2 Dělicí poměr

Dělicím poměrem zde rozumíme číslo, které jednoznačně udává polohu bodu na přímce vzhledem ke dvěma pevně daným bodům této přímky.

Obrázek 8: Tři kolineární body

Definice 11 (Dělicí poměr)**.** *Nechť A, B, C; $A \neq B$, $C \neq B$, jsou tři body ležící na přímce (tj. tři kolineární body). Dělicím poměrem bodu C vzhledem k bodům A, B rozumíme reálné číslo λ, které zapisujeme (ABC), a pro jehož absolutní hodnotu platí*

$$|(ABC)| = \frac{|AC|}{|BC|}, \tag{1}$$

přitom pro bod C ležící vně úsečky AB je $(ABC) > 0$ a pro bod C ležící uvnitř AB je $(ABC) < 0$. Pro $C = A$ je zřejmě $(ABC) = 0$.

Poznámka. Uvedená definice zavádí dělicí poměr pomocí podílu vzdáleností bodu C od daných bodů A, B. Protože vzdálenosti jsou kladné, nepřináší jejich podíl žádnou informaci o znaménku dělicího poměru, kterému pak musí být věnována zvláštní část definice. Tomu se vyhneme, pokud použijeme k zavedení pojmu dělicí poměr odpovídající vektory definované příslušnou trojicí bodů, viz Obr.9.

Obrázek 9: Dělicí poměr bodu C vzhledem k bodům A, B

Definice 12 (Dělicí poměr 2)**.** *Nechť A, B, C; $A \neq B$, $C \neq B$, jsou tři body ležící na přímce (tj. tři kolineární body). Potom číslo λ definované rovnicí*

$$C - A = \lambda(C - B) \tag{2}$$

značíme (ABC) a nazýváme dělicím poměrem bodu C vzhledem k bodům A, B.

Poznámka. Ve vztahu (2) je obsažena kompletní informace o čísle λ, tj. o jeho absolutní hodnotě i o znaménku. Pro snazší zapamatování si můžeme (2) přepsat do tvaru

$$\lambda = \frac{C - A}{C - B},$$

který sice není formálně správně, ale jasně koresponduje se vztahem (1). Smysl získá až dosazením souřadnic bodů $A = [a_1; a_2]$, $B = [b_1; b_2]$, $C = [c_1; c_2]$:

$$\lambda = \frac{c_1 - a_1}{c_1 - b_1} = \frac{c_2 - a_2}{c_2 - b_2}.$$

PŘÍKLAD 2.1. *Určete dělicí poměr* (ABS) *středu* S *úsečky* AB *vzhledem k jejím krajním bodům* A, B.

PŘÍKLAD 2.2. *Pro body* A, B, C *platí* $(ABC) = \lambda$. *Zapište pomocí* λ *dělicí poměry* $(BAC), (CBA), (ACB), (CAB)$ *a* (BCA).

Řešení: Vztah (2) pro $(ABC) = \lambda$ přepíšeme do tvaru $A = \lambda B + (1 - \lambda)C$. Odtud po vydělení λ dostaneme $B = \dfrac{1}{\lambda}A + (1 - \dfrac{1}{\lambda})C$. Odtud je zřejmé, že $(BAC) = \dfrac{1}{\lambda}$. Poznamenejme ještě, že ke stejnému výsledku vede také toto odvození: $(BAC) = \dfrac{C - B}{C - A} = \dfrac{1}{\frac{C-A}{C-B}} = \dfrac{1}{\lambda}$.

Analogicky odvodíme vyjádření dalších dělicích poměrů v rámci dané trojice bodů: $(CBA) = \dfrac{\lambda}{\lambda - 1}, (ACB) = 1 - \lambda, (CAB) = \dfrac{1}{1 - \lambda}$ a $(BCA) = 1 - \dfrac{1}{\lambda}$.

PŘÍKLAD 2.3. *V rovině jsou dány dva pevné body* A, B. *Určete množinu všech bodů* X *této roviny, pro které platí*

$$\frac{|AX|}{|BX|} = k,$$

kde k *je reálná konstanta.*

Řešení: Hledanou množinou je kružnice, které je známá jako „Apolloniova kružnice“. Nalezení její rovnice si usnadníme vhodným umístěním bodů A, B vzhledem k souřadnicovým osám. Konkrétně je umístíme na osu x tak, že $A = [-a, 0]$ a $B = [a, 0]$, kde $a \in R$. Potom má vyšetřovaná množina bodů $X = [x, y]$ rovnici

$$\left(x - \frac{a(k^2 + 1)}{k^2 - 1}\right)^2 + y^2 = \frac{4a^2k^2}{(k^2 - 1)^2},$$

která skutečně odpovídá kružnici.

2.1 Barycentrické souřadnice

Výše uvedené skutečnosti nás mohou přivést k možnosti vyjádření polohy bodu nezávisle na volbě soustavy souřadnic. Bod C můžeme, při zvolených bodech A, B, zapsat takto:

$$C = \frac{1}{1 - \lambda}A - \frac{\lambda}{1 - \lambda}B.$$

Jedná se o příklad tzv. barycentrických[1] souřadnic.

Barycentrické souřadnice vzhledem ke dvěma bodům

Bod X leží na přímce AB právě tehdy, když existují dvě čísla $\alpha, \beta \in R$ taková, že platí
$$X = \alpha A + \beta B, \quad \alpha + \beta = 1.$$

Tato čísla nazýváme **barycentrickými souřadnicemi** bodu X vzhledem k bodům A, B. Rovnice $X = \alpha A + \beta B$, kde $\alpha + \beta = 1$ se nazývá **bodová rovnice přímky**.

Poznámka. Analogicky můžeme zavést barycentrické souřadnice bodu X vzhledem ke třem, čtyřem, obecně pak k bodům. Proveďte pro $k = 3, 4$.

PŘÍKLAD 2.4. *Napište barycentrické souřadnice středu úsečky AB vzhledem k jejím krajním bodům.*

PŘÍKLAD 2.5. *Napište barycentrické souřadnice těžiště trojúhelníku ABC vzhledem k jeho vrcholům.*

Věta 1. *V prostoru E_k zvolme $k+1$ bodů A_i, $k+1$ čísel α_i a $k+1$ čísel β_i, kde $i \in \{1, 2, ..., k+1\}$. Potom platí:*

a) Bod X definovaný vztahem
$$X = \alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + ... + \alpha_{k+1} A_{k+1}$$
je definován nezávisle na volbě soustavy souřadnic právě tehdy, když
$$\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_{k+1} = 1.$$

b) Vektor $\vec{u}$ definovaný vztahem
$$\vec{u} = \beta_1 A_1 + \beta_2 A_2 + ... + \beta_{k+1} A_{k+1}$$
je definován nezávisle na volbě soustavy souřadnic právě tehdy, když
$$\beta_1 + \beta_2 + ... + \beta_{k+1} = 0.$$

[1] *Barus* znamená řecky *těžký*. Slovem *barycentrum* se označuje *hmotný střed* soustavy těles, většinou kosmických. Použití barycentrických souřadnic má analogii ve výpočtu polohy těžiště soustavy těles. Uvažujme například dvě bodová tělesa o hmotnostech m_1 a m_2, která jsou umístěna v daném pořadí v bodech X a Y. Potom pro souřadnice těžiště T této soustvy dvou těles platí: $T = \dfrac{m_1 X + m_2 Y}{m_1 + m_2} = \dfrac{m_1}{m_1 + m_2} X + \dfrac{m_2}{m_1 + m_2} Y$, kde $\dfrac{m_1}{m_1 + m_2} + \dfrac{m_2}{m_1 + m_2} = 1$.