř prvků),
  - čtyři roviny (protože existuje $\binom{4}{3} = 4$ neuspořádaných trojic ze čtyř prvků).

- **M2: Poincarého model**

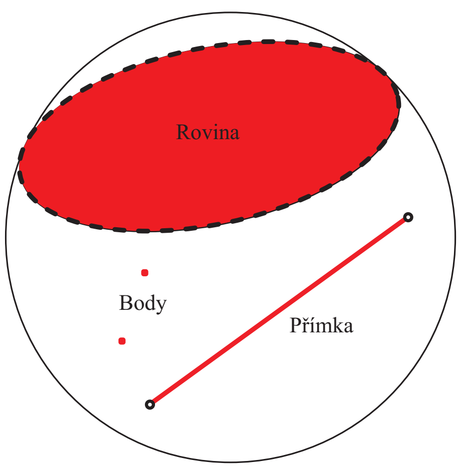
  Je tvořen **vnitřními** body poloprostoru omezeného rovinou ω. Rozlišujeme zde přímky a roviny prvého a druhého druhu (viz Obr. 42). Přímka prvého druhu je tvořena vnitřními body polopřímky kolmé na rovinu ω, přímka druhého druhu je tvořena vnitřními body polokružnice kolmé k rovině ω a se středem v rovině ω. Rovina prvého druhu je tvořena vnitřními body poloroviny kolmé na ω a rovina druhého druhu potom odpovídá vnitřním bodům polokoule se středem v ω. Incidence je eukleidovská.



Obrázek 42: Poincarého model

- **M3: Beltramiho–Kleinův model**

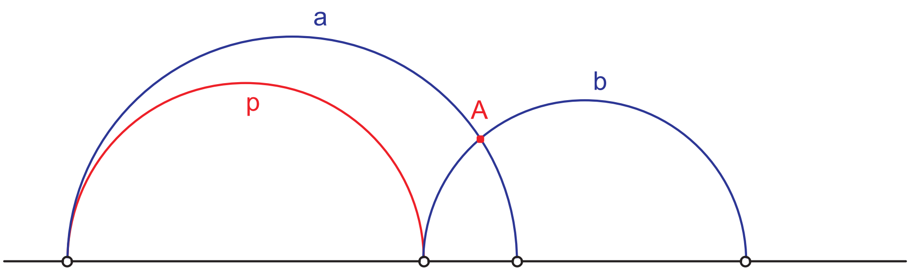
  Tvořen vnitřními body koule. Přímku reprezentují vnitřní body tětivy koule a rovinu vnitřní body jejího „rovinného“ řezu (viz Obr. 43). Incidence je eukleidovská.



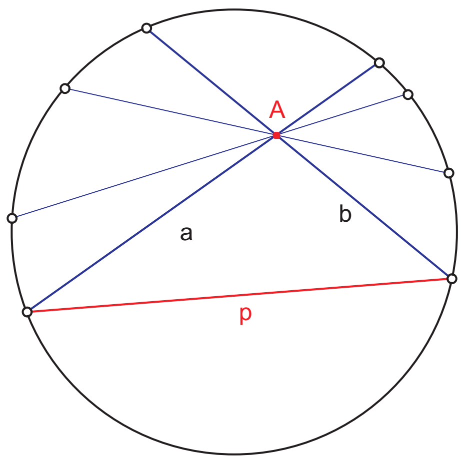
Obrázek 43: Beltramiho-Kleinův model

Oba uvedené modely **M2** a **M3** mají i své rovinné varianty, viz Obr. 44, 45. Rovinný případ *Beltramiho–Kleinova modelu* se často uvádí jenom pod názvem *Kleinův model*, případně *Kleinův diskový model*.

Poznámka. Modely **M2**, **M3** nejsou modely eukleidovské geometrie, nesplňují axiom rovnoběžnosti (viz Obr. 44, 45). Vidíme, že v obou případech existuje více než jedna rovnoběžka s p, tj. přímka, která prochází bodem A a nemá s danou přímkou p žádný společný bod. Přímky a, b jsou hraniční přímky.



Obrázek 44: M2: Axiom rovnoběžnosti



Obrázek 45: M3: Axiom rovnoběžnosti

- **M4: Aritmetický celočíselný model planimetrie**
  - *bod* = uspořádaná dvojice celých čísel $[x, y] \in Z$,
  - *přímka* = body splňující rovnici $ax + by + c = 0, \;\; a, b, c \in Z$.

  Poznámka. Stejně můžeme definovat model racionální (tj. $[x, y] \in Q, \;\; a, b, c \in Q$) či reálný (tj. $[x, y] \in R, \;\; a, b, c \in R$).

II. Axiomy uspořádání U

Tyto axiomy se týkají vlastnosti „bod leží mezi jinými dvěma“.

U1: Jestliže bod B leží mezi body A, C, jsou A, B, C tři různé body na přímce a platí též, že B leží mezi body C, A.

U2: Jestliže A, B jsou dva navzájem různé body, potom existuje na přímce AB aspoň jeden bod C takový, že bod B leží mezi body A, C.

U3: Ze tří různých bodů A, B, C ležících na té samé přímce leží nejvýše jeden mezi ostatními dvěma.

U4: (Paschův axiom) Jsou-li A, B, C tři nekolineární body a přímka p, která těmito body neprochází, obsahuje jistý bod mezi body A, C, potom přímka p obsahuje bod mezi A, B nebo mezi B, C.

PŘÍKLAD 14.2. *Užitím axiomů* **I, U** *dokažte následující věty.*

Věta 59. *Mezi dvěma různými body leží aspoň jeden bod.*

Důkaz. $I3 \longrightarrow U2 \longrightarrow U2 \longrightarrow U4$ □

Věta 60. *Na každé přímce existuje nekonečně mnoho bodů.*

Geometrie [IU] se nazývá též **geometrie polohy**

Modely s konečným počtem prvků nemohou splňovat axiomy uspořádání. Proč?
(Řešení: Podle $I3, I1$ existuje v takové geometrii vždy aspoň jedna přímka, tj. podle $U2$ nekonečně mnoho bodů)

MODELY GEOMETRIE [IU]:

- **Poincarého model**

  Uspořádání platí ve smyslu eukleidovském.

- **Beltramiho - Kleinův model**

  Uspořádání platí ve smyslu eukleidovském.

- **Aritmetický racionální model planimetrie**

  OTÁZKA: *Proč již nestačí aritmetický celočíselný model?*

III. Axiomy shodnosti S

Tyto axiomy se týkají metrických vlastností. Formulují základní vlastnosti shodnosti úseček.

S1: Je-li $AB = CD$, **potom** $A \neq B, C \neq D$. **Pro každé dva různé body** A, B **platí** $AB = BA$. (*Shodnost se týká pouze dvojic různých bodů.*)

S2: Nechť AB **je úsečka,** CD **polopřímka. Potom existuje jediný bod** E **polopřímky** CD, **pro který platí** $AB = CE$. (*Nanášení úsečky na polopřímku.*)

S3: Jestliže $AB = CD$ **a** $CD = EF$, **potom** $AB = EF$. (*Tranzitivnost shodnosti.*)

S4: Jestliže bod C **leží mezi body** A, B, **bod** C' **mezi body** A', B' **a jestliže platí** $AC = A'C', BC = B'C'$, **potom platí** $AB = A'B'$. (*Grafický součet dvou úseček.*)

S5: Nechť jsou $ABC, A'B'K$ **dvě trojice nekolineárních bodů a nechť** $AB = A'B'$. **Potom existuje jediný bod** C' **poloroviny** $A'B'K$, **pro který platí** $AC = A'C', BC = B'C'$.(*Přenesení trojúhelníka k dané úsečce do dané poloroviny.*)

S6: Nechť jsou $ABC, A'B'C'$ **dvě trojice nekolineárních bodů, pro které platí** $AB = A'B', BC = B'C', CA = C'A'$. **Nechť dále leží bod** P **mezi body** A, B **a bod** P' **mezi body** A', B' **tak, že** $AP = A'P'$. **Potom** $CP = C'P'$.

PŘÍKLAD 14.3. *Užitím axiomů* **S** *dokažte, že shodnost se týká neuspořádaných dvojic bodů.*

Důkaz. $S1: \ AB = CD, CD = DC, \ S3: AB = DC$ $\square$

IV. Axiomy pohybu S^*

Axiomy založené na *axiomatickém* pojmu *shodné zobrazení* (*přemístění*).

S*1: Leží-li bod C mezi body A, B a jsou-li A', B', C' obrazy bodu v přemístění, leží bod C' mezi body A', B'.

S*2: Jestliže je polopřímka v přemístění samodružná, je každý její bod v tomto přemístění samodružný.

S*3: Nechť jsou $ABC, A'KL$ dvě trojice nekolineárních bodů. Existuje jediné přemístění v rovině, které převádí bod A do bodu A', polopřímku AB do polopřímky $A'K'$ a polorovinu ABC do poloroviny $A'KL$.

S*4: Jestliže jsou A, B dva různé body, potom existuje aspoň jedno přemístění, které převádí bod A do bodu B a bod B do bodu A.

S*5: Jestliže je $\angle BAC$ dutý úhel, potom existuje aspoň jedno přemístění, které převádí polopřímku AB do polopřímky AC a polopřímku AC do polopřímky AB.

S*6: Složením dvou přemístění vznikne přemístění.

S*7: Identita je přemístění.

S*8: Inverzní zobrazení k přemístění je přemístění.

S^*6, S^*7, S^*8 - *všechna přemístění tvoří grupu*

Věta 61. *Abstraktní geometrie [IUS], [IUS*] jsou totožné, tj. skupiny axiomu S, S* jsou ekvivalentní.*

MODELY GEOMETRIÍ [IUS], [IUS*]:

- **Model planimetrie** - zobrazení inverzní ke stereografické projekci.
- **Aritmetický model reálný** OTÁZKA: *Proč již nestačí aritmetický racionální model?*
- **Beltramiho–Kleinův model**

  Zavedení neeukleidovské vzdálenosti v Beltramiho–Kleinově modelu:
  Vzdálenost bodu B od bodu A (viz Obr. 46) definujeme výrazem $|\ln(UVBA)|$,

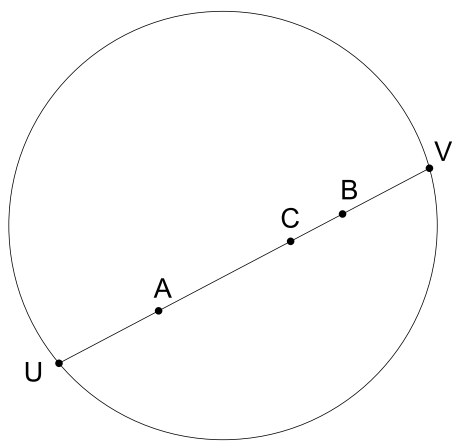
kde U, V jsou krajní body tětivy, na které leží body A, B, a $(UVBA)$ je dvojpoměr bodů U, V, B, A. Je zřejmé, že pokud se bod B blíží hranici kruhu, jeho vzdálenost od A se blíží nekonečnu. Použitím logaritmu dvojpoměru místo pouhého dvojpoměru je zajištěna možnost sčítání vzdáleností. Uvažujme body A, C, B dle Obr. 46. Potom pro příslušné dvojpoměry platí $(UVCA)\cdot(UVBC) = (UVBA)$, zatímco pro jejich logaritmy platí

$$\ln(UVCA) + \ln(UVBC) = \ln(UVBA),$$

což koersponduje s naší představou o možnosti sčítání vzdáleností. Absolutní hodnota zase zaručí nezávislost vzdálenosti dvou bodů na jejich pořadí, protože, když $(UVAB) = (UVBA)^{-1} = (VUAB)^{-1} = (VUBA)$, potom

$$|\ln(UVAB)| = |\ln(UVBA)| = |\ln(VUAB)| = |\ln(VUBA)|.$$

Pro takto definovanou vzdálenost bodů, je potom délka úsečky UV vlastně nekonečná. Dobře tak hraje roli přímky.



Obrázek 46: Vzdálenost bodů v Kleinově (Beltramiho–Kleinově) modelu

V. Axiomy spojitosti A, C, D

Souvisejí s hledáním odpovědí na otázky: *Lze změřit každou úsečku? Existuje ke každému číslu odpovídající úsečka?*

Archimédův axiom

A: Jsou dány úsečky AB, CD. **Na polopřímku** AB **postupně nanášíme úsečku** CD **a dostaneme body** $P_1, P_2, ..., P_n, P_{n+1}$. **Potom existuje takové** $n \in N$, **že bod** P_{n+1} **neleží uvnitř** AB.

Cantorův axiom (axiom úplnosti)

C: Průnik posloupnosti úseček do sebe zařazených je neprázdný.

Věta 62. *Jestliže průnik posloupnosti úseček do sebe zařazených neobsahuje žádnou úsečku, je tento průnik množinou s jedním bodem.*

Důkaz. Dokážeme sporem □

Věta 63. *V geometrii [IUSAC] je každé kladné číslo velikostí nějaké úsečky.*

Axiomy A, C lze nahradit jediným axiomem D:

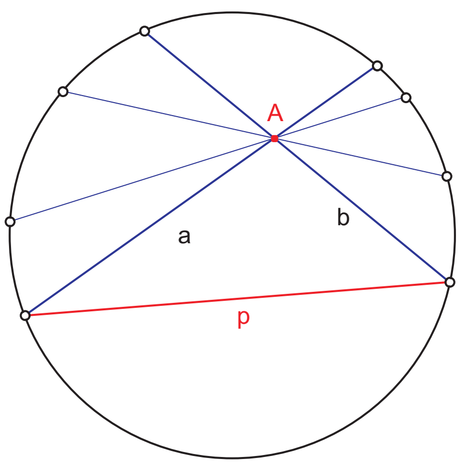
Dedekindův axiom

D: Každý omezený konvexní útvar na přímce, který obsahuje aspoň dva různé body, je úsečka (případně s vynecháním jednoho nebo obou krajních bodů).

ABSOLUTNÍ GEOMETRIE [IUSAC], [IUSD]:

Jedná se o společný základ *eukleidovské* i *neeukleidovské* geometrie.

VI. Axiom rovnobežnosti R



Obrázek 47: Rovnoběžky v Kleinově modelu

Rovnoběžkami budeme rozumět dvě přímky v téže rovině, které nemají společný bod. Jak bylo uvedeno na str. 112, existují geometrie, v nichž bodem neležícím na přímce prochází více rovnoběžek s touto přímkou. Potom můžeme tyto rovnoběžky rozlišit na tzv. *souběžky* a *rozběžky*. Souběžkami nazýváme „mezní“ přímky ze svazku rovnoběžek procházejících bodem A. Například v Kleinově modelu na Obr. 47 jsou *souběžkami* přímky a a b, ostatní rovnoběžky jsou *rozběžkami* (tj. vyplňují vrcholové úhly, jejichž rameny jsou souběžky).

Některé věty <u>absolutní geometrie</u>:

Věta 64 (Legendrova)**.** *Jsou-li čísla α, β, γ velikosti vnitřních úhlů trojúhelníku ABC, platí $\alpha + \beta + \gamma \leq \pi$.*

Věta 65. *Jestliže je p libovolná přímka, A bod, který na ní neleží, potom bodem A prochází aspoň jedna rovnoběžka s přímkou p.*

Axiom rovnoběžnosti

R: Nechť p je libovolná přímka, A libovolný bod, který na ní neleží. Potom bodem A prochází nejvýše jedna rovnoběžka s přímkou p.

Tento axiom je ekvivalentní s Eukleidovým pátým postulátem uvedeným na str. 108. Ten se jeví tak samozřejmý, že byl dlouho považován za pouhý důsledek předchozích čtyř postulátů. Snahy o jeho odvození z těchto postulátů však vedly vždy jenom k jeho novým formulacím (některé viz níže). Důkazem toho, že axiom rovnoběžnosti je skutečným axiomem a nikoliv důsledkem jiných axiomů, bylo až objevení existence geometrie [IUSDnonR] (Lobačevskij), která se ukázala jako logicky bezesporná. R a zároveň nonR nemůže být totiž důsledkem axiomů IUSD, jsou tedy na nich nezávislé.

[IUSDR] = eukleidovská geometrie

[IUSDnonR] = hyperbolická (Lobačevského) geometrie

Některé věty ekvivalentní s R

- Existuje aspoň jeden eukleidovský trojúhelník.
- Existuje dutý úhel takový, že každý jeho vnitřní bod náleží úsečce, jejíž krajní body leží na ramenech tohoto úhlu.
- Pythagorova věta.
- Každé dvě kolmice ke dvěma různoběžkám jsou různoběžné.

- Součet vnitřních úhlů ve čtyřúhelníku je 2π.
- Každému trojúhelníku lze opsat kružnici.
- Eukleidův pátý postulát (viz str. 108).

Poznámka. Jak bylo uvedeno výše, objevení ekvivalence uvedených vět s axiomem R je výsledkem snah o odvození R z ostatních axiomů. Více o historii těchto pokusů najde zájemce například v [7] a [9].