12 Mocnost bodu ke kružnici

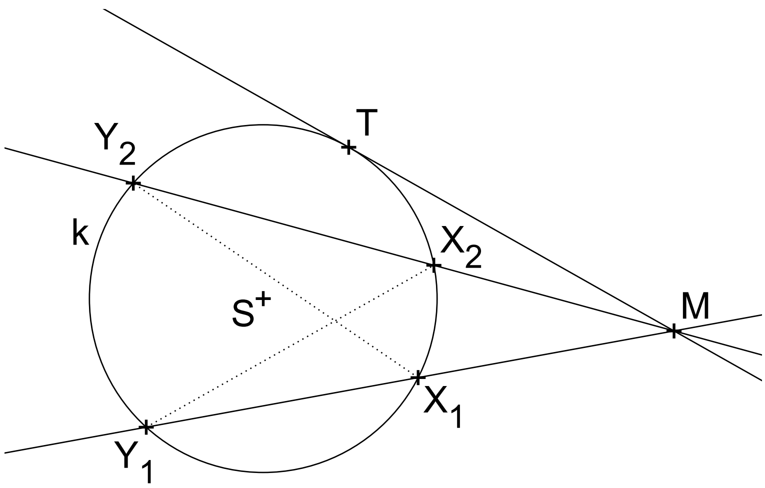
Definice 27. *Mocností bodu M ke kružnici $k(S; r)$ rozumíme reálné číslo m, pro které platí:*

(1) $|MX| \cdot |MY| = |m|$, kde X, Y jsou průsečíky kružnice k s její libovolnou sečnou procházející bodem M.

(2) Je-li M vnějším bodem kružnice k, je $m > 0$.

(3) Je-li M vnitřním bodem kružnice k, je $m < 0$.

(4) Je-li $M \in k$, je $m = 0$.



Obrázek 31: Mocnost bodu M ke kružnici k

Věta 49. *Je dána kružnice $k(S; r)$ a bod M, který na ní neleží. Potom pro libovolné dvě sečny kružnice k, které procházejí bodem M, jejichž průsečíky s kružnicí k označíme X_1, Y_1 a X_2, Y_2, platí*

$$|MX_1| \cdot |MY_1| = |MX_2| \cdot |MY_2|.$$

Věta 50. *Nechť je dána kružnice $k(S; r)$ a bod M. Potom pro mocnost m bodu M ke kružnici k platí*

$$m = d^2 - r^2,$$

kde $d = |MS|$ je vzdálenost bodu M od středu kružnice k.

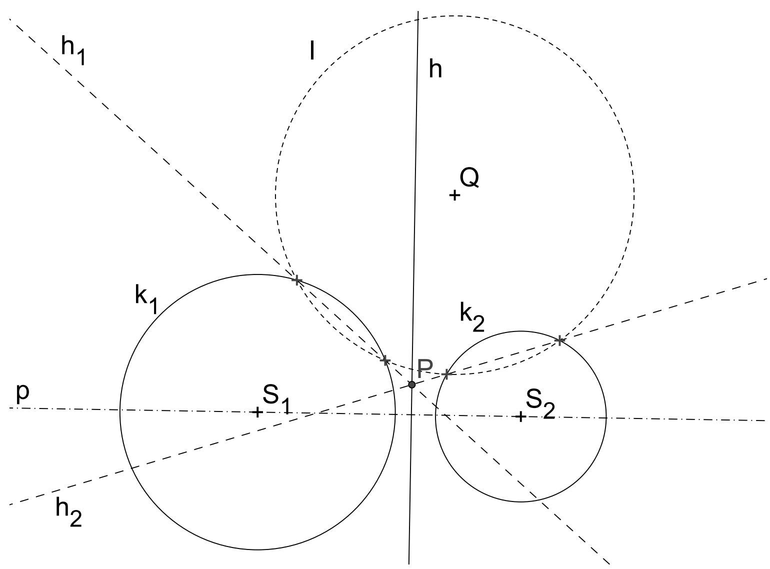
Věta 51. *Nechť M je vnější bod kružnice $k(S; r)$, m jeho mocnost ke kružnici k. Jestliže T je dotykový bod tečny vedené z bodu M ke kružnici k, tak platí $|MT|^2 = m$.*

12.1 Chordála a potenční střed

Věta 52 (Chordála dvojice kružnic)**.** *Nechť jsou $k_1(S_1; r_1), k_2(S_2; r_2)$ dvě nesoustředné kružnice. Množina bodů X, které mají k oběma kružnicím stejnou mocnost, je přímka $h \perp S_1S_2$. Jestliže kružnice k_1, k_2 mají společný bod M, potom přímka h prochází tímto bodem.*

Poznámka. Přímka h, která je množinou bodů X, majících stejnou mocnost k nesoustředným kružnicím k_1, k_2 se nazývá **chordála** (též potenční přímka) kružnic k_1, k_2.

Poznámka. Bod, který má ke třem vzájemně různým kružnicím stejnou mocnost se nazývá **potenční bod** (též potenční střed).



Obrázek 32: Chordála h kružnic k_1, k_2, potenční bod P kružnic k_1, k_2, l

Analytické vyjádření chordály

Chordálu kružnic $k_1(S_1[m_1, n_1], r_1)$, $k_2(S_2[m_2, n_2], r_2)$ s rovnicemi $k_1: \ (x - m_1)^2 + (y - n_1)^2 = r_1^2$ a $k_2: \ (x - m_2)^2 + (y - n_2)^2 = r_2^2$ můžeme analyticky vyjádřit rovnicí:

$$(x - m_1)^2 + (y - n_1)^2 - r_1^2 = (x - m_2)^2 + (y - n_2)^2 - r_2^2 \qquad (82)$$

PŘÍKLAD 12.1. *Sestrojte chordálu dvou nesoustředných kružnic k_1, k_2, které nemají společný bod.*

PŘÍKLAD 12.2. *Určete analyticky množinu všech bodů roviny, které mají ke dvěma daným kružnicím stejnou mocnost.*

PŘÍKLAD 12.3. *Sestrojte kružnici k, která prochází danými body $A \neq B$ a dotýká se dané přímky t.*

12.2 Cvičení – Mocnost bodu ke kružnici

69. Je dán úhel $\angle AVB$ a uvnitř něho bod M. Sestrojte kružnici, která prochází bodem M a dotýká se přímek AV, BV.

70. Obdélník má velikosti stran a, b. Máme sestrojit

a) libovolný obdélník stejného obsahu,

b) obdélník stejného obsahu, jehož jedna strana má danou velikost c.

71. Jsou dány dvě nesoustředné kružnice k_1, k_2 a přímka p. Na této přímce určete bod P tak, aby tečny z něho vedené ke kružnicím k_1, k_2 měly stejnou délku.

72. Sestrojte kružnici, která se dotýká dané kružnice $k(S; r)$ a prochází dvěma různými body A, B, které leží vně dané kružnice k.

73. Je dán lichoběžník $ABCD$ se základnami AB, CD, $|AB| > |CD|$. Uvnitř úsečky AD sestrojte bod P a uvnitř úsečky BC bod Q tak, aby platilo zároveň $PQ||AB$ a $PC||AQ$.

74. Sestrojte lichoběžník $ABCD$, jsou-li dány délky jeho ramen $|BC| = 4.5cm$, $|DA| = 3cm$ a velikost $75°$ úhlu, který svírají přímky BC a AD, platí-li navíc $|AB||CD| = |AC|^2$.