10 Grupa podobností eukleidovského prostoru

10.1 Podobné zobrazení

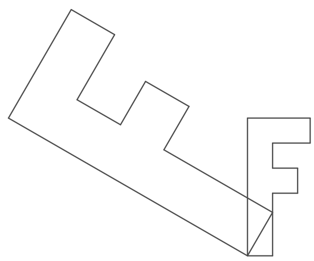
Definice 25. *Zobrazení f euklidovského prostoru E do euklidovského prostoru E' se nazývá* **podobné zobrazení**, *jestliže existuje kladné reálné číslo k tak, že pro každé dva body X, Y prostoru E platí:*

$$|f(X)f(Y)| = k|XY|. \tag{81}$$

Číslo k se nazývá koeficient podobného zobrazení f.

Poznámka. Podobnosti s koeficientem $k \neq 1$ nazýváme **vlastní podobnosti**.

PŘÍKLAD 10.1. *Napište rovnice pro zobrazení v rovině, které každý útvar otočí kolem počátku o úhel α a dvakrát zvětší, viz Obr. 27.*



Obrázek 27: Podobné zobrazení v rovině

Věta 36. *Každé podobné zobrazení euklidovského prostoru E do euklidovského prostoru E' lze složit ze* **stejnolehlosti prostoru** *E a* **shodného zobrazení** *E* **do** *E'.*

Věta 37. *Každé podobné zobrazení je afinní.*

Protože podobná zobrazení jsou afinními zobrazeními, platí pro ně také věta o určenosti. Samozřejmě v podobě, která koresponduje s definicí podobného zobrazení.

Věta 38 (O určenosti podobného zobrazení). *Nechť jsou $P_0, P_1, ..., P_n$ lineárně nezávislé body n-rozměrného euklidovského prostoru E_n a $P'_0, P'_1, ..., P'_n$ body euklidovského prostoru E'. Afinní zobrazení prostoru E_n do prostoru E', které zobrazuje bod P_i na bod P'_i pro $i = 0, 1, ..., n$ je právě tehdy podobné, existuje-li číslo $k > 0$ tak, že pro všechny dvojice $i, j = 0, 1, ..., n$ platí $|P'_iP'_j| = k|P_iP_j|$.*

Poznámka. Body prohlásíme ze *lineárně nezávislé* tehdy, když jimi určené vektory jsou lineárně nezávislé.

PŘÍKLAD 10.2. *Formulujte „větu o určenosti podobného zobrazení" pro rovinu, tj. eukleidovský prostor E_2.*

PŘÍKLAD 10.3. *V euklidovské rovině je dán čtverec $ABCD$ se středem S. Existuje právě jedno podobné zobrazení roviny čtverce do sebe, při kterém se body A, B, S zobrazí po řadě na body D, B, C. Rozložte toto podobné zobrazení na stejnolehlost a shodné zobrazení.*

PŘÍKLAD 10.4. *Ukažte, že každé dvě paraboly jsou podobné, tzn. že existuje podobné zobrazení roviny jedné paraboly na rovinu druhé paraboly, při kterém se jedna parabola zobrazí na druhou.*

Věta 39. *Každá „vlastní podobnost" má právě jeden samodružný bod.*

Důkaz. Nejprve dokážeme, že vlastní podobnost (tj. podobnost s koeficientem $k \in R^+ - \{1\}$) nemůže mít více než jeden samodružný bod, potom dokážeme, že musí mít aspoň jeden. Tak nám vyjde, že musí mít právě jeden.

(i) Skutečnost, že vlastní podobnost nemůže mít více než jeden samodružný bod dokážeme sporem. Nechť má vlastní podobnost f nejméně dva samodružné body K a L; $K \xrightarrow{f} K' = K, L \xrightarrow{f} L' = L$. Potom $|K'L'| = |KL|$, což je ve sporu s definicí vlastní podobnosti (81), kde $k \neq 1$. Vlastní podobnost tedy nemůže mít více než jeden samodružný bod.

(ii) Nyní dokážeme, že vlastní podobnost musí mít aspoň jeden samodružný bod. Uvažujme podobnost f s rovnicí $X' = A \cdot X + B$, kde $A^T \cdot A = k^2 I$. Její samodružné body jsou potom řešením soustavy lineárních rovnic odpovídající maticové rovnici $(I - A) \cdot X = -B$. Klíčová pro náš důkaz je skutečnost, že determinant matice této soustavy je pro vlastní podobnost různý od nuly, $|I - A| \neq 0$. Pokud by byl roven nule, tj. pokud by platila rovnost $|I - A| = 0$, znamenalo by to, že řešením charakteristické rovnice $|\lambda I - A| = 0$ (viz str. 37) homomorfismu φ asociovaného s f je vlastní číslo $\lambda = 1$. Kdyby tomu tak bylo, existoval by (vlastní) vektor $\vec{u} = Q - P$, pro jehož obraz $\varphi(\vec{u}) = f(Q) - f(P)$ platí $\varphi(\vec{u}) = \vec{u}$. Protože se zobrazí sám na sebe, nemění se jeho velikost, tj. $|f(P)f(Q)| = |PQ|$, což je ve sporu s definicí vlastní podobnosti (81), kde $k \neq 1$. Determinant $|I - A|$ tedy nemůže být roven nule, soustava $(I - A) \cdot X = -B$ je proto regulární a má právě jedno řešení. □

Grupa podobností

Množina všech podobností eukleidovského prostoru E_n spolu s operací skládání tvoří grupu - tzv. *grupu podobností prostoru E_n*.

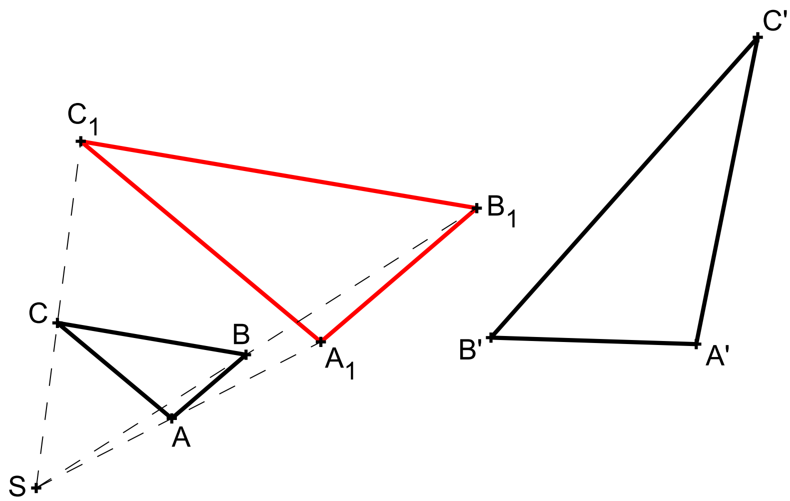
10.2 Podobnosti eukleidovské roviny

Zopakujme si definici *podobného zobrazení v rovině* (stručně *podobnosti*): *Zobrazení f roviny (euklidovského prostoru E_2) na sebe se nazývá „podobnou transformací roviny“ (též „podobností v rovině“), jestliže existuje kladné reálné číslo k tak, že pro každé dva body X, Y roviny a jejich obrazy X', Y' platí:*

$$|X'Y'| = k|XY|.$$

Číslo k se nazývá koeficient podobnosti f.

Poznámky.
1. Každé podobné zobrazení je afinní.
2. Podobnosti s koeficientem $k \neq 1$ nazýváme *vlastní podobností.*



Obrázek 28: Každou podobnost lze rozložit na stejnolehlost a shodnost

Věta 40. *Každou podobnost v rovině s poměrem podobnosti k lze rozložit na stejnolehlost $H(S, k)$ a shodnost Z. Přitom střed stejnolehlosti můžeme volit libovolně a shodnost Z je tím určena jednoznačně.*

Věta 41 (O určenosti podobnosti v rovině)**.** *Každá podobnost v rovině je jednoznačně určena trojúhelníkem ABC a jeho obrazem $A'B'C'$ takovým, že $|A'B'| = k|AB|, |B'C'| = k|BC|, |A'C'| = k|AC|$, kde k, $k > 0$, je koeficient této podobnosti.*

Víme, že každé podobné zobrazení eukleidovské roviny do sebe lze složit ze *stejnolehlosti* a *shodnosti.*

1. Stejnolehlost H volíme se středem v počátku soustavy souřadnic a s koeficientem $k > 0$:

$$H : X \mapsto \overline{X}; \quad \begin{aligned} \overline{x} &= kx \\ \overline{y} &= ky. \end{aligned}$$

2. Shodnost S je buď přímá nebo nepřímá:

$$S : \overline{X} \mapsto X'; \quad \begin{aligned} x' &= \overline{x}\cos\alpha \mp \overline{y}\sin\alpha + p \\ y' &= \overline{x}\sin\alpha \pm \overline{y}\cos\alpha + q. \end{aligned}$$

Výsledkem složení $S \circ H$ je potom přímá nebo nepřímá podobnost.

Přímá podobnost	**Nepřímá podobnost:**
$x' = kx\cos\alpha - ky\sin\alpha + p$ $y' = kx\sin\alpha + ky\cos\alpha + q.$	$x' = kx\cos\alpha + ky\sin\alpha + p$ $y' = kx\sin\alpha - ky\cos\alpha + q.$
$x' = ax - by + p$ $y' = bx + ay + q.$	$x' = ax + by + p$ $y' = bx - ay + q.$
$A^T \cdot A = (a^2 + b^2) \cdot I; \qquad k = \sqrt{a^2 + b^2}$	

Věta 42. *Každá vlastní podobnost eukleidovské roviny je buď stejnolehlost, nebo stejnolehlost složená s otočením kolem středu stejnolehlosti, nebo stejnolehlost složená s osovou souměrností, jejíž osa prochází středem stejnolehlosti.*

10.3 Cvičení – Podobnosti

1. Najděte všechny podobnosti euklidovské roviny, při kterých se bod $[1, 0]$ zobrazí na bod $[4, -2]$ a bod $[2, 3]$ na bod $[2, -8]$. **[2]**

2. Eulerovými body se nazývají středy úseček spojujících vrcholy trojúhelníku s průsečíkem jeho výšek.

Dokažte následující tvrzení:

Středy stran, paty výšek a Eulerovy body libovolného trojúhelníku leží na jedné kružnici. (*Tato kružnice se nazývá* *<u>kružnice devíti bodů</u>, <u>Eulerova kružnice</u> nebo <u>Feuerbachova kružnice</u>*.)

3. Najděte podobnost euklidovské roviny, při které se zobrazí počátek na bod $[0, 2]$, bod $[1, 1]$ na počátek a bod $[2, 0]$ na bod $[2, p]$. Určete p a najděte samodružné body a směry nalezené podobnosti.

4. Najděte rovnice podobnosti, při které je počátek samodružný a obrazem bodu $[5, -3]$ je bod $[1, 1]$.

5. Určete všechny podobnosti, pro které jsou bod $[1, 1]$ a směr vektoru $(1, 1)$ samodružné.

6. Napište rovnice všech podobností zobrazujících body $[1, 2]$ a $[0, 1]$ po řadě na body $[3, -1], [4, 2]$. Rozložte je na stejnolehlost a shodnost.

7. V rovině je dán čtverec $ABCD$ se středem S. Určete obraz bodu C v podobnosti, která zobrazuje body A, B, S po řadě na body B, D, C. Určete samodružný bod této podobnosti.

8. Sestrojte alespoň jeden trojúhelník ABC, pro který platí $|AB| : |AC| = 3 : 5$, $\alpha = 60°$, $\rho = 1,8cm$(poloměr kružnice vepsané).

9. Sestrojte kosodélník $ABCD$, je-li dáno $|\angle DAB| = \alpha$, $|\angle ABD| = \varepsilon$, $|AC| = e$.

10. Je dána kružnice k a bod A, který je bodem vnější oblasti kružnice k. Sestrojte všechny sečny kružnice k, které procházejí bodem A a pro jejichž průsečíky X, Y s kružnicí platí $|AX| = 2|AY|$.

11. Je dána kružnice $k(S; 4cm)$, její tečna t a bod $M \in k$ tak, že $|Mt| = 2cm$. Sestrojte úsečku XY procházející bodem M tak, aby $X \in k, Y \in t$ a $|MX| : |MY| = 3 : 2$.

12. Jsou dány dvě různoběžky a, b a kružnice k tak, že $P \in a \cap b$ je bodem vnitřní oblasti kružnice k. Sestrojte všechny kružnice, které se dotýkají přímek a, b i kružnice k.

13. Dokažte následující věty:

Věta 43 (Menelaova věta). *Je dán trojúhelník ABC a přímka p, která neprochází žádným z bodů A, B, C, ale protíná přímky AB, BC, CA v bodech C', A', B'. Potom platí:*

$$(ABC') \cdot (BCA') \cdot (CAB') = 1.$$

Naopak, platí-li uvedený vztah, body A', B', C' leží na přímce.

Věta 44 (Pappova věta). *Nechť jsou A', B', C', D' rovnoběžné nebo středové průměty čtyř navzájem různých bodů A, B, C, D přímky p na přímku p'; $p' \neq p$. Potom:*

$$(A'B'C'D') = (ABCD)$$

Věta 45 (Cevova věta). *Nechť je dán trojúhelník ABC a bod M, který neleží na žádné z přímek AB, BC, CA. Průsečíky přímek AM, BM, CM s přímkami BC, CA, AB (různé od bodů A, B, C) označme postupně A', B', C'. Potom platí:*

$$(ABC') \cdot (BCA') \cdot (CAB') = -1.$$

Naopak, platí-li uvedený vztah, jsou přímky AA', BB', CC' buď navzájem rovnoběžné nebo se protínají v jediném bodě.

14. Zobrazení f euklidovské roviny do euklidovského trojrozměrného prostoru je vzhledem k zvoleným kartézským soustavám souřadnic dáno rovnicemi: $x' = 2x + ay - 1$, $y' = x + by + 2$, $z' = y + 1$. Určete koeficienty a, b tak, aby bylo zobrazení f podobné. Jaký je koeficient tohoto podobného zobrazení f?

15. Určete p, q, r tak, aby byla rovnicemi $x' = x - 2y + 2z + 4$, $y' = px + 2y + z - 2$, $z' = qx + ry + 2z - 2$ dána vzhledem ke kartézské soustavě souřadnic podobnost. Určete její samodružný bod a samodružné směry.