

GEOMETRIE 3 - KMA/GE3SŽ

(celoživotní vzdělávání)

Roman HAŠEK

11. února 2018

Obsah

1	Připomenutí vybraných pojmů	3
1.1	Grupa	3
1.2	Těleso	4
1.3	Vektorový prostor	4
1.4	Afinní bodový prostor	5
1.5	Afinní souřadnice bodů	6
1.6	Eukleidovský bodový prostor	6
1.7	Zobrazení	7
2	Dělicí poměr	11
2.1	Barycentrické souřadnice	12
3	Afinní zobrazení	14
3.1	Rovnice afinního zobrazení z A_n do A_m	16
3.2	Rovnice homomorfismu asociovaného s afinním zobrazením	17
3.3	Věta o určenosti afinního zobrazení	18
3.4	Cvičení – Afinní zobrazení	19
4	Afnita	20
4.1	Afnita v rovině	21
4.2	Rovnice afnity v rovině	21
4.3	Věta o určenosti afnity v rovině	23
4.4	Afnita prostoru A_n	25
4.5	Rovnice afnity prostoru A_n	26
4.6	Modul afnity	26
4.7	Afnita přímá a nepřímá, ekviafnita	28
4.8	Cvičení – Afnita	29
5	Skládání afinních zobrazení	30
5.1	Afinní grupa v A_n	30
5.2	Souvislost mezi skládáním afinních zobrazení a násobením matic	31
6	Samodružné body a směry afnity	33
6.1	Samodružné body	33
6.2	Samodružné směry	34
6.3	Homotetie, grupa homotetií	43

7	Osová afinita	44
7.1	Základní afinity	44
7.2	Osová afinita v rovině	44
7.3	Cvičení – Osová afinita	46
8	Shodnosti v rovině	47
8.1	Osová souměrnost	47
8.2	Otočení	52
8.3	Středová souměrnost	55
8.4	Posunutí	57
8.5	Posunuté zrcadlení	59
9	Grupa shodností eukleidovského prostoru	62
9.1	Shodné zobrazení v rovině	62
9.2	Rovnice shodnosti v rovině	63
9.3	Analytická vyjádření shodných zobrazení v E_2	65
9.4	Analytická vyjádření vybraných shodných zobrazení v E_3	66
9.5	Skládání shodných zobrazení	67
9.6	Grupa shodností v rovině	67
9.7	Klasifikace shodností roviny	69
9.8	Cvičení – Shodnosti v rovině	76
9.9	Klasifikace shodností prostoru E_3	78
9.10	Cvičení – Shodnosti prostoru E_3	81
9.11	Shodná zobrazení v prostoru E_n	81
10	Grupa podobností eukleidovského prostoru	82
10.1	Podobné zobrazení	82
10.2	Podobnosti eukleidovské roviny	84
10.3	Cvičení – Podobnosti	86
11	Stejnolehlost	88
11.1	Analytické vyjádření stejnoolehlosti	89
11.2	Skládání stejnoolehlostí	89
11.3	Stejnolehlost kružnic	90
11.4	Cvičení – Stejnolehlost	91

12 Mocnost bodu ke kružnici	93
12.1 Chordála a potenční střed	94
12.2 Cvičení – Mocnost bodu ke kružnici	95
13 Vybrané věty z planimetrie	96
13.1 Cevova věta a její užití	96
13.2 Menelaova věta	99
13.3 Kružnice devíti bodů	101
13.4 Eulerova přímka	102
13.5 Simsonova přímka	104
13.6 Morleyova věta	105
13.7 Napoleonova věta	106
14 Axiomatická výstavba geometrie	107
14.1 Hilbertova soustava axiomů eukleidovské geometrie	108
15 Neeukleidovské geometrie	119
15.1 Problém rovnoběžek	119
15.2 Lobačevského geometrie [IUSDnonR]	119
15.3 Riemannova geometrie	122

1 Připomenutí vybraných pojmů

1.1 Grupa

Definice 1 ((Komutativní) grupa). *Grupou $(M, *)$ rozumíme množinu M spolu s operací $*$ na M , která má tyto vlastnosti:*

- i) $\forall x, y \in M; x * y \in M$,
Operace $$ je neomezeně definovaná na M .
 (Množina M je uzavřená vzhledem k operaci $*$.)*
- ii) $\forall x, y, z \in M; x * (y * z) = (x * y) * z$,
Operace (struktura) je asociativní.
- iii) $\exists e \in M, \forall x \in M; x * e = e * x = x$,
Existuje neutrální prvek vzhledem k $$.
 (Jedná se o strukturu s neutrálním prvkem.)*
- iv) $\forall x \in M, \exists y \in M; x * y = y * x = e$.
Ke každému prvku existuje prvek inverzní vzhledem k $$.
 (Jedná se o strukturu s inverzními prvky.)*

*Je-li struktura $(M, *)$ navíc komutativní, nazývá se komutativní grupa nebo též Abelova grupa.*

Příklady grup

1. $(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{Q}, +)$, $(\mathbb{R}, +)$, $(\mathbb{C}, +)$,
2. $(\mathbb{Q} - \{0\}, \cdot)$, $(\mathbb{R} - \{0\}, \cdot)$, $(\mathbb{C} - \{0\}, \cdot)$,
3. Množina povelů {stát, vlevo vbok, vpravo vbok, čelem vzad} spolu s operací skládání.

o	pozor	vlevo v bok	vpravo v bok	čelem vzad
pozor	pozor	vlevo v bok	vpravo v bok	čelem vzad
vlevo v bok	vlevo v bok	čelem vzad	pozor	vpravo v bok
vpravo v bok	vpravo v bok	pozor	čelem vzad	vlevo v bok
čelem vzad	čelem vzad	vpravo v bok	vlevo v bok	pozor

4. Uvažujme rovnostranný trojúhelník ABC v rovině ρ . Grupou je potom množina všech transformací roviny, v nichž se trojúhelník zobrazí sám na sebe, spolu s operací skládání transformací (hovoříme o tzv. dihedralní grupě, viz též grupy symetrií).

1.2 Těleso

Tělesem jako algebraickou strukturou rozumíme strukturu jejíž vlastnosti jsou zobecněním vlastností množiny reálných čísel spolu s operacemi sčítání a násobení, tj. struktury $(R, +, \cdot)$.

Definice 2. *Struktura $(T, +, \cdot)$ se nazývá těleso, právě když je $(+, \cdot)$ -distributivní, když struktura $(T, +)$ je komutativní grupa (tzv. aditivní grupa tělesa) a když struktura $(T - \{0\}, \cdot)$, kde 0 je nulový prvek grupy $(T, +)$, je grupa (tzv. multiplikativní grupa tělesa T). Je-li navíc grupa $(T - \{0\}, \cdot)$ komutativní, nazývá se T komutativní těleso.*

Příklady těles

1. $(Q, +, \cdot)$,
2. $(R, +, \cdot)$,
3. $(C, +, \cdot)$.

1.3 Vektorový prostor

Definice 3 (Vektorový prostor). *Nechť T je komutativní těleso. Množinu V nazveme vektorovým prostorem nad tělesem T , právě když jsou na V definovány dvě operace: (i) sčítání: libovolné dvojici $\vec{u} \in V, \vec{v} \in V$ je jednoznačně přiřazen prvek $\vec{u} + \vec{v} \in V$, (ii) násobení prvkem z tělesa T (skalárem): výsledkem násobení vektoru $\vec{u} \in V$ skalárem $a \in T$ je vektor $a\vec{u} \in V$, které splňují následující vlastnosti:*

- a) *Struktura $(V, +)$ je komutativní grupa.*
- b) *Distributivnost: $(a + b)\vec{u} = a\vec{u} + b\vec{u}$, $a(\vec{u} + \vec{v}) = a\vec{u} + a\vec{v}$.*
- c) *Existence jednotkového prvku skalárního násobení: $1 \cdot \vec{u} = \vec{u}$.*

Příklady vektorových prostorů

1. Množina R^2 všech uspořádaných dvojic reálných čísel s operacemi sčítání uspořádaných dvojic a násobení reálným číslem definovanými následujícím způsobem: $(a_1, a_2) + (b_1, b_2) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2)$, $k \cdot (a_1, a_2) = (ka_1, ka_2)$ (jedná se o tzv. **aritmetický vektorový prostor R^2** nad tělesem reálných čísel).
2. Množina geometrických vektorů v rovině (orientovaných úseček) spolu s operací skládání vektorů a násobení vektoru reálným číslem, jak jsou známy ze školské matematiky.

1.4 Afinity bodový prostor

Definice 4 (Afinity bodový prostor). Neprázdnou množinu A_n (její prvky jsou tzv. body) nazveme afinity bodovým prostorem dimenze n , jestliže je dán vektorový prostor V_n dimenze n a zobrazení

$$g : A_n \times A_n \rightarrow V_n$$

těchto vlastností:

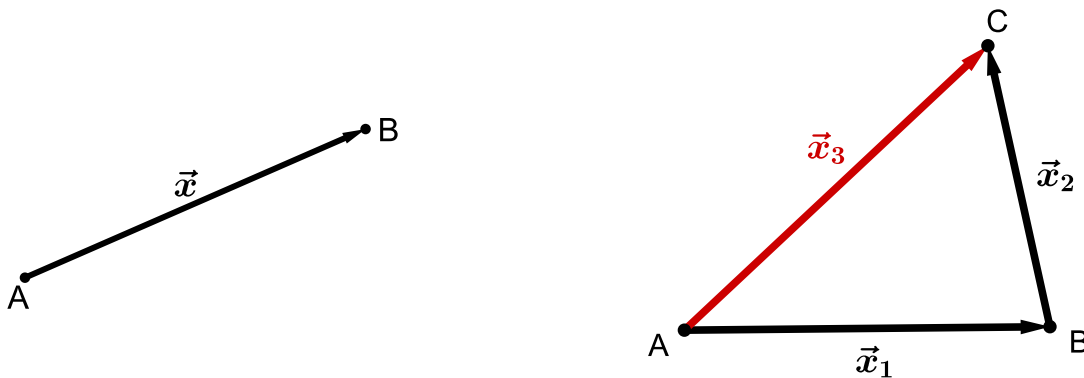
1. Pro každý bod $A \in A_n$ a pro každý vektor $\vec{x} \in V_n$ existuje jediný bod $B \in A_n$ tak, že

$$g(A, B) = \vec{x} \quad \text{t.j.} \quad B = A + \vec{x}.$$

2. Pro každé tři body $A, B, C \in A_n$ platí, že

$$g(A, C) = g(A, B) + g(B, C).$$

Vektorový prostor V_n nazýváme vektorovým zaměřením afinity prostoru A_n .



Příklady afinity bodového prostoru

1. Jednoprvková množina se zaměřením $V_0 = \{\vec{0}\}$ je afinity bodový prostor dimenze 0.

2. Eukleidovské prostory E_1 (přímka), E_2 (rovina), E_3 ((trojrozměrný) prostor).

3. Samotný vektorový prostor V_n splňuje definici afinity bodového prostoru (naopak to samozřejmě neplatí, nelze říci, že afinity bodový prostor je zároveň vektorovým prostorem). Platí

$$g(\vec{u}, \vec{v}) = \vec{v} - \vec{u}.$$

1.5 Afinity souřadnice bodů

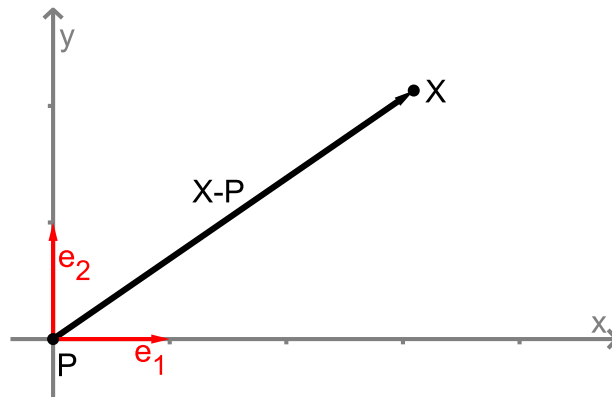
Definice 5 (Afinní soustava souřadnic - repér). *Nechť P je libovolný bod z afinního prostoru A_n , $n > 0$. Nechť $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$ je báze vektorového zaměření V_n prostoru A_n . Potom uspořádanou $(n + 1)$ -tici*

$$\varphi = (P, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$$

nazýváme afinní soustavou souřadnic φ (též repérem φ) v prostoru A_n .

Souřadnicemi bodu $X \in A_n$ v soustavě souřadnic φ budeme rozumět souřadnice vektoru $X - P$ v bázi $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$.

Definice 6 (Kartézská soustava souřadnic). *Kartézskou soustavou souřadnic rozumíme afinní soustavu souřadnic $(P; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$, kde $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$ je ortonormální báze.*



1.6 Eukleidovský bodový prostor

Definice 7 (Eukleidovský bodový prostor). *Eukleidovským bodovým prostorem E_n rozumíme afinní bodový prostor, na jehož zaměření je definován skalární součin.*

Definice 8 (Skalární součin). *Skalárním součinem rozumíme operaci, která každé dvojici vektorů $\vec{u}, \vec{v} \in V$ přiřazuje reálné číslo (skalár) $\vec{u} \cdot \vec{v} \in R$ tak, že platí:*

1. $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$, (SYMETRIE)
2. $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$, (BILINEARITA, vlastnosti 2 a 3)
3. $(k\vec{u}) \cdot \vec{v} = k(\vec{u} \cdot \vec{v})$,
4. $\vec{u} \cdot \vec{u} \geq 0 \wedge [\vec{u} \cdot \vec{u} = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{o}]$. (POZITIVITA)

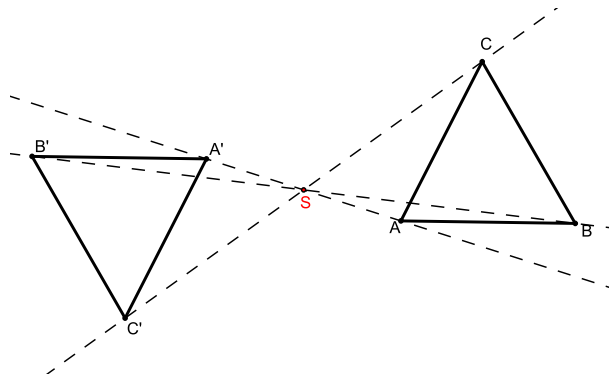
1.7 Zobrazení

Definice 9 (Geometrické zobrazení). *Zobrazením (geometrickým zobrazením) rozumíme předpis, kterým je libovolnému bodu X (který je prvkem dané množiny, např. roviny) jako jeho obraz jednoznačně přiřazen bod $X' = f(X)$.*

Definice 10 (Vzájemně jednoznačné zobrazení). *Vzájemně jednoznačným zobrazením rozumíme zobrazení, které je prosté a zároveň je zobrazením na množinu (tj. že dvěma různými body (vzory) jsou přiřazeny dva různé obrazy a zároveň platí, že každý bod množiny, do níž zobrazujeme, je obrazem nějakého bodu z množiny vzorů).*

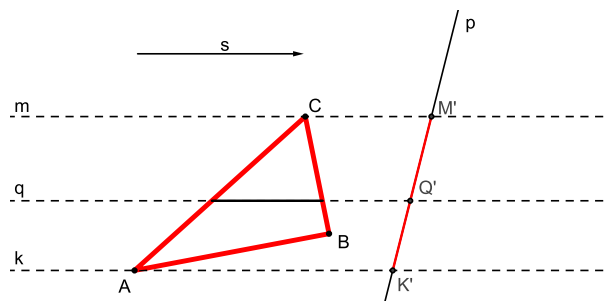
Příklady geometrických zobrazení

1. Příkladem vzájemně jednoznačného geometrického zobrazení je středová souměrnost (stejně jako všechna ostatní shodná zobrazení i stejnoolehlost).



Obrázek 1: Středová souměrnost se středem S

2. Příkladem geometrického zobrazení v rovině, které není prosté, je rovnoběžné promítání do přímky, které je dáno směrem \vec{s} a přímkou p , viz Obr. 2. Z obrázku

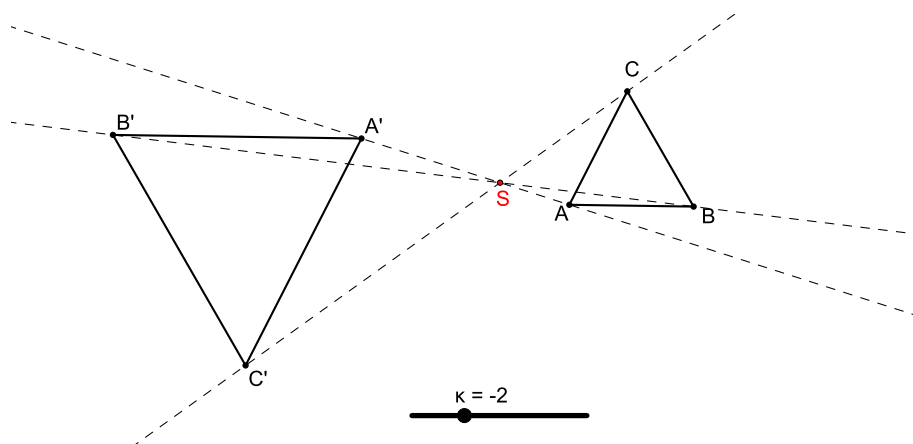


Obrázek 2: Rovnoběžné promítání ve směru \vec{s} z roviny do přímky p

je patrné, že všechny body přímky rovnoběžné se směrem \vec{s} se zobrazují do jednoho bodu. Například body přímek k, m, q se v uvedeném pořadí zobrazují do bodů K', M', Q' .

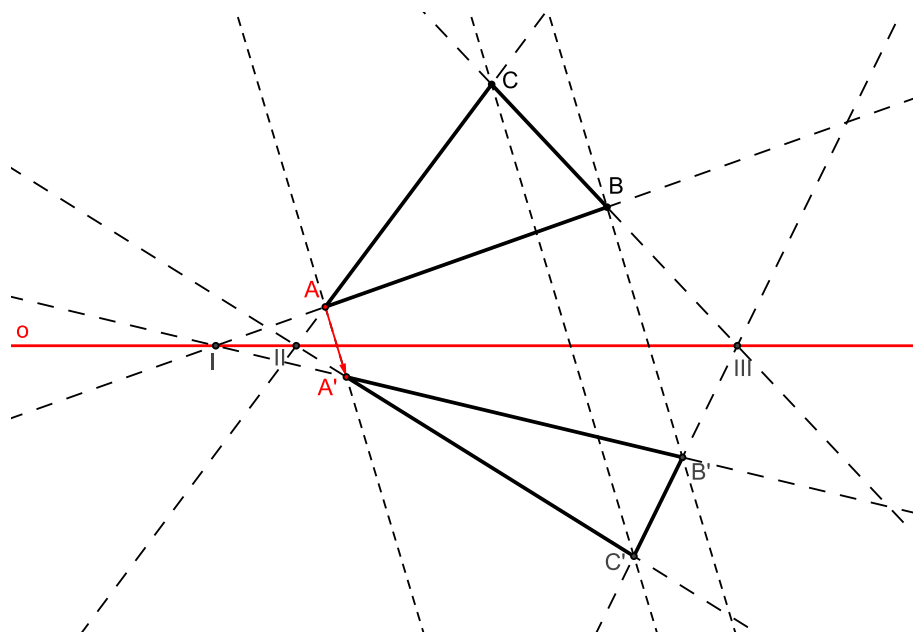
Další příklady geometrických zobrazení:

3. Stejnolehlost.



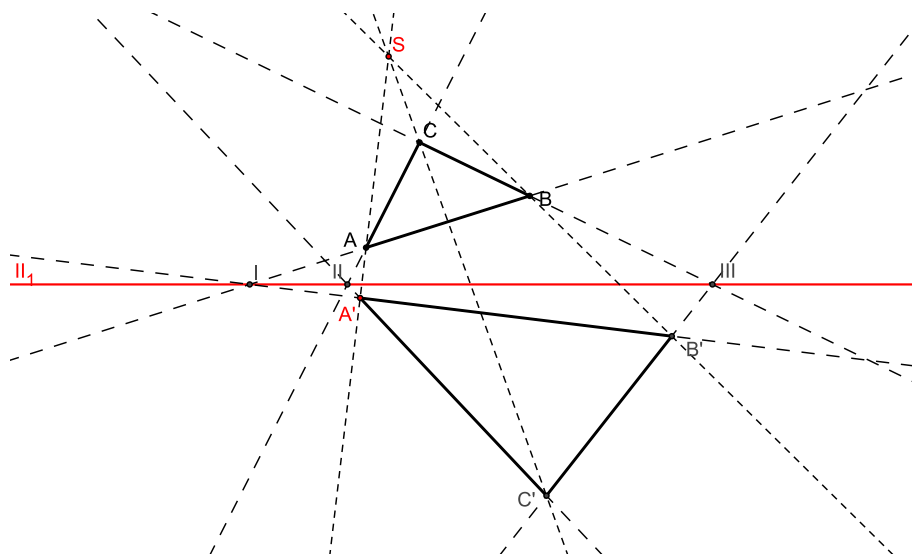
Obrázek 3: Stejnolehlost se středem S a s koeficientem $\kappa = -2$

4. Osová afinita.



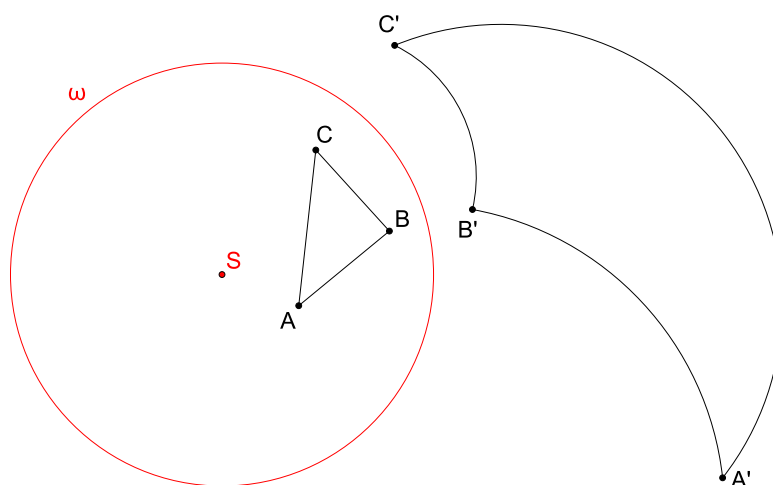
Obrázek 4: Osová afinita daná osou o a dvojicí bodů A, A'

5. Středová kolineace.



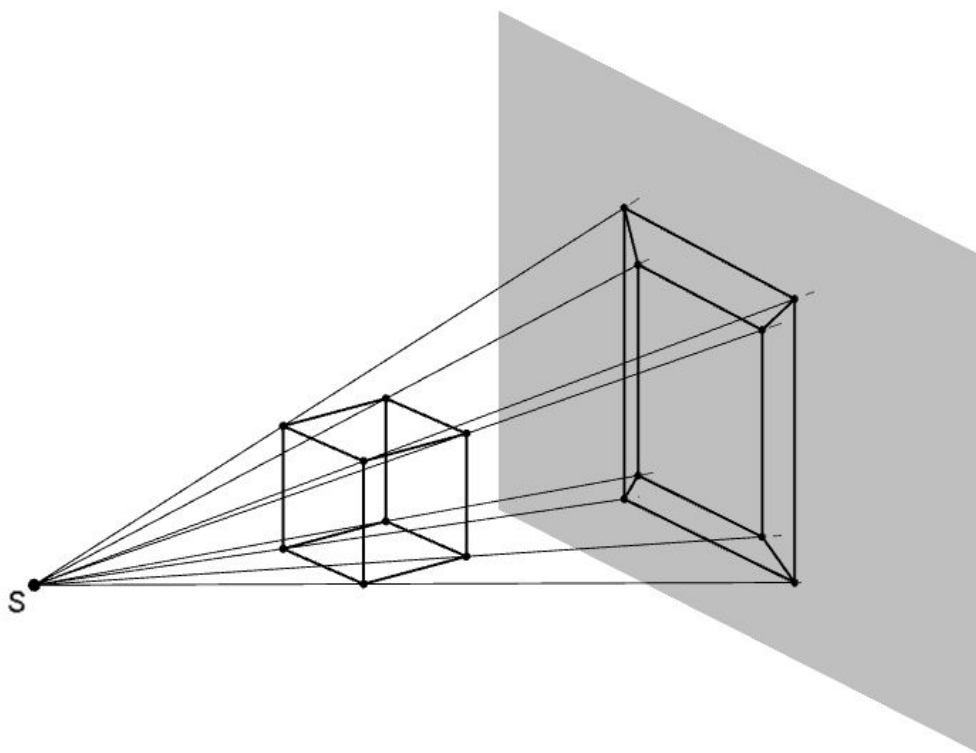
Obrázek 5: Středová kolineace daná středem S , osou o a dvojicí bodů A, A'

6. Kruhová inverze.



Obrázek 6: Kruhová inverze daná kružnicí ω

7. Středové promítání.



Obrázek 7: Středové promítání z trojrozměrného prostoru do roviny

PŘÍKLAD 1.1. Pomocí programu GeoGebra vyzkoumejte, zda se v následujících zobrazeních zobrazí střed úsečky zase na střed úsečky: stejnoolehlost, osová afinita, středová kolineace, kruhová inverze.

2 Dělicí poměr

Dělicím poměrem zde rozumíme číslo, které jednoznačně udává polohu bodu na přímce vzhledem ke dvěma pevně daným bodům této přímky.



Obrázek 8: Tři kolineární body

Definice 11 (Dělicí poměr). *Nechť A, B, C ; $A \neq B$, $C \neq B$, jsou tři body ležící na přímce (tj. tři kolineární body). Dělicím poměrem bodu C vzhledem k bodům A, B rozumíme reálné číslo λ , které zapisujeme (ABC) , a pro jehož absolutní hodnotu platí*

$$|(ABC)| = \frac{|AC|}{|BC|}, \quad (1)$$

přitom pro bod C ležící vně úsečky AB je $(ABC) > 0$ a pro bod C ležící uvnitř AB je $(ABC) < 0$. Pro $C = A$ je zřejmě $(ABC) = 0$.

Poznámka. Uvedená definice zavádí dělicí poměr pomocí podílu vzdáleností bodu C od daných bodů A, B . Protože vzdálenosti jsou kladné, nepřináší jejich podíl žádnou informaci o znaménku dělicího poměru, kterému pak musí být věnována zvláštní část definice. Tomu se vyhneme, pokud použijeme k zavedení pojmu dělicí poměr odpovídající vektory definované příslušnou trojicí bodů, viz Obr.9.



Obrázek 9: Dělicí poměr bodu C vzhledem k bodům A, B

Definice 12 (Dělicí poměr 2). *Nechť A, B, C ; $A \neq B$, $C \neq B$, jsou tři body ležící na přímce (tj. tři kolineární body). Potom číslo λ definované rovnicí*

$$C - A = \lambda(C - B) \quad (2)$$

značíme (ABC) a nazýváme dělicím poměrem bodu C vzhledem k bodům A, B .

Poznámka. Ve vztahu (2) je obsažena kompletní informace o čísle λ , tj. o jeho absolutní hodnotě i o znaménku. Pro snazší zapamatování si můžeme (2) přepsat do tvaru

$$\lambda = \frac{C - A}{C - B},$$

který sice není formálně správně, ale jasně koresponduje se vztahem (1). Smysl získá až dosazením souřadnic bodů $A = [a_1; a_2]$, $B = [b_1; b_2]$, $C = [c_1; c_2]$:

$$\lambda = \frac{c_1 - a_1}{c_1 - b_1} = \frac{c_2 - a_2}{c_2 - b_2}.$$

PŘÍKLAD 2.1. Určete dělicí poměr (ABS) středu S úsečky AB vzhledem k jejím krajním bodům A, B .

PŘÍKLAD 2.2. Pro body A, B, C platí $(ABC) = \lambda$. Zapište pomocí λ dělicí poměry $(BAC), (CBA), (ACB), (CAB)$ a (BCA) .

Řešení: Vztah (2) pro $(ABC) = \lambda$ přepíšeme do tvaru $A = \lambda B + (1 - \lambda)C$. Odtud po vydělení λ dostaneme $B = \frac{1}{\lambda}A + (1 - \frac{1}{\lambda})C$. Odtud je zřejmé, že $(BAC) = \frac{1}{\lambda}$. Poznamenejme ještě, že ke stejnému výsledku vede také toto odvození: $(BAC) = \frac{C - B}{C - A} = \frac{1}{\frac{C-A}{C-B}} = \frac{1}{\lambda}$.

Analogicky odvodíme vyjádření dalších dělicích poměrů v rámci dané trojice bodů: $(CBA) = \frac{\lambda}{\lambda - 1}$, $(ACB) = 1 - \lambda$, $(CAB) = \frac{1}{1 - \lambda}$ a $(BCA) = 1 - \frac{1}{\lambda}$.

PŘÍKLAD 2.3. V rovině jsou dány dva pevné body A, B . Určete množinu všech bodů X této roviny, pro které platí

$$\frac{|AX|}{|BX|} = k,$$

kde k je reálná konstanta.

Řešení: Hledanou množinou je kružnice, které je známá jako „Apolloniova kružnice“. Nalezení její rovnice si usnadníme vhodným umístěním bodů A, B vzhledem k souřadnicovým osám. Konkrétně je umístíme na osu x tak, že $A = [-a, 0]$ a $B = [a, 0]$, kde $a \in \mathbb{R}$. Potom má vyšetřovaná množina bodů $X = [x, y]$ rovnici

$$\left(x - \frac{a(k^2 + 1)}{k^2 - 1}\right)^2 + y^2 = \frac{4a^2k^2}{(k^2 - 1)^2},$$

která skutečně odpovídá kružnici.

2.1 Barycentrické souřadnice

Výše uvedené skutečnosti nás mohou přivést k možnosti vyjádření polohy bodu nezávisle na volbě soustavy souřadnic. Bod C můžeme, při zvolených bodech A, B , zapsat takto:

$$C = \frac{1}{1 - \lambda}A - \frac{\lambda}{1 - \lambda}B.$$

Jedná se o příklad tzv. barycentrických¹ souřadnic.

Barycentrické souřadnice vzhledem ke dvěma bodům

Bod X leží na přímce AB právě tehdy, když existují dvě čísla $\alpha, \beta \in R$ taková, že platí

$$X = \alpha A + \beta B, \quad \alpha + \beta = 1.$$

Tato čísla nazýváme **barycentrickými souřadnicemi** bodu X vzhledem k bodům A, B . Rovnice $X = \alpha A + \beta B$, kde $\alpha + \beta = 1$ se nazývá **bodová rovnice přímky**.

Poznámka. Analogicky můžeme zavést barycentrické souřadnice bodu X vzhledem ke třem, čtyřem, obecně pak k bodům. Proveďte pro $k = 3, 4$.

PŘÍKLAD 2.4. Napište barycentrické souřadnice středu úsečky AB vzhledem k jejím krajním bodům.

PŘÍKLAD 2.5. Napište barycentrické souřadnice těžiště trojúhelníku ABC vzhledem k jeho vrcholům.

Věta 1. V prostoru E_k zvolme $k + 1$ bodů A_i , $k + 1$ čísel α_i a $k + 1$ čísel β_i , kde $i \in \{1, 2, \dots, k + 1\}$. Potom platí:

a) Bod X definovaný vztahem

$$X = \alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \dots + \alpha_{k+1} A_{k+1}$$

je definován nezávisle na volbě soustavy souřadnic právě tehdy, když

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_{k+1} = 1.$$

b) Vektor \vec{u} definovaný vztahem

$$\vec{u} = \beta_1 A_1 + \beta_2 A_2 + \dots + \beta_{k+1} A_{k+1}$$

je definován nezávisle na volbě soustavy souřadnic právě tehdy, když

$$\beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_{k+1} = 0.$$

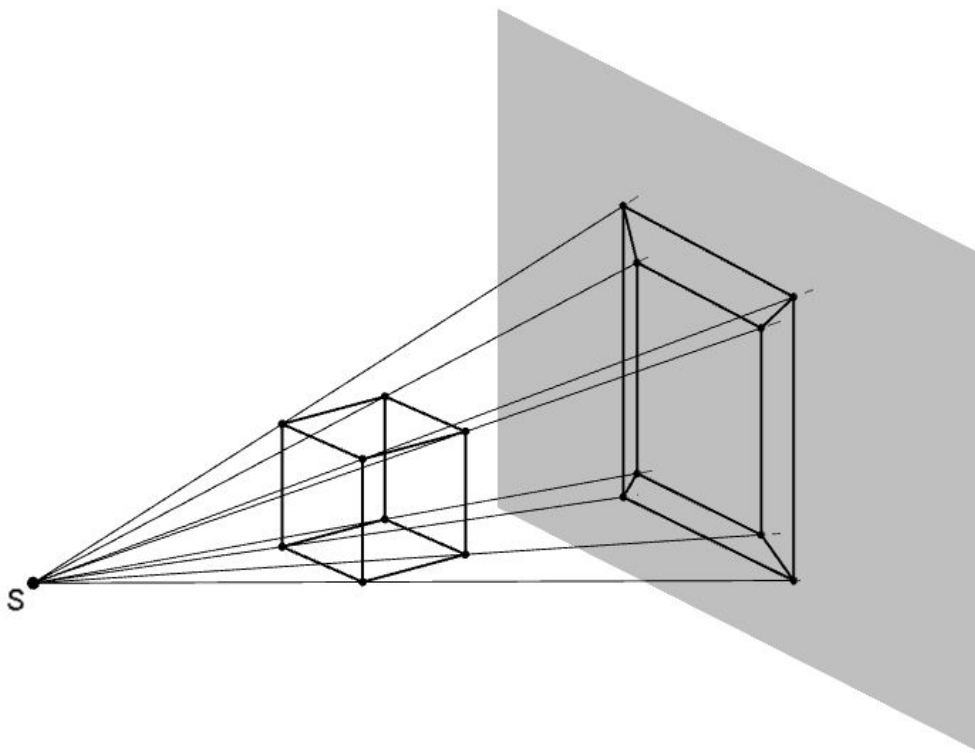
¹Barus znamená řecky těžký. Slovem *barycentrum* se označuje *hmotný střed* soustavy těles, většinou kosmických. Použití barycentrických souřadnic má analogii ve výpočtu polohy těžiště soustavy těles. Uvažujme například dvě bodová tělesa o hmotnostech m_1 a m_2 , která jsou umístěna v daném pořadí v bodech X a Y . Potom pro souřadnice těžiště T této soustvy dvou těles platí: $T = \frac{m_1 X + m_2 Y}{m_1 + m_2} = \frac{m_1}{m_1 + m_2} X + \frac{m_2}{m_1 + m_2} Y$, kde $\frac{m_1}{m_1 + m_2} + \frac{m_2}{m_1 + m_2} = 1$.

3 Afinity zobrazení

Afinní zobrazení (viz níže uvedená Def. 13) se obecně uskutečňuje mezi dvěma afinními bodovými prostory, jejichž dimenze nemusejí být stejné. Příkladem afinního zobrazení z prostoru A_3 do prostoru A_2 je středové promítání (z trojrozměrného prostoru do roviny) na Obr. 10.

Častěji se budeme setkávat s afinním zobrazením, které se uskutečňuje v rámci jednoho afinního bodového prostoru (většinou se bude jednat o rovinu, konkrétně o *eukleidovský prostor* E_2 nebo trojrozměrný prostor, konkrétně o *eukleidovský prostor* E_3). Je-li takové afinní zobrazení afinního bodového prostoru na sebe vzájemně jednoznačné, nazýváme ho *afinní transformace* daného bodového prostoru, zkráceně *afinita*.

Mezi afinity patří např. shodnosti v rovině nebo stejnoolehlost, které se vyučují v matematice na základních a středních školách.



Obrázek 10: Středové promítání z trojrozměrného prostoru do roviny

Definice 13 (Afinní zobrazení). Zobrazení f afinního prostoru A do afinního prostoru A' se nazývá *afinní*, jestliže má tuto vlastnost: Leží-li navzájem různé body B, C, D z prostoru A na přímce, pak jejich obrazy $f(B), f(C), f(D)$ buď splývají, nebo jsou navzájem různé, leží na jedné přímce a jejich dělicí poměr se rovná dělicímu poměru jejich vzorů, tj.:

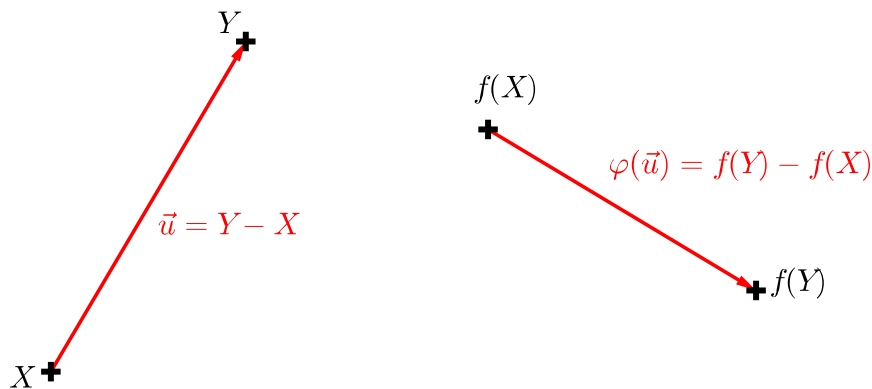
$$(f(B), f(C); f(D)) = (B, C; D).$$

Definice 14 (Asociovaný homomorfismus¹ zobrazení f). Uvažujme afinní zobrazení f prostoru A do prostoru A' , např. $f : E_2 \rightarrow E_2$. Potom **asociovaným** (tj. jednoznačně přiřazeným) **homomorfismem** afinního zobrazení f rozumíme lineární zobrazení φ , které zobrazuje zaměření V prostoru A do zaměření V' prostoru A' takto:

$$\vec{u} = Y - X \Rightarrow \varphi(\vec{u}) = f(Y) - f(X), \quad (3)$$

kde X, Y jsou body z A , $\vec{u} \in V$; $f(X), f(Y)$ body z A' , $\varphi(\vec{u}) \in V'$.

Role asociovaného homomorfismu φ afinního zobrazení f je patrná z Obr. 11. Afinní zobrazení f se uskutečňuje mezi body, tj. zobrazuje body X, Y po řadě na body $f(X), f(Y)$. Homomorfismus φ asociovaný s f potom „operuje“ na vektorech příslušejících dvojicím těchto bodů, tj. vektor $\vec{u} = Y - X$ zobrazuje na vektor $\varphi(\vec{u}) = f(Y) - f(X)$.



Obrázek 11: Asociovaný homomorfismus φ afinního zobrazení f

¹Zobrazení φ vektorového prostoru V do vektorového prostoru V' se nazývá *homomorfismus* (též „lineární zobrazení“), jestliže pro všechna $\vec{u}, \vec{v} \in V$, $k \in \mathbb{T}$ (místo obecného tělesa \mathbb{T} můžeme uvažovat \mathbb{R}) platí:

$$(1) \quad \varphi(\vec{u} + \vec{v}) = \varphi(\vec{u}) + \varphi(\vec{v}),$$

$$(2) \quad \varphi(k\vec{u}) = k\varphi(\vec{u}).$$

3.1 Rovnice afinního zobrazení z A_n do A_m

Nechť afinní bodový prostor A_n je určen počátkem P a bází $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$, tzn. $A_n = \{P; \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$. Podobně nechť $A'_m = \{Q; \vec{d}_1, \vec{d}_2, \dots, \vec{d}_m\}$. Nechť f je afinní zobrazení A_n do A'_m a φ asociované zobrazení k f tak, že

$$\varphi(\vec{e}_j) = \sum_{i=1}^m a_{ij} \vec{d}_i; \quad j = 1, \dots, n, \quad (4)$$

tzn. koeficienty a_{ij} jsou souřadnice vektorů $\varphi(\vec{e}_j)$ v bázi zaměření prostoru A_m ,

$$f(P) = Q + \sum_{i=1}^m b_i \vec{d}_i, \quad (5)$$

tzn. počátek $P \in A_n$ se zobrazuje do bodu $f(P) \in A'_m$, který má při počátku Q souřadnice b_i .

S ohledem na výše uvedené úmluvy nyní určíme vztah mezi souřadnicemi libovolného bodu $X \in A_n$ a jeho obrazu $f(X) \in A'_m$. Vyjádřeme souřadnice X , $f(X)$:

$$X = P + \sum_{j=1}^n x_j \vec{e}_j, \quad (6)$$

$$f(X) = Q + \sum_{i=1}^m x'_i \vec{d}_i. \quad (7)$$

Zobrazíme-li bod X v afinitě f , můžeme dle uvedených vlastností zobrazení f a φ psát:

$$f(X) = f(P) + \sum_{j=1}^n x_j \varphi(\vec{e}_j).$$

Po dosazení z (4) a (5) dostáváme

$$f(X) = Q + \sum_{i=1}^m b_i \vec{d}_i + \sum_{j=1}^n x_j \sum_{i=1}^m a_{ij} \vec{d}_i,$$

po úpravě

$$f(X) = Q + \sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j + b_i \right) \vec{d}_i. \quad (8)$$

Porovnáme-li koeficienty při \vec{d}_i ve vyjádřeních (7) a (8), dostáváme hledané rovnice

$$x'_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j + b_i, \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (9)$$

Jinou formou zápisu (9) je soustava rovnic

$$\begin{aligned} x'_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n + b_1 \\ x'_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n + b_2 \\ &\vdots \\ x'_n &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n + b_n, \end{aligned}$$

maticový zápis soustavy

$$\begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}, \quad (10)$$

případně maticová rovnice

$$\mathbf{X}' = A \cdot \mathbf{X} + B. \quad (11)$$

3.2 Rovnice homomorfismu asociovaného s afinním zobrazením

Nyní ještě určíme rovnice asociovaného zobrazení φ . Nechť vektor $\vec{u} \in V_n$ se zobrazí do vektoru $\varphi(\vec{u}) \in V'_m$. Pro souřadnice vzoru \vec{u} a obrazu $\varphi(\vec{u})$ platí

$$\vec{u} = \sum_{j=1}^n u_j \vec{e}_j; \quad (12)$$

$$\varphi(\vec{u}) = \sum_{i=1}^m u'_i \vec{d}_i \quad (13)$$

Na (12) aplikujeme zobrazení φ a upravíme dle (4). Dostaneme

$$\varphi(\vec{u}) = \sum_{j=1}^n u_j \varphi(\vec{e}_j) = \sum_{j=1}^n u_j \sum_{i=1}^m a_{ij} \vec{d}_i.$$

Po úpravě

$$\varphi(\vec{u}) = \sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} u_j \right) \vec{d}_i. \quad (14)$$

Srovnáním (14) s (13) dostaneme hledané rovnice asociovaného zobrazení:

$$u'_i = \sum_j^n a_{ij} u_j, \quad i = 1, \dots, m. \quad (15)$$

3.3 Věta o určenosti afinního zobrazení

Věta 2 (O určenosti afinního zobrazení). *Mějme dva afinní bodové prostory A_n, A'_m . Nechť $M_0, M_1, M_2, \dots, M_n$ je $n+1$ lineárně nezávislých bodů v A_n , M'_0, M'_1, \dots, M'_n $n+1$ libovolně zvolených bodů v A'_m . Pak existuje právě jedno afinní zobrazení f prostoru A_n do A'_m , které přiřazuje bodům M_j body M'_j tak, že*

$$M'_j = f(M_j); \quad j = 0, 1, \dots, n.$$

Důkaz. Ze Def. 14 asociovaného homomorfismu φ plyne, že jeho vztah k afinnímu zobrazení f lze vyjádřit vztahem $\varphi(X - P) = f(X) - f(P)$, který můžeme psát ve tvaru

$$f(X) = f(P) + \varphi(X - P). \quad (16)$$

Odtud je zřejmé, že afinní zobrazení f lze určit (zadat) jednou dvojicí bodů ve vztahu „vzor \rightarrow obraz“, v případě (16) je to dvojice $P \rightarrow f(P)$, a asociovaným homomorfismem φ . Z toho plyne důkaz věty 2: Afinní zobrazení je určeno dvojicí bodů „vzor \rightarrow obraz“ $M_0 \rightarrow M'_0$ a asociovaným homomorfismem φ jednoznačně určeným n nezávislými vektory $M_1 - M_0, M_2 - M_0, \dots, M_n - M_0$ a jejich obrazy (které mohou být závislé) $M'_1 - M'_0, M'_2 - M'_0, \dots, M'_n - M'_0$. \square

PŘÍKLAD 3.1. *Zjistěte, zda existuje afinní zobrazení $f : A_2 \rightarrow A_3$, při kterém se body $B[1, 0], C[0, 1], D[2, p]$ zobrazí po řadě na body $B'[2, 1, -1], C'[3, 2, 0], D'[1, 0, 2]$.*

Řešení v programu wxMaxima:

```
(%i1) r1:a11+b1=2; r2:a21+b2=1; r3:a31+b3=-1; r4:a12+b1=3; r5:a22+b2=2;
      r6:a32+b3=0; r7:2*a11+p*a12+b1=1; r8:2*a21+p*a22+b2=0;
      r9:2*a31+p*a32+b3=2;
```

```
(%o1) b1 + a11 = 2
```

$$(\%o2) \quad b2 + a21 = 1$$

$$(\%o3) \quad b3 + a31 = -1$$

$$(\%o4) \quad b1 + a12 = 3$$

$$(\%o5) \quad b2 + a22 = 2$$

$$(\%o6) \quad b3 + a32 = 0$$

$$(\%o7) \quad a12p + b1 + 2a11 = 1$$

$$(\%o8) \quad a22p + b2 + 2a21 = 0$$

$$(\%o9) \quad a32p + b3 + 2a31 = 2$$

```
(%i10) res:solve([r1,r2,r3,r4,r5,r6,r7,r8,r9],  
[a11,a12,a21,a22,a31,a32,b1,b2,b3])[1];
```

$$(\%o10) \quad [a11 = -1, a12 = 0, a21 = -1, a22 = 0, a31 = -\frac{p-3}{p+1}, a32 = \frac{4}{p+1}, b1 = 3, b2 = 2, b3 = -\frac{4}{p+1}]$$

```
(%i11) ev([x1=a11*x+a12*y+b1,y1=a21*x+a22*y+b2,z1=a31*x+a32*y+b3],res);
```

$$(\%o11) \quad [x1 = 3 - x, y1 = 2 - x, z1 = \frac{4y}{p+1} - \frac{(p-3)x}{p+1} - \frac{4}{p+1}]$$

PŘÍKLAD 3.2. Určete rovnici afinního zobrazení $f : A_2 \rightarrow A_1$, při kterém se body $[2, 1]$, $[3, 2]$, $[0, 1]$ zobrazí po řadě na body $[2]$, $[0]$, $[8]$.

PŘÍKLAD 3.3. Určete rovnice rovnoběžného promítání prostoru A_3 do průmětny $\pi \subset A_3$, vzhledem k pevné lineární soustavě souřadnic prostoru A_3 , je-li dána průmětna π rovnicí $2x_1 + x_2 - x_3 + 2 = 0$ a směr promítání je určen vektorem $\vec{s} = (2; 1; 3)$.

PŘÍKLAD 3.4. Určete rovnice afinního zobrazení $f : A_3 \rightarrow A_2$, které bodům $A = [1, 2, 3]$, $B = [0, 1, 1]$, $C = [1, -1, 2]$, $D = [3, 0, 1]$ přiřazuje v daném pořadí body $A' = [-1, 3]$, $B' = [0, 2]$, $C' = [0, 0]$, $D' = [3, 1]$.

3.4 Cvičení – Afinní zobrazení

1. Určete rovnici afinního zobrazení $f : A_2 \rightarrow A_1$, při kterém se body $[2, 1]$, $[3, 2]$, $[0, 1]$ zobrazí po řadě na body $[2]$, $[4]$, $[10]$.

2. Pro jaké hodnoty parametrů p, q existuje afinní zobrazení $f : A_2 \rightarrow A'_2$, při kterém se body $[2, 1]$, $[-2, 3]$, $[4, 0]$ zobrazí po řadě na body $[p, 3]$, $[0, q]$, $[1, 1]$.

4 Afinita

Afinita je stručný název pro *afinní transformaci prostoru*, tj. *vzájemně jednoznačné afinní zobrazení bodového prostoru A_n na sebe*.

Poznámka. „Vzájemně jednoznačným zobrazením“ rozumíme zobrazení, které je zároveň „prosté“ a „na množinu“.

Afinita má stejné analytické vyjádření jako obecné afinní zobrazení, viz (9), (10) nebo (11). Vzhledem k tomu, že se jedná o vzájemně jednoznačné zobrazení, je akorát matice afinity čtvercová a regulární. Afinitu tak lze zapsat maticovou rovnicí

$$\mathbf{X}' = A \cdot \mathbf{X} + B, \quad (17)$$

kde A je regulární čtvercová matice n -tého řádu a X, B a X' jsou matice typu $(n, 1)$. Jako příklady si uveďme afinity prostorů A_2 a A_3 .

Každé afinní zobrazení f afinní roviny A_2 do sebe je vzhledem k libovolně zvolené lineární soustavě souřadnic dáno rovnicemi:

$$\begin{aligned} f : x' &= a_{11}x + a_{12}y + b_1 \\ y' &= a_{21}x + a_{22}y + b_2 \end{aligned} \quad (18)$$

které můžeme zapsat jednou maticovou rovnicí ve tvaru

$$f : \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}. \quad (19)$$

Každé afinní zobrazení f v prostoru A_3 můžeme zapsat soustavou rovnic

$$\begin{aligned} g : x'_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + b_1 \\ x'_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + b_2, \\ x'_3 &= a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + b_3 \end{aligned} \quad (20)$$

nebo jednou maticovou rovnicí

$$g : \begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}. \quad (21)$$

PŘÍKLAD 4.1. *Zdůvodněte, proč ze skutečnosti, že afinita je vzájemně jednoznačným zobrazením, vyplývá, že její matice je regulární.*

4.1 Afinita v rovině

Budeme uvažovat speciální případ afinního zobrazení, kdy prostory A_n a A'_m splynou. Půjde nám tak o vzájemně jednoznačné zobrazení prostoru A_n (v našem případě E_2) na sebe.

Definice 15. *Vzájemně jednoznačné afinní zobrazení afinního prostoru E_2 na sebe nazýváme „afinitou“ prostoru E_2 nebo „afinní transformací prostoru E_2 .“*

Poznámka. Množina afinit v rovině spolu s operací skládání geometrických zobrazení tvoří grupu, tzv. „afinní grupu roviny“. Obecné formulaci této skutečnosti je věnována věta 9 na str. 30.

4.2 Rovnice afinity v rovině

Každé afinní zobrazení f v rovině E_2 , které bodu $X = [x, y]$ přiřazuje obraz $X' = [x', y']$, je možné zapsat rovnicemi

$$\begin{aligned} f : x' &= a_{11}x + a_{12}y + b_1 \\ y' &= a_{21}x + a_{22}y + b_2 \end{aligned} \quad (22)$$

a naopak, každé zobrazení v rovině, které je dáno soustavou rovnic (22), je afinitou v rovině. Soustavu (22) můžeme zapsat také pomocí matic

$$\begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}. \quad (23)$$

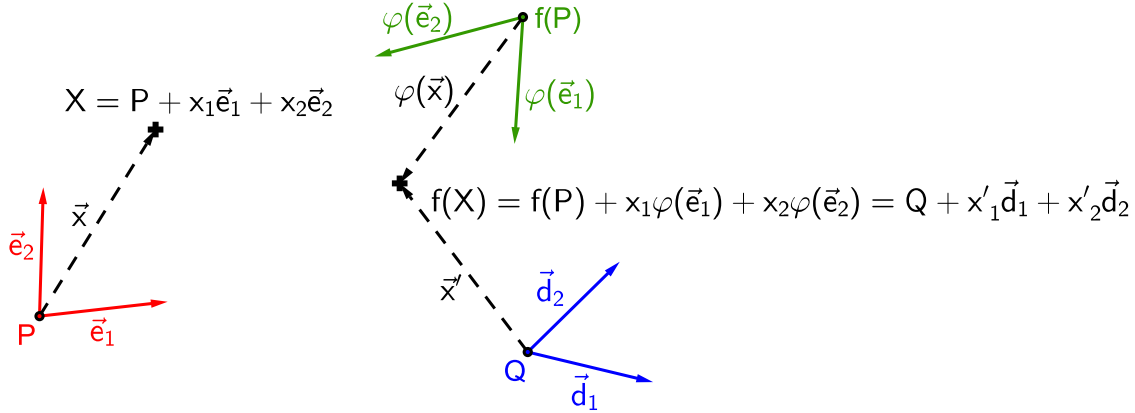
Potom řekneme, že afinitou je každé zobrazení, které lze zapsat maticovou rovnicí

$$\mathbf{X}' = A \cdot \mathbf{X} + B,$$

kde $X' = \begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ a $B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$.

Odvodíme si výše uvedené analytické vyjádření (22) afinního zobrazení f roviny na sebe (zkráceně „afinity“ v rovině). Základní myšlenka tohoto odvození je ilustrována Obr. 12. V rovině A_2 máme dvě afinní soustavy souřadnic (repéry), „soustavu vzorů“ $\alpha = \{P; \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ (je určena počátkem P a bází $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ vektorového zaměření prostoru A_2) a „soustavu obrazů“ $\omega = \{Q; \vec{d}_1, \vec{d}_2\}$ (určena počátkem Q a bází $\{\vec{d}_1, \vec{d}_2\}$ vektorového zaměření prostoru A_2). Přitom repér $\{P; \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ se působením uvažované

afinity f zobrazí na repér $\{f(P); \varphi(\vec{e}_1), \varphi(\vec{e}_2)\}$, kde φ homomorfismus (lineární zobrazení) asociovaný k f . Obrazem bodu $X = [x_1, x_2]$ je bod $f(X) = X' = [x'_1, x'_2]$. Vztah mezi souřadnicemi $f(X)$ a X najdeme tak, že bod $f(X)$ vyjádříme vzhledem k oběma repérům $\{Q; \vec{d}_1, \vec{d}_2\}$ a $\{f(P); \varphi(\vec{e}_1), \varphi(\vec{e}_2)\}$ (viz Obr. 12) a tato vyjádření porovnáme.



Obrázek 12: Zobrazení bodu X v afinitě f v rovině

Nechť f je afinní zobrazení prostoru A_2 na sebe a φ je homomorfismus asociovaný k f . Potom obrazy $\varphi(\vec{e}_1), \varphi(\vec{e}_2)$ vektorů báze $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ můžeme vyjádřit rovnicemi

$$\varphi(\vec{e}_1) = a_{11}\vec{d}_1 + a_{21}\vec{d}_2, \quad (24)$$

$$\varphi(\vec{e}_2) = a_{12}\vec{d}_1 + a_{22}\vec{d}_2, \quad (25)$$

kde koeficienty a_{ij} jsou souřadnice vektorů $\varphi(\vec{e}_1), \varphi(\vec{e}_2)$ vzhledem k bázi $\{\vec{d}_1, \vec{d}_2\}$ a pro obraz $f(P)$ počátku P repéru α můžeme psát

$$f(P) = Q + b_1\vec{d}_1 + b_2\vec{d}_2, \quad (26)$$

kde $[b_1, b_2]$ jsou jeho souřadnice vzhledem k repéru ω .

Nyní určíme vztah mezi souřadnicemi libovolného bodu $X \in A_2$ a jeho obrazu $X' = f(X) \in A_2$. Nejprve každý z těchto bodů zapíšeme v příslušném repéru, bod X v repéru α , bod $f(X)$ pak v repéru ω ,

$$X = P + x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2, \quad (27)$$

$$f(X) = Q + x'_1\vec{d}_1 + x'_2\vec{d}_2. \quad (28)$$

Potom, s využitím vlastností zobrazení f a φ , zapíšeme obraz bodu X ve tvaru

$$f(X) = f(P + x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2) = f(P) + \varphi(x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2) = f(P) + x_1\varphi(\vec{e}_1) + x_2\varphi(\vec{e}_2).$$

Po dosazení z (24), (25) a (26) dostáváme

$$f(X) = Q + b_1\vec{d}_1 + b_2\vec{d}_2 + x_1(a_{11}\vec{d}_1 + a_{21}\vec{d}_2) + x_2(a_{12}\vec{d}_1 + a_{22}\vec{d}_2).$$

Po úpravě a porovnání koeficientů při \vec{d}_i s vyjádřením (28) dostáváme hledané rovnice afinity f v rovině

$$\begin{aligned} f : x'_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + b_1, \\ x'_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + b_2. \end{aligned} \quad (29)$$

Nyní ještě určíme rovnice asociovaného zobrazení φ . Nechť vektor $\vec{u} \in V_2$ se zobrazí do vektoru $\varphi(\vec{u}) \in V_2$. Pro souřadnice vzoru \vec{u} a obrazu $\varphi(\vec{u})$ platí

$$\vec{u} = u_1\vec{e}_1 + u_2\vec{e}_2, \quad (30)$$

$$\varphi(\vec{u}) = u'_1\vec{d}_1 + u'_2\vec{d}_2. \quad (31)$$

Na (30) aplikujeme zobrazení φ a upravíme dle (24) a (25). Dostaneme

$$\varphi(\vec{u}) = u_1\varphi(\vec{e}_1) + u_2\varphi(\vec{e}_2) = u_1(a_{11}\vec{d}_1 + a_{21}\vec{d}_2) + u_2(a_{12}\vec{d}_1 + a_{22}\vec{d}_2).$$

Po úpravě a srovnání s (31) dostaneme hledané rovnice asociovaného zobrazení φ :

$$\begin{aligned} \varphi : u'_1 &= a_{11}u_1 + a_{12}u_2, \\ u'_2 &= a_{21}u_1 + a_{22}u_2. \end{aligned} \quad (32)$$

Soustavu rovnic afinity v rovině (29) můžeme zapsat také pomocí matic, takto

$$\begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix},$$

stručněji pak ve tvaru

$$\mathbf{X}' = A \cdot \mathbf{X} + B.$$

4.3 Věta o určenosti afinity v rovině

Věta 3 (O určenosti afinity v rovině). *Nechť K, L, M a K', L', M' jsou dvě skupiny nekolineárních bodů v rovině. Pak existuje jediná afinita f této roviny, která body K, L, M zobrazuje v daném pořadí na body K', L', M' .*

Důkaz. Využijeme (22). Afinita f musí být dána takovýmito rovnicemi. Ukážeme, že za podmínek uvedených ve větě je tato afinita určena jednoznačně, tj. existuje jediná šestice $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, b_1, b_2$, která tuto afinitu specifikuje.

Pro jednotlivé dvojice bodů „vzor \rightarrow obraz“ dostaneme následující rovnice:

$K[k_1, k_2] \rightarrow K'[k'_1, k'_2]$:

$$a_{11}k_1 + a_{12}k_2 + b_1 = k'_1, \quad (33)$$

$$a_{21}k_1 + a_{22}k_2 + b_2 = k'_2. \quad (34)$$

$L[l_1, l_2] \rightarrow L'[l'_1, l'_2]$:

$$a_{11}l_1 + a_{12}l_2 + b_1 = l'_1, \quad (35)$$

$$a_{21}l_1 + a_{22}l_2 + b_2 = l'_2. \quad (36)$$

$M[m_1, m_2] \rightarrow M'[m'_1, m'_2]$:

$$a_{11}m_1 + a_{12}m_2 + b_1 = m'_1, \quad (37)$$

$$a_{21}m_1 + a_{22}m_2 + b_2 = m'_2. \quad (38)$$

Pro známé souřadnice bodů K, L, M, K', L', M' tak máme soustavu 6 rovnic o 6 neznámých $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, b_1, b_2$. Zajímá nás, za jakých podmínek má jediné řešení. Tyto podmínky by se měly shodovat s obsahem věty 3. Po detailním prozkoumání rovnic (33)–(38) je patrné, že jejich soustava se dá rozdělit na dvě vzájemně nezávislé soustavy 3 rovnic o 3 neznámých: soustavu rovnic (33), (35) a (37) o neznámých a_{11}, a_{12}, b_1 a soustavu rovnic (34), (36) a (38) o neznámých a_{21}, a_{22}, b_2 . Přitom první z těchto soustav má rozšířenou matici

$$\left[\begin{array}{ccc|c} k_1 & k_2 & 1 & k'_1 \\ l_1 & l_2 & 1 & l'_1 \\ m_1 & m_2 & 1 & m'_1 \end{array} \right], \quad (39)$$

druhá má potom rozšířenou matici

$$\left[\begin{array}{ccc|c} k_1 & k_2 & 1 & k'_2 \\ l_1 & l_2 & 1 & l'_2 \\ m_1 & m_2 & 1 & m'_2 \end{array} \right]. \quad (40)$$

Soustavy se tedy shodují v matici soustavy (liší se pouze vektory pravých stran). Aby měly obě soustavy jediné řešení, musí být determinant této matice různý od nuly, tj.

$$\left| \begin{array}{ccc} k_1 & k_2 & 1 \\ l_1 & l_2 & 1 \\ m_1 & m_2 & 1 \end{array} \right| \neq 0. \quad (41)$$

Determinant v (41) snadno spočítáme eliminací jedniček na pozicích (2, 3) a (3, 3) postupným odečtením prvního řádku od druhého a třetího řádku a následným rozvojem takto upraveného determinantu podle třetího sloupce. Dostaneme tak podmínku

$$\begin{vmatrix} l_1 - k_1 & l_2 - k_2 \\ m_1 - k_1 & m_2 - k_2 \end{vmatrix} \neq 0, \quad (42)$$

kteřá je splněna právě tehdy, když jsou vektory $L - K$ a $M - K$ nezávislé, tj. body K, L, M neleží v přímce.

Teď zbývá dokázat, že když body K, L, M neleží v přímce, ani body K', L', M' nemohou ležet v přímce. Tentokrát využijeme maticovou rovnici afinity $X' = A \cdot X + B$. Pro uvedené dvojice bodů platí:

$$K' = A \cdot K + B, \quad (43)$$

$$L' = A \cdot L + B, \quad (44)$$

$$M' = A \cdot M + B. \quad (45)$$

Důkaz provedeme sporem. Předpokládáme, že K, L, M neleží v přímce a zároveň body K', L', M' leží v přímce. Potom existuje $j \in R$ takové, že $L' - K' = j(M' - K')$. Po dosazení z (43)–(45) a vynásobení obou stran rovnice zleva maticí inverzní k A dostaneme $L - K = j(M - K)$, což je spor s předpokladem nekolineárnosti bodů K, L, M . Body K', L', M' tedy také nemohou ležet v přímce. □

4.4 Afinita prostoru A_n

Definice 16. *Vzájemně jednoznačné afinní zobrazení afinního prostoru A_n na sebe nazýváme „afinitou“ prostoru A_n nebo „afinní transformací prostoru A_n “.*

Věta 4 (O určenosti). *Nechť $M_0, M_1, M_2, \dots, M_n$ a $M'_0, M'_1, M'_2, \dots, M'_n$ jsou dvě skupiny $(n + 1)$ lineárně nezávislých bodů afinního prostoru A_n . Pak existuje jediná afinita f prostoru A_n , pro kterou*

$$f(M_i) = M'_i, \quad i = 0, 1, \dots, n.$$

Jestliže v uvedené větě určíme pomocí dvou jmenovaných skupin lineárně nezávislých bodů dvě afinní souřadnicové soustavy prostoru A , pak tyto soustavy určují příslušnou afinitu f uvažovaného prostoru.

Věta 5. *Nechť v afinním bodovém prostoru A_n jsou dány dvě afinní souřadnicové soustavy $A_n = \{P; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$; $A_n = \{Q; \vec{d}_1, \vec{d}_2, \dots, \vec{d}_n\}$. Pak existuje jediná afinita prostoru A_n , pro kterou*

$$f(P) = Q$$

a asociované zobrazení φ

$$\varphi(\vec{e}_i) = \vec{d}_i, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

4.5 Rovnice afinity prostoru A_n

Afinitu prostoru A_n chápeme jako speciální případ afinního zobrazení z A_n do A'_m , kde $m = n$. Potom je tato afinita určena rovnicemi

$$x'_i = \sum_j^n a_{ij}x_j + b_i, \quad i = 1, \dots, n \quad (46)$$

zobrazujícími bod $X = (x_1, \dots, x_n)$ do bodu $X' = (x'_1, \dots, x'_n)$. Zobrazení asociované

$$u'_i = \sum_j^n a_{ij}u_j, \quad i = 1, \dots, n \quad (47)$$

zobrazuje vektor $\vec{u}(u_1, \dots, u_n)$ do $\vec{u}'(u'_1, \dots, u'_n)$.

PŘÍKLAD 4.2. *Určete afinitu v rovině A_2 , ve které při dané soustavě souřadné se bod $B = [0, 0]$ zobrazuje do bodu $B' = [1, 0]$, bod $C = [1, 0]$ do bodu $C' = [0, 1]$ a bod $D = [0, 1]$ do bodu $D' = [0, 0]$.*

4.6 Modul afinity

Protože afinita prostoru A_n je zobrazení vzájemně jednoznačné, pro determinant afinity dané rovnicemi (46) platí

$$\delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Tento determinant se nazývá **modulem afinity**. Dá se ukázat, že modul afinity nezávisí na volbě báze uvažovaného prostoru.

Nyní se budeme zabývat vlastností modulu afinity, která je metrická, tj. závislá na existenci skalárního součinu. Proto se v dalším omezíme ve svých úvahách na eukleidovské prostory, přesněji na E_3 a E_2 .

PŘÍKLAD 4.3. Určete afinitu v A_2 , je-li obrazem bodu $B = [6; -2]$ bod $B' = [1; 1]$, obrazem vektoru $\vec{u} = (2; 1)$ vektor $\vec{u}' = (4; 2)$ a vektoru $\vec{v} = (-1; 2)$ vektor $\vec{v}' = (-3; 6)$. Porovnejte obsahy trojúhelníků BCD a $B'C'D'$, kde $C = B + \vec{u}$, $D = B + \vec{v}$ a $C' = B' + \vec{u}'$, $D' = B' + \vec{v}'$.

Věta 6. Nechť f je afinita v prostoru E_3 (resp. E_2), která má modul δ . Nechť U je měřitelný útvar v E_3 (resp. E_2), který má objem V (resp. obsah V). Nechť obrazem útvaru U v afinitě f je útvar U' , který má objem V' (resp. obsah V'). Potom platí

$$V' = |\delta| \cdot V. \quad (48)$$

Důkaz. Míra měřitelných útvarů v E_3 (resp. E_2) je definována pomocí rovnoběžnostěn (resp. rovnoběžníků). Proto se v důkazu omezíme na afinní zobrazení rovnoběžnostěn v E_3 a rovnoběžníků v E_2 . Nechť v E_3 je rovnoběžnostěn určen trojicí nezávislých vektorů $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$, které mají ve zvolené bázi souřadnice $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$, $\vec{w} = (w_1, w_2, w_3)$. Obrazy těchto vektorů v zobrazení φ asociovaném k afinitě f označme $\vec{u}' = \varphi(\vec{u})$, $\vec{v}' = \varphi(\vec{v})$, $\vec{w}' = \varphi(\vec{w})$ a jejich souřadnice $\vec{u}' = (u'_1, u'_2, u'_3)$, $\vec{v}' = (v'_1, v'_2, v'_3)$, $\vec{w}' = (w'_1, w'_2, w'_3)$. V afinitě f a zobrazení φ platí dle vztahu (47)

$$u'_i = \sum_{j=1}^3 a_{ij}u_j, \quad v'_i = \sum_{j=1}^3 a_{ij}v_j, \quad w'_i = \sum_{j=1}^3 a_{ij}w_j; \quad i = 1, 2, 3. \quad (49)$$

Objem V' zobrazeného rovnoběžnostěnu U' určíme známým vztahem smíšeného součinu, stejně tak objem V rovnoběžnostěnu U :

$$V' = \begin{vmatrix} u'_1 & u'_2 & u'_3 \\ v'_1 & v'_2 & v'_3 \\ w'_1 & w'_2 & w'_3 \end{vmatrix}, \quad V = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}. \quad (50)$$

Dosazením (49) dostaneme

$$V' = \begin{vmatrix} \sum_{j=1}^3 a_{1j}u_j & \sum_{j=1}^3 a_{2j}u_j & \sum_{j=1}^3 a_{3j}u_j \\ \sum_{j=1}^3 a_{1j}v_j & \sum_{j=1}^3 a_{2j}v_j & \sum_{j=1}^3 a_{3j}v_j \\ \sum_{j=1}^3 a_{1j}w_j & \sum_{j=1}^3 a_{2j}w_j & \sum_{j=1}^3 a_{3j}w_j \end{vmatrix}, \quad (51)$$

což lze zapsat součinem

$$V' = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} \quad (52)$$

a tedy

$$V' = \delta \cdot V. \quad (53)$$

Pokud je $\delta < 0$, pak lze znaménko minus vytknout, tj. $V' = -\delta \cdot (-V)$. Ve druhém determinantu pak zaměníme pořadí sousedních řádků, např. prvního a druhého. Pro obsahy vzoru a obrazu měřitelného útvaru v E_2 zřejmě stačí, uvážíme-li obsah V libovolně zvoleného rovnoběžníka určeného lineárně nezávislými body M, N, P a jeho obrazu v dané afinitě určeného body M', N', P' . \square

4.7 Afinita přímá a nepřímá, ekviafinita

Definice 17. Je-li modul afinity kladný, nazývá se „afinita přímá“. Afinita se záporným modulem se nazývá „nepřímá“. Afinita, jejíž modul se rovná v absolutní hodnotě jedné, se nazývá ekviafinita, stručně „ekviafinita“.

PŘÍKLAD 4.4. Určete rovnice a modul afinity $f : E_3 \rightarrow E_3$, v níž se body $K[0, 0, 0]$, $L[1, 4, 0]$, $M[-1, 0, 6]$, $N[4, 5, 8]$ zobrazí na body $K'[1, 1, 1]$, $L'[-2, 9, 6]$, $M'[0, -5, 12]$, $N'[0, 3, 26]$. Rozhodněte, zda se jedná o afinitu přímou či nepřímou a zda je to ekviafinita.

Řešení v programu wxMaxima:

```
(%i25) r1:b1=1; r2:b2=1; r3:b3=1; r4:a11+4*a12+b1=-2; r5:a21+4*a22+b2=9;
r6:a31+4*a32+b3=6; r7:-a11+6*a13+b1=0; r8:-a21+6*a23+b2=-5;
r9:-a31+6*a33+b3=12; r10:4*a11+5*a12+8*a13+b1=0;
r11:4*a21+5*a22+8*a23+b2=3; r12:4*a31+5*a32+8*a33+b3=26;
```

```
(%o25) b1 = 1
```

```
(%o26) b2 = 1
```

```
(%o27) b3 = 1
```

```
(%o28) b1 + 4 a12 + a11 = -2
```

```
(%o29) b2 + 4 a22 + a21 = 9
```

```
(%o30) b3 + 4 a32 + a31 = 6
```

```
(%o31) b1 + 6 a13 - a11 = 0
```

$$(\%o32) \quad b_2 + 6a_{23} - a_{21} = -5$$

$$(\%o33) \quad b_3 + 6a_{33} - a_{31} = 12$$

$$(\%o34) \quad b_1 + 8a_{13} + 5a_{12} + 4a_{11} = 0$$

$$(\%o35) \quad b_2 + 8a_{23} + 5a_{22} + 4a_{21} = 3$$

$$(\%o36) \quad b_3 + 8a_{33} + 5a_{32} + 4a_{31} = 26$$

```
(%i37) res:solve([r1,r2,r3,r4,r5,r6,r7,r8,r9,r10,r11,r12],  
[a11,a12,a13,a21,a22,a23,a31,a32,a33,b1,b2,b3])[1];
```

$$(\%o37) \quad [a_{11} = 1, a_{12} = -1, a_{13} = 0, a_{21} = 0, a_{22} = 2, a_{23} = -1, a_{31} = 1, a_{32} = 1, a_{33} = 2, b_1 = 1, b_2 = 1, b_3 = 1]$$

```
(%i38) ev([x1=a11*x+a12*y+a13*z+b1,y1=a21*x+a22*y+a23*z+b2,  
z1=a31*x+a32*y+a33*z+b3],res);
```

$$(\%o38) \quad [x_1 = -y + x + 1, y_1 = -z + 2y + 1, z_1 = 2z + y + x + 1]$$

```
(%i40) A:ev(matrix([a11,a12,a13],[a21,a22,a23],[a31,a32,a33]),res);
```

$$(\%o40) \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

```
(%i42) determinant(A);
```

$$(\%o42) \quad 6$$

4.8 Cvičení – Afinity

3. Uveďte maticové zápisy následujících transformací:

a) středová souměrnost se středem v počátku,

b) středová souměrnost se středem v bodě $[5, 10]$,

c) osová souměrnost podle souřadnicové osy x ,

d) stejnoolehlost se středem v počátku soustavy souřadnic a s koeficientem $\kappa = 2$,

e) stejnoolehlost se středem v počátku soustavy souřadnic a s koeficientem $\kappa = \frac{-1}{2}$.

Využijte applet na GeoGebraTube: tube.geogebra.org/student/mUcqV9uT

5 Skládání afinních zobrazení

Nechť f_1 je afinní zobrazení prostoru A do A' , f_2 afinní zobrazení prostoru A' do A'' . Jestliže každému bodu $X \in A$ je v f_1 přiřazen bod $f_1(X) \in A'$ a bodu $f_1(X)$ přiřazen bod $f_2[f_1(X)] \in A''$, říkáme, že zobrazení f přiřazující bodu X bod $f_2[f_1(X)]$ vzniklo složením zobrazení f_1 a f_2 . Zapisujeme $f = f_2 \cdot f_1$, $f = f_2 f_1$ nebo $f = f_2(f_1(X))$.

Věta 7. Složením dvou afinních zobrazení f_1, f_2 vznikne afinní zobrazení f . Zobrazení φ asociované k f vznikne složením zobrazení φ_1, φ_2 asociovaných po řadě k f_1, f_2 .

PŘÍKLAD 5.1. V prostoru E_2 jsou dány dvě středové souměrnosti S a O . Určete zobrazení $Z_1 = SO$ a $Z_2 = OS$.

PŘÍKLAD 5.2. V prostoru E_n je dáno posunutí T a středová souměrnost S . Určete zobrazení $Z_1 = TS$ a $Z_2 = ST$.

5.1 Afinní grupa v A_n

Věta 8 (Inverzní zobrazení). Uvažujme afinní zobrazení f afinního prostoru A_n na afinní prostor A'_m . Nechť je toto zobrazení navíc prosté (prostory A_n, A'_m mají stejnou dimenzi, tj. $m = n$). Pak k zobrazení f existuje zobrazení inverzní f^{-1} , které je rovněž afinním zobrazením.

Důkaz. Jsou-li B', C', D' tři kolineární body v prostoru A'_n a platí $(B', C', D') = \lambda$, uvažujme vzory B, C bodů B', C' při zobrazení f a na jimi určené přímce BC zvolme bod D tak, že dělicí poměr $(B, C, D) = \lambda$. Pak bod $f(D)$ leží na přímce $B'C' = f(B)f(C)$ a platí $(B', C', f(D)) = \lambda$. Protože také $(B', C', D') = \lambda$, je $f(D) = D'$ a dělicí poměr $(B', C', D') = (B, C, D)$. \square

Jak víme, pojmem „afinita“ se rozumí „vzájemně jednoznačné zobrazení prostoru A_n na sebe“, tj. speciální případ afinního zobrazení, kdy prostory A_n a A'_m splývou.

Věta 9. Všechny afinity prostoru A_n tvoří při obvyklém skládání grupu, tzv. „afinní grupu prostoru A_n “.

Důkaz. Složením dvou afinit prostoru A_n vznikne opět afinita prostoru A_n . K afinitě f existuje inverzní afinita f^{-1} (viz Věta 8). Neutrálním prvkem je potom identita. \square

5.2 Souvislost mezi skládáním afinních zobrazení a násobením matic

Pro zjednodušení budme uvažovat pouze *lineární zobrazení*. To jsou afinní transformace s nulovým vektorem posunutí, tj. v rovnicích (23) mají $b_1 = b_2 = 0$.

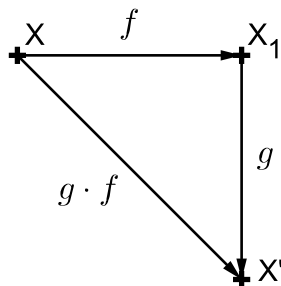
PŘÍKLAD 5.3. Jsou dána lineární zobrazení f, g :

$$f: \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \quad g: \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Určete matici M složeného zobrazení

$$g \cdot f: \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = M \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Řešení: Uvažujme situaci znázorněnou na Obr. 13. Bod $X[x, y]$ je afinitou f zobrazen



Obrázek 13: Skládání afinit f a g v rovině

na bod $X_1[x_1, y_1]$, ten je pak afinitou g zobrazen na bod $X'[x', y']$. Tuto skutečnost můžeme zapsat rovnicemi

$$X \xrightarrow{f} X_1: \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}; \quad X_1 \xrightarrow{g} X': \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix},$$

odkud po dosazení za $\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$ z první rovnice do druhé dostáváme

$$X \xrightarrow{g \cdot f} X': \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}. \quad (54)$$

Skládání afinit znázorněné Obr. 13 ale můžeme zapsat i pomocí rovnic. Platí

$$X \xrightarrow{f} X_1: \begin{matrix} x_1 = ax + by \\ y_1 = cx + dy \end{matrix}; \quad X_1 \xrightarrow{g} X': \begin{matrix} x' = Ax_1 + By_1 \\ y' = Cx_1 + Dy_1 \end{matrix}.$$

Potom po dosazení za x_1 a y_1 z první soustavy rovnic do druhé dostaneme

$$X \xrightarrow{g \cdot f} X': \begin{matrix} x' = A(ax + by) + B(cx + dy) = (Aa + Bc)x + (Ab + Bd)y \\ y' = C(ax + by) + D(cx + dy) = (Ca + Dc)x + (Cb + Dd)y \end{matrix},$$

po přepsání do maticového tvaru

$$X \xrightarrow{g \cdot f} X' : \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Aa + Bc & Ab + Bd \\ Ca + Dc & Cb + Dd \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}. \quad (55)$$

Z porovnání (54) a (55) je zřejmé, že pro matici M složené afinity $g \cdot f$ platí:

$$M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Aa + Bc & Ab + Bd \\ Ca + Dc & Cb + Dd \end{bmatrix}. \quad (56)$$

Rovnost (56) tak přináší známý algoritmus pro násobení dvou matic.

PŘÍKLAD 5.4. Řešení příkladu 5.3 využijte ke zdůvodnění skutečnosti, že skládání afinit v rovině není komutativní. Zobecněte na E_n .

6 Samodružné body a směry afinity

Samodružnými body a směry zobrazení rozumíme body a směry, které se v zobrazují samy na sebe. Například otočení $\mathcal{R}(S)$ má jediný samodružný bod, střed S , a nemá žádný samodružný směr. Osová souměrnost $\mathcal{O}(o)$ má celou přímku samodružných bodů, osu o , a dva samodružné směry, jeden rovnoběžný s osou o , druhý kolmý na o (přímky těchto směrů se zobrazí na přímky s nimi rovnoběžné nebo totožné, tj. zobrazí se na přímky se stejnými směrovými vektory). Stejnolehlost $\mathcal{H}(S, \kappa)$ má jediný samodružný bod, střed S , ale má všechny směry samodružné (tj. každá přímka se zobrazí na přímku s ní rovnoběžnou).

Samodružné prvky má smysl uvažovat jenom v případě, že se uvažovaný bodový prostor (v případě směrů pak jemu příslušející vektorový prostor, tj. zaměření) zobrazuje „do sebe“. Nadále se omezíme pouze na afinity (ty jsou dokonce zobrazeními uvažovaného prostoru „na sebe“).

6.1 Samodružné body

Samodružným bodem (afinity) zobrazení rozumíme bod, který se zobrazí sám na sebe, tj. pro jeho souřadnice platí $X' = X$. Po dosazení do maticové rovnice afinity $\mathbf{X}' = A \cdot \mathbf{X} + B$ tak dostaneme

$$X = A \cdot X + B,$$

po úpravě

$$(I - A) \cdot X = B, \tag{57}$$

kde I je jednotková matice stejného řádu jako A . Za rovnicí (57) se skrývá nehomogenní soustava n rovnic o n neznámých x_1, x_2, \dots, x_n , souřadnicích hledaných samodružných bodů. Z teorie řešitelnosti soustav lineárních rovnic víme, že řešením může být jedna, žádná nebo nekonečně mnoho uspořádaných n -tic $[x_1, x_2, \dots, x_n]$, tj. jeden, žádný nebo nekonečně mnoho samodružných bodů. Množina řešení, tj. množina samodružných bodů uvažované afinity, má přitom charakter afinního bodového podprostoru (bod, přímka, rovina, ...).

Výpočet souřadnic samodružného bodu si ilustrujeme na příkladu afinity v rovině. Pokud do rovnic (22) dosadíme $x' = x$ a $y' = y$ je zřejmé, že souřadnice samodružných bodů příslušné afinity jsou řešením soustavy rovnic

$$\begin{aligned} (1 - a_{11})x_1 - a_{12}x_2 &= b_1 \\ -a_{21}x_1 + (1 - a_{22})x_2 &= b_2. \end{aligned} \tag{58}$$

PŘÍKLAD 6.1. *Určete samodružné body afinity dané rovnicemi*

$$\begin{aligned}x' &= -x + 4, \\y' &= -y - 6.\end{aligned}$$

Řešení: Dosazením x' za x a y' za y do daných rovnic dostaneme soustavu

$$\begin{aligned}2x &= 4, \\2y &= -6,\end{aligned}$$

která má jediné řešení $[x, y] = [2, -3]$. Daná afinita má tedy jediný samodružný bod $S = [2, -3]$.

Poznámka. Protože $A^T \cdot A = I$, kde I je jednotková matice, jedná se o shodnost. V úvahu tak připadá otočení nebo středová souměrnost. O tom, které z nich to je, rozhodnou samodružné směry.

PŘÍKLAD 6.2. *Určete samodružné body afinity dané rovnicemi*

$$\begin{aligned}x' &= x, \\y' &= -y.\end{aligned}$$

Řešení: Dosazením x' za x a y' za y do daných rovnic dostaneme soustavu

$$\begin{aligned}0x &= 0, \\2y &= 0,\end{aligned}$$

která má tentokrát nekonečně mnoho řešení. Jsou jimi všechny uspořádané dvojice ve tvaru $[x, 0]$; $x \in \mathbb{R}$. Jedná se tedy o afinitu jejíž všechny samodružné body leží v přímce o rovnici $y = 0$.

Poznámka. Protože opět platí $A^T \cdot A = I$, je to shodnost. V úvahu teď připadá jediná možnost, osová souměrnost s osou v souřadnicové ose x .

6.2 Samodružné směry

Samodružným směrem rozumíme směr, který se v (afinním) zobrazení zobrazí sám na sebe. Pro vyjádření směru používáme vektor, např. \vec{u} , říkáme mu „reprezentant“ tohoto směru (takovým reprezentantem pak může být každý jeho násobek). Má-li být směr určený vektorem \vec{u} samodružný, musí pro vektor \vec{u}' , který je obrazem \vec{u} , platit $\vec{u}' = \lambda\vec{u}$, kde $\lambda \in \mathbb{R}$.

Poznámka. „Směrem“ rozumíme množinu všech vektorů $k\vec{u}$; $k \in R$ vektoru $\vec{u} \neq \vec{0}$, tj. jednorozměrný vektorový prostor $[\vec{u}]$. Vektor \vec{u} nazýváme „reprezentantem“ tohoto směru. Pokud chceme zohlednit orientaci, použijeme „orientovaný směr“, tj. množinu všech vektorů $k\vec{u}$, kde ale $k \in \langle 0, \infty \rangle$.

Víme, že zobrazení mezi vektory z vektorového prostoru, který je zaměřením afinního bodového prostoru, v němž operuje uvažovaná afinita (obecně však toto zobrazení probíhá mezi různými zaměřenými různými bodovými prostory), zajišťuje tzv. „asociovaný homomorfismus“ (též „lineární zobrazení“), viz definice 14 na str. 14¹.

Po dosazení do maticové rovnice asociovaného homomorfismu $\vec{u}' = A \cdot \vec{u}$ tak dostaneme

$$\lambda \vec{u} = A \cdot \vec{u},$$

po úpravě

$$(\lambda I - A) \cdot \vec{u} = \vec{0}, \quad (60)$$

kde I je jednotková matice stejného řádu jako A a vektor \vec{u} je sloupcový (aby bylo definováno násobení $A \cdot \vec{u}$).

Charakteristická rovnice, vlastní číslo, vlastní vektor

Za rovnicí (60) se skrývá homogenní soustava n rovnic o n neznámých u_1, u_2, \dots, u_n , souřadnicích reprezentanta hledaného samodružného směru. Z teorie řešitelnosti homogenních soustav lineárních rovnic víme, že řešením může být buď jenom nulový vektor $\vec{0}$, hovoříme o „triviálním řešení“, nebo je řešením nekonečně mnoho vektorů, které tvoří vektorový podprostor. Nenulové vektory z tohoto prostoru řešení nazýváme „netriviální řešení“. Protože nulový vektor neurčuje žádný směr, zajímají nás při vyšetřování samodružných směrů pouze netriviální řešení homogenní soustavy (60). Homogenní soustava lineárních rovnic má i netriviální řešení (triviální má vždycky) právě tehdy, když je matice soustavy singulární, tj. její determinant je roven nule. Afinita $X' = A \cdot X + B$ má proto samodružné body právě tehdy, když

$$|\lambda I - A| = 0. \quad (61)$$

¹Zobrazení φ vektorového prostoru V do vektorového prostoru V' se nazývá homomorfismus (lineární zobrazení), jestliže pro všechna $\vec{u}, \vec{v} \in V, k \in \mathbb{T}$ (místo obecného tělesa \mathbb{T} můžeme uvažovat \mathbb{R}) platí:

$$\begin{aligned} (1) \quad \varphi(\vec{u} + \vec{v}) &= \varphi(\vec{u}) + \varphi(\vec{v}), \\ (2) \quad \varphi(k\vec{u}) &= k\varphi(\vec{u}). \end{aligned}$$

Uvažujme afinitu f prostoru E_n . Potom „asociovaným (tj. jednoznačně přiřazeným) homomorfismem“ afinity f rozumíme lineární zobrazení φ , které zobrazuje zaměření V_n prostoru E_n do sebe takto:

$$\vec{u} = Y - X \Rightarrow \varphi(\vec{u}) = f(Y) - f(X), \quad (59)$$

kde X, Y a $f(X), f(Y)$ jsou body z $E_2, \vec{u}, \varphi(\vec{u}) \in V_2$.

Rovnici (61) říkáme „charakteristická rovnice“ příslušného homomorfismu φ . Jedná se o algebraickou rovnici n -tého stupně pro neznámou λ . Každé číslo λ , které je řešením této charakteristické rovnice, pak nazýváme „vlastní číslo“ homomorfismu φ . Každý vektor \vec{u} , pro který platí $\vec{u}' = \varphi(\vec{u}) = \lambda\vec{u}$, nazýváme „vlastním vektorem“ homomorfismu φ (příslušnou hodnotu λ pak nazýváme „vlastní číslo homomorfismu φ , odpovídající vektoru \vec{u} “). Místo vlastní vektor a vlastní číslo se také používají termíny „charakteristický vektor“ a „charakteristické číslo“.

Výpočet samodružných směrů si ilustrujeme na příkladu afinity v rovině. Asociovaný homomorfismus φ afinity f je v tomto případě dán soustavou

$$\begin{aligned}\varphi : u'_1 &= a_{11}u_1 + a_{12}u_2 \\ u'_2 &= a_{21}u_1 + a_{22}u_2,\end{aligned}$$

maticově pak

$$\varphi : \begin{bmatrix} u'_1 \\ u'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix},$$

což lze zapsat ve tvaru

$$\varphi : \vec{u}' = A \cdot \vec{u}. \quad (62)$$

Samodružný směr afinity (tj. vektory těchto směrů, pro které platí $\vec{u}' = \lambda\vec{u}$) jsou potom „ netriviálním“ řešením homogenní soustavy rovnic

$$\begin{aligned}(\lambda - a_{11})u_1 - a_{12}u_2 &= 0 \\ -a_{21}u_1 + (\lambda - a_{22})u_2 &= 0.\end{aligned} \quad (63)$$

Homogenní soustava n lineárních rovnic o n neznámých má netriviální řešení právě tehdy, když je determinant soustavy roven nule. Soustava (62) má tedy nekonečně mnoho řešení právě tehdy, když platí rovnost

$$\begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} \end{vmatrix} = 0. \quad (64)$$

Postup určení samodružných směrů afinity v rovině si nyní budeme ilustrovat na zobrazeních použitých v příkladech 6.1 a 6.2.

PŘÍKLAD 6.3. *Určete samodružné směry afinity dané rovnicemi*

$$\begin{aligned}x' &= -x + 4, \\ y' &= -y - 6.\end{aligned}$$

Řešení: Řešíme homogenní soustavu

$$\begin{aligned}(\lambda + 1)u_1 &= 0, \\ (\lambda + 1)u_2 &= 0,\end{aligned}$$

které přísluší charakteristická rovnice

$$\begin{vmatrix} (\lambda + 1) & 0 \\ 0 & (\lambda + 1) \end{vmatrix} = 0,$$

po úpravě ve tvaru

$$(\lambda + 1)^2 = 0.$$

Jejím jediným řešením je vlastní číslo $\lambda = -1$, které dosadíme do příslušné homogenní soustavy, abychom dostali soustavu rovnic

$$\begin{aligned}0u_1 &= 0, \\ 0u_2 &= 0,\end{aligned}$$

jejímž řešením je každý vektor $\vec{v} = (u_1, u_2) \in R \times R$.

Vyšetřovaná afinita má tedy všechny směry samodružné.

Poznámka. Vzhledem k tomu, že z řešení příkladu 6.1 víme, že daná afinita je shodností a má jediný samodružný bod $S = [2, -3]$, po zjištění, že má všechny směry samodružné, je možno učinit závěr, že se jedná o středovou souměrnost se středem S .

PŘÍKLAD 6.4. *Určete samodružné směry afinity dané rovnicemi*

$$\begin{aligned}x' &= x, \\ y' &= -y.\end{aligned}$$

Řešení: Řešíme homogenní soustavu

$$\begin{aligned}(\lambda - 1)u_1 &= 0, \\ (\lambda + 1)u_2 &= 0,\end{aligned}$$

které přísluší charakteristická rovnice

$$\begin{vmatrix} (\lambda - 1) & 0 \\ 0 & (\lambda + 1) \end{vmatrix} = 0,$$

po úpravě ve tvaru

$$(\lambda - 1)(\lambda + 1) = 0.$$

Charakteristická rovnice má dva kořeny (vlastní čísla) $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1$, které postupně dosadíme do příslušné homogenní soustavy a vypočítáme souřadnice příslušných vlastních vektorů daného zobrazení.

Pro $\lambda_1 = 1$ dostáváme soustavu

$$\begin{aligned} 0u_1 &= 0, \\ 2u_2 &= 0, \end{aligned}$$

jejímž řešením je každý vektor $\vec{v}_1 = (u_1, 0) \in R^2$. Samodružný směr určený těmito vektory je rovnoběžný s osou x (tj. s osou souměrnosti).

Pro $\lambda_2 = -1$ dostáváme soustavu

$$\begin{aligned} -2u_1 &= 0, \\ 0u_2 &= 0, \end{aligned}$$

jejímž řešením je každý vektor $\vec{v}_2 = (0, u_2) \in R^2$. Samodružný směr určený těmito vektory je kolmý k ose x (tj. k ose souměrnosti).

Daná afinita má tedy dva na sebe kolmé samodružné směry.

Poznámka. Zjištění, že daná afinita má dva na sebe kolmé samodružné směry, přitom jeden rovnoběžný s přímkou samodružných bodů a druhý na ni kolmý, je v souladu s poznatkem z řešení příkladu 6.2, že uvažovaná afinita je osovou souměrností.

PŘÍKLAD 6.5. Zjistěte, zda existuje shodnost E_2 , při které se bod $K = [10; 0]$ zobrazí na počátek $K' = [0; 0]$ a bod $L = [25; 20]$ na bod $L' = [0; 25]$. V kladném případě napište rovnice tohoto zobrazení a najděte jeho samodružné body a směry.

Řešení: Začneme tím, že si ověříme, zda zadané body splňují definici shodného zobrazení, tj. zda $|K'L'| = |KL|$. V případě této úlohy zvládneme ověření provést z paměti. Výsledkem je, že zadání vyhovuje definici shodnosti.

Další postup řešení úlohy si ilustrujeme pomocí zápisu v programu wxMaxima (viz <http://andrejv.github.io/wxmaxima/>)

```
(%i1) A:matrix([a11,a12],[a21,a22]); B:matrix([b1],[b2]);
```

```
(%o1) (a11 a12)
      (a21 a22)
```

```
(%o2) (b1)
      (b2)
```


Rovnici $X' = A \cdot X + B$ vyjádříme ve tvaru $A \cdot X + B - X' = O$ a dosadíme souřadnice daných dvojic bodů K, K' a L, L' . Potom zapíšeme podmínku (75) pro to, aby bylo afinní zobrazení shodností ve tvaru $A^T \cdot A - I = O$. (V programu wxMaxima zapíšeme jenom levé strany uvedených rovnic. Jednotkovou matici I druhého stupně zadáme ve wxMaximě příkazem `ident(2)`.)

```
(%i3) s1:A.[10,0]+B-[0,0]; s2:A.[25,20]+B-[0,25];
      s3:transpose(A).A-ident(2);
```

$$(\%o3) \begin{pmatrix} b1 + 10 a11 \\ b2 + 10 a21 \end{pmatrix}$$

$$(\%o4) \begin{pmatrix} b1 + 20 a12 + 25 a11 \\ b2 + 20 a22 + 25 a21 - 25 \end{pmatrix}$$

$$(\%o5) \begin{pmatrix} a21^2 + a11^2 - 1 & a21 a22 + a11 a12 \\ a21 a22 + a11 a12 & a22^2 + a12^2 - 1 \end{pmatrix}$$

Všechny prvky výše uvedených matic musí být rovny nule (Proč?). Dostaneme tak soustavu sedmi rovnic pro šest neznámých $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, b_1, b_2$.

```
(%i6) rov:[s1[1,1],s1[2,1],s2[1,1],s2[2,1],s3[1,1],s3[1,2],s3[2,2]];
```

$$(\%o6) [b1 + 10 a11, b2 + 10 a21, b1 + 20 a12 + 25 a11, b2 + 20 a22 + 25 a21 - 25, a21^2 + a11^2 - 1, a21 a22 + a11 a12, a22^2 + a12^2 - 1]$$

Tato soustava má následující dvě řešení (nejedná se o soustavu lineárních rovnic, proto může mít dvě řešení):

```
(%i7) res:solve(rov,[a11,a12,a21,a22,b1,b2]);
```

$$(\%o7) [[a11 = \frac{4}{5}, a12 = -\frac{3}{5}, a21 = \frac{3}{5}, a22 = \frac{4}{5}, b1 = -8, b2 = -6],$$

$$[a11 = -\frac{4}{5}, a12 = \frac{3}{5}, a21 = \frac{3}{5}, a22 = \frac{4}{5}, b1 = 8, b2 = -6]]$$

Dvěma řešeními odpovídají dvě různé shodnosti. Zjistili jsme tedy, že existují dvě shodnosti, které převádějí body K, L na body K', L' (Což se, vzhledem ke *větě o určenosti shodného (afinního) zobrazení* dalo čekat. Proč?). Pokračujeme v řešení úlohy pro každou z těchto shodností zvlášť. Pro zápis rovnic uvažovaných shodností si nejprve připravíme matici `RovTr`, jejímiž řádky jsou rovnice afinity v obecném tvaru (tato matice není nutnou součástí postupu řešení, jedná se jenom o usnadnění vizuální prezentace rovnic v programu).

```
(%i8) RovTr:matrix([x1=a11*x+a12*y+b1],[y1=a21*x+a22*y+b2]);
```

```
(%o8) 
$$\begin{pmatrix} x1 = a12 y + a11 x + b1 \\ y1 = a22 y + a21 x + b2 \end{pmatrix}$$

```

Řešení č. 1:

```
(%i9) A1:ev(A,res[1]); B1:ev(B,res[1]);
```

```
(%o9) 
$$\begin{pmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix}$$

```

```
(%o10) 
$$\begin{pmatrix} -8 \\ -6 \end{pmatrix}$$

```

Příslušná shodnost má rovnice

```
(%i11) R1:ev(RovTr,res[1]);
```

```
(%o11) 
$$\begin{pmatrix} x1 = -\frac{3y}{5} + \frac{4x}{5} - 8 \\ y1 = \frac{4y}{5} + \frac{3x}{5} - 6 \end{pmatrix}$$

```

Samodružný bod je bod, pro který platí $X' = X$. Pro výpočet souřadnic samodružných bodů daného zobrazení tak do rovnice $X' = A \cdot X + B$ (pro snazší zpracování programem přešpané do tvaru $A \cdot X + B - X = 0$) za X' dosadíme X a řešíme odpovídající soustavu dvou rovnic s neznámými x, y .

```
(%i12) RovSB1:A1.[x,y]+B1-[x,y]; solve([RovSB1[1,1],RovSB1[2,1]],[x,y]);
```

```
(%o12) 
$$\begin{pmatrix} -\frac{3y}{5} - \frac{x}{5} - 8 \\ -\frac{y}{5} + \frac{3x}{5} - 6 \end{pmatrix}$$

```

```
(%o13) [[x = 5, y = -15]]
```

Protože tato soustava má jediné řešení, má daná shodnost jediný samodružný bod $S = [5, -15]$.

Pro vyšetření samodružných směrů daného zobrazení řešíme charakteristickou rovnicí (64)

```
(%i14) CharM1:A1-%lambda*ident(2);  
CharR1:expand(determinant(CharM1))=0;  
solve(CharR1,%lambda);
```

$$(\%o14) \begin{pmatrix} \frac{4}{5} - \lambda & -\frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{4}{5} - \lambda \end{pmatrix}$$

$$(\%o15) \lambda^2 - \frac{8\lambda}{5} + 1 = 0$$

$$(\%o16) \left[\lambda = -\frac{3i-4}{5}, \lambda = \frac{3i+4}{5} \right]$$

Charakteristická rovnice nemá řešení v oboru reálných čísel. Daná shodnost tak nemá žádný samodružný směr.

Protože uvažované zobrazení má právě jeden samodružný bod a nemá žádný samodružný směr, jedná se o **otočení** se středem $S = [5, -15]$.

Poznámka. K úplné identifikaci daného zobrazení nám zbývá určit úhel otočení α . Jak to uděláme?

Řešení č. 2:

Postupujeme analogicky s řešením č. 1.

$$(\%i17) \text{A2:ev(A,res[2]); B2:ev(B,res[2]);}$$

$$(\%o17) \begin{pmatrix} -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix}$$

$$(\%o18) \begin{pmatrix} 8 \\ -6 \end{pmatrix}$$

Rovnice zobrazení

$$(\%i19) \text{R2:ev(RovTr,res[2]);}$$

$$(\%o19) \begin{pmatrix} x1 = \frac{3y}{5} - \frac{4x}{5} + 8 \\ y1 = \frac{4y}{5} + \frac{3x}{5} - 6 \end{pmatrix}$$

Samodružné body:

$$(\%i20) \text{RovSB2:A2.[x,y]+B2-[x,y]; solve([RovSB2[1,1],RovSB2[2,1]],[x,y]);}$$

$$(\%o20) \begin{pmatrix} \frac{3y}{5} - \frac{9x}{5} + 8 \\ -\frac{y}{5} + \frac{3x}{5} - 6 \end{pmatrix}$$

$$(\%o21) []$$

Toto zobrazení tedy nemá žádný samodružný bod.

Samodružné směry:

```
(%i22) CharM2:A2-%lambda*ident(2);
CharR2:expand(determinant(CharM2))=0;
solve(CharR2,%lambda);
```

$$(\%o22) \begin{pmatrix} -\lambda - \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{4}{5} - \lambda \end{pmatrix}$$

$$(\%o23) \lambda^2 - 1 = 0$$

$$(\%o24) [\lambda = -1, \lambda = 1]$$

```
(%i25) RovSS2:A2.[u,v]-[%lambda*u,%lambda*v];
```

$$(\%o25) \begin{pmatrix} \frac{3v}{5} - \lambda u - \frac{4u}{5} \\ -\lambda v + \frac{4v}{5} + \frac{3u}{5} \end{pmatrix}$$

```
(%i26) RovSS21:ev(RovSS2,%lambda=-1);
solve([RovSS21[1,1],RovSS21[2,1]],[u,v]);
```

$$(\%o26) \begin{pmatrix} \frac{3v}{5} + \frac{u}{5} \\ \frac{9v}{5} + \frac{3u}{5} \end{pmatrix} \text{ solve : dependent equations eliminated : (2)}$$

$$(\%o27) [[u = -3 \%r1, v = \%r1]]$$

```
(%i28) RovSS22:ev(RovSS2,%lambda=1);
solve([RovSS22[1,1],RovSS22[2,1]],[u,v]);
```

$$(\%o28) \begin{pmatrix} \frac{3v}{5} - \frac{9u}{5} \\ \frac{3u}{5} - \frac{v}{5} \end{pmatrix} \text{ solve : dependent equations eliminated : (2)}$$

$$(\%o29) [[u = \frac{\%r2}{3}, v = \%r2]]$$

Zobrazení má dva na sebe kolmé samodružné směry $\vec{u} = (-3, 1)$, $\vec{v} = (1, 3)$.

Jedná se o „posunuté zrcadlení“, viz str. 59.

Poznámka. K úplné identifikaci výsledného zobrazení nám zbývá určit osu o a vektor posunutí \vec{t} . Jak to uděláme?

6.3 Homotetie, grupa homotetií

Definice 18 (Homotetie). *Každé afinní zobrazení, které má všechny směry samodružné, se nazývá „homotetické zobrazení“, též „homotetie“.*

Poznámka. Pro homotetie se používá také označení „dilatace“.

Každá homotetie je stejnoolehlost, posunutí nebo identita (tj. posunutí o nulový vektor). V kapitole 11 věnované stejnoolehlosti se dozvíme, že množina těchto tří shodností spolu s operací skládání tvoří grupu, tzv. „grupu homotetií“.

Poznámka. Z výše uvedené existence „grupy homotetií“ vyplývá, že složením dvou zobrazení z množiny homotetií, tj. z množiny {stejnoolehlost, posunutí, identita}, vznikne opět jedno z těchto zobrazení.

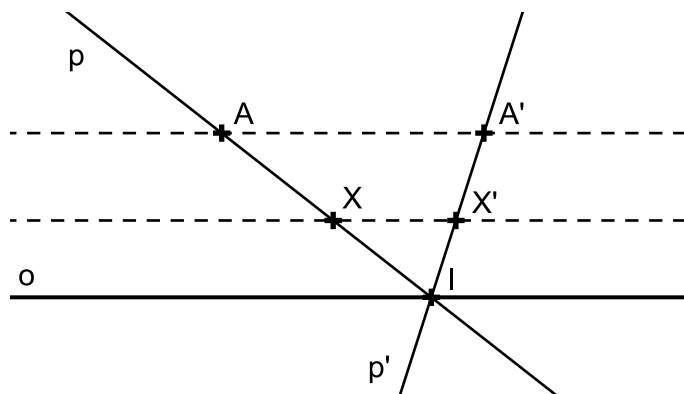
7 Osová afinita

Určení osové afinity. Charakteristika a rovnice osové afinity. Elace. Základní afinity. Involuce.

7.1 Základní afinity

„Základními afinitami“ nazýváme afinity, jejichž všechny samodružné body tvoří nadrovinu prostoru A_n . Příklady základních afinit jsou „osová afinita v A_2 “, „osová souměrnost v E_2 “ nebo „rovinová souměrnost v E_3 “.

Základní afinita taková, že přímka spojující vzor a obraz je rovnoběžná s nadrovinou samodružných bodů, se nazývá „elace“.



Obrázek 14: Osová afinita v rovině, jejíž směr je rovnoběžný s její osou, jako příklad elace

7.2 Osová afinita v rovině

Osová afinita je určena osou o , směrem s a charakteristikou κ . Směr a charakteristika jsou většinou zadány dvojicí sobě odpovídajících bodů A, A' .

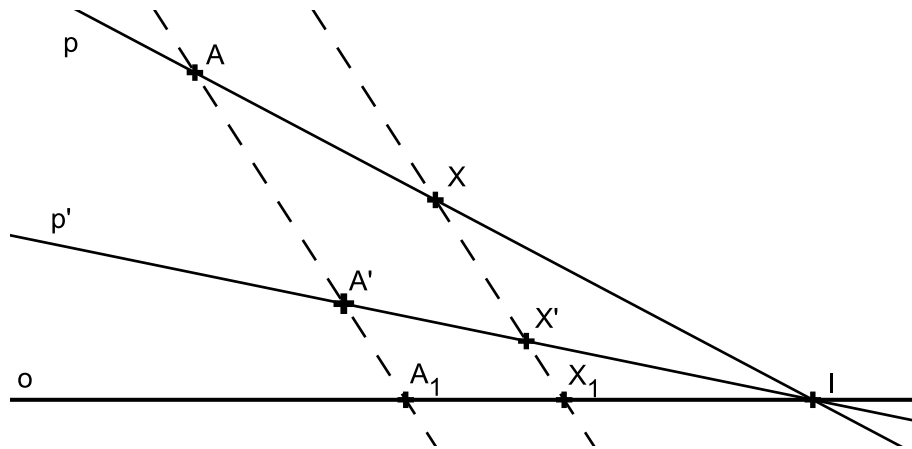
PŘÍKLAD 7.1. V osově afinitě určené osou o a dvojicí sobě odpovídajících bodů A, A' zobrazte bod X a přímku p .

Řešení: Viz Obr. 15. Při určení obrazu bodu a přímky využijeme

Vlastnosti osové afinity

- (1) Přímka spojující sobě odpovídající body je rovnoběžná se směrem afinity.
- (2) Sobě odpovídající přímky se protínají na ose afinity.

- (3) Incidence se zachovává.
- (4) Osa afinity a přímky rovnoběžné se směrem afinity jsou samodružnými přímkami.



Obrázek 15: Osová afinita v rovině, řešení příkladu 7.1

Postupujeme tak, že sestrojíme přímku $p = \overleftrightarrow{AX}$ a určíme její průsečík I s osou afinity o . Z vlastnosti (2) vyplývá, že přímka p' , která je obrazem přímky p , také prochází bodem I . Z vlastnosti (3) pak plyne, že p' prochází rovněž bodem A' . Sestrojíme tedy přímku $p' = \overleftrightarrow{A'I}$. Obraz bodu X , bod X' , pak určíme podle vlastnosti (1) jako průsečík p' s přímkou jdoucí bodem X rovnoběžně s $\overleftrightarrow{AA'}$.

Charakteristika osové afinity

Charakteristikou osové afinity κ rozumíme dělicí poměr

$$(A'AA_1) = \kappa,$$

kde body A, A' jsou ve vztahu „vzor a obraz“ a bod A_1 je průsečík přímky AA' s osou afinity o , viz Obr. 15.

Poznámka. „Osová souměrnost v rovině“ je zvláštním případem osové afinity, jejíž směr \vec{s} je kolmý na osu o ($\vec{s} \perp o$) a jejíž charakteristika κ je rovna -1 ($\kappa = -1$).

PŘÍKLAD 7.2. Je dána přímka o , trojúhelník ABC a dvojice bodů X, X' . Sestrojte obraz trojúhelníka ABC v osové afinitě s osou o , v níž je obrazem bodu X bod X' .

Věta 10. Rovnoběžné přímky $a \parallel b$ se v osové afinitě zobrazí opět na rovnoběžné přímky $a' \parallel b'$.

Důkaz. Důkaz provedeme sporem. Předpokládáme, že obrazy rovnoběžných přímek jsou různoběžky. Dostaneme se do sporu s definicí charakteristiky afinity. \square

Věta 11. *Dělicí poměr se v osově afinitě zachovává, tj. $(ABC) = (A'B'C')$.*

Důsledky věty 11:

- 1) Střed úsečky se zobrazí zase na střed úsečky.
- 2) Zachovává se uspořádání bodů na přímce.

PŘÍKLAD 7.3. *Je dána přímka o a trojúhelník ABC . Sestrojte obraz $A'B'C'$ trojúhelníka ABC v takové osově afinitě s osou o , aby byl trojúhelník $A'B'C'$ rovnostranný.*

(Postup konstrukce viz <http://tube.geogebra.org/student/mni2IYH1c>)

Věta 12. *Nechť P je obsah trojúhelníka ABC a P' obsah jeho obrazu $A'B'C'$ v osově afinitě s charakteristikou κ . Potom $P' = |\kappa| \cdot P$.*

Z výše uvedených vět 10, 11, 12 plyne, že osová afinita má následující invarianty.

Invarianty osově afinity

- (1) Rovnoběžnost přímek.
- (2) Dělicí poměr.
- (3) Poměr obsahu obrazců.

Charakteristika základní afinity

Charakteristiku přiřazujeme každé základní afinitě, která není elací. Platí

$$\kappa = (X'X X_1),$$

kde X_1 je průsečík $\overleftrightarrow{XX'}$ s nadrovinou samodružných bodů uvažované základní afinity.

Základní afinita jako involuce

„Involutorní zobrazení“, též „involuce“, je každé zobrazení afinního bodového prostoru na sebe, které není identitou, ale složeno samo se sebou je identitě rovno.

Základní afinita je involucí tehdy, když není elací a její charakteristika je rovna -1 .

7.3 Cvičení – Osová afinita

1. Pomocí výsledku Příkladu 7.3 dokažte tvrzení: *Těžnice trojúhelníka se protínají v jednom bodě, který je dělí v poměru 1 : 2.*

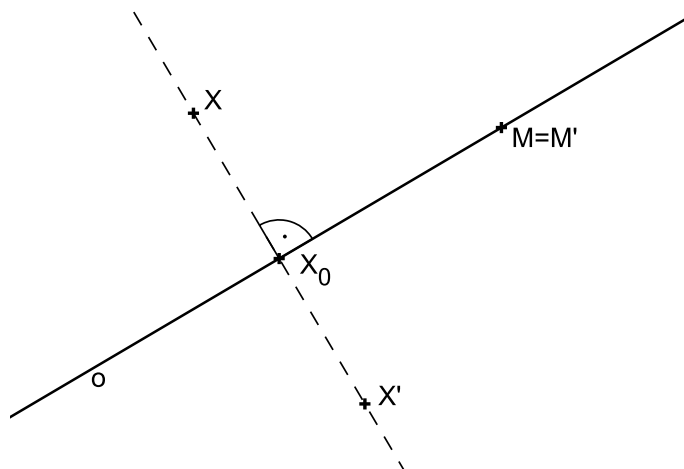
2. Dokažte Větu 12.

8 Shodnosti v rovině

V této kapitole je podán podrobný přehled šesti shodností v rovině (osová souměrnost, otočení, středová souměrnost, posunutí, posunutě zrcadlení, identita) spolu s řadou úloh na jejich vlastnosti i aplikace. V následující kapitole 9 je potom pojednáno o tom, jak množina těchto shodností i některé její podmnožiny tvoří spolu s operací skládání geometrických zobrazení grupy.

8.1 Osová souměrnost

Definice 19. *Nechť je dána přímka o , kterou nazýváme **osa souměrnosti**. Potom pro obraz M' libovolného bodu M této přímky o platí $M' \equiv M$. Ke každému bodu X , který neleží na přímce o , sestrojíme obraz X' následujícím způsobem: Bodem X vedeme kolmici k na přímku o a její patu označíme X_0 . Na polopřímce opačné k polopřímce X_0X sestrojíme bod X' tak, že $|X'X_0| = |XX_0|$. Takto definované zobrazení nazýváme **osová souměrnost s osou o** a značíme ho $\mathcal{O}(o)$.*



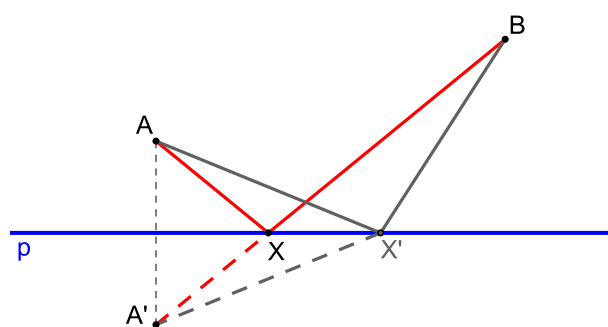
Obrázek 16: Definice osové souměrnosti

Poznámky:

1. O bodech X, X' říkáme, že je to dvojice bodů souměrně sdružených podle osy o .
2. Osová souměrnost je příkladem involutorního zobrazení (involuce).

PŘÍKLAD 8.1. *Je dána přímka p a body A, B v téže polorovině s hraniční přímkou p . Najděte všechny body $X \in p$ takové, že součet vzdáleností $|AX| + |BX|$ je minimální.*

Věta 13. *Osová souměrnost je shodné zobrazení.*



Obrázek 17: Využití osové souměrnosti ke geometrickému řešení příkladu 17

Samodružné body a směry osové souměrnosti

Každá shodnost je unikátní svou kombinací samodružných bodů a směrů. Později tuto skutečnost využijeme ke klasifikaci shodností.

Věta 14 (Alternativní definice osové souměrnosti). *Shodné zobrazení, jehož všechny samodružné body vyplní přímku o , je souměrnost podle osy o .*

Věta 15. *Jestliže existují na přímce dva různé samodružné body, pak každý bod této přímky je samodružný.*

Věta 16. *Má-li shodnost aspoň tři nekolineární samodružné body, je to identita.*

Věta 17. *Má-li shodnost dva různé samodružné body a není identitou, pak je osovou souměrností.*

Věta 18. *Samodružné přímky osové souměrnosti jsou přímky kolmé na osu souměrnosti.*

Analytické vyjádření osové souměrnosti $O(o)$ v rovině

PŘÍKLAD 8.2. *Napište analytické vyjádření osové souměrnosti s osou v souřadnicové ose x (y).*

Řešení: Dle obrázku 18 je zřejmé, že uvedené osové souměrnosti mají níže uvedená analytická vyjádření.

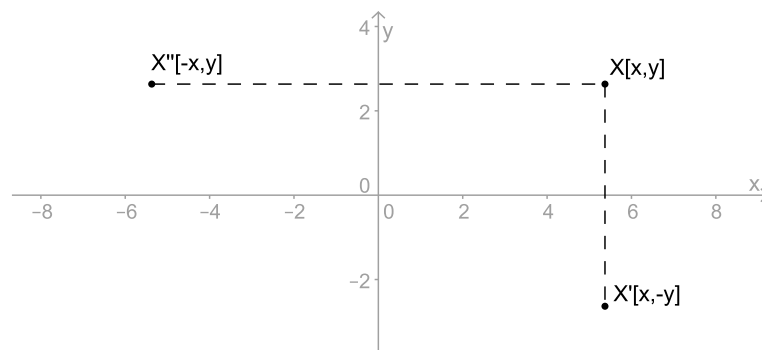
Osová souměrnost s osou x :

$$\begin{aligned}x' &= x \\y' &= -y\end{aligned}$$

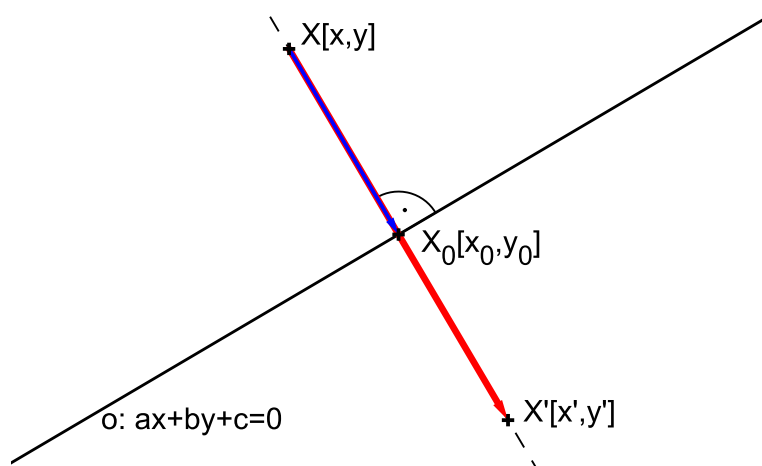
Osová souměrnost s osou y :

$$\begin{aligned}x' &= -x \\y' &= y\end{aligned}$$

Ne vždy je ale možné osu souměrnosti takto výhodně umístit do souřadnicové osy. Proto si odvodíme rovnice osové souměrnosti s obecně umístěnou osou.



Obrázek 18: Odvození rovnic osové souměrnosti s osou v souřadnicové ose x (y)



Obrázek 19: Odvození rovnic osové souměrnosti $O(o)$

Osová souměrnost podle osy o dané rovnicí $o : ax + by + c = 0$

Dle obrázku 19 platí

$$\begin{aligned} X' - X &= 2(X_0 - X), \\ X_0 - X &= k(a, b). \end{aligned}$$

Z druhé rovnosti vyjádříme $x_0 = x + ka, y_0 = y + kb$ a dosadíme je do obecné rovnice osy o : $a(x + ka) + b(y + kb) + c = 0$. Odsud potom vyjádříme parametr $k = -\frac{ax + by + c}{a^2 + b^2}$, který dosadíme do rovnice

$$X' - X = 2k(a, b).$$

Po úpravě a rozepsání po složkách dostáváme rovnice osové souměrnosti $O(o)$:

$$\begin{aligned} x' &= x - \frac{2a}{a^2 + b^2} (ax + by + c) \\ y' &= y - \frac{2b}{a^2 + b^2} (ax + by + c) \end{aligned}$$

PŘÍKLAD 8.3. V eukleidovské rovině je dána souměrnost podle přímky $p : 3x - 4y + 1 = 0$. Napište rovnice této souměrnosti.

Cvičení – Osová souměrnost

4. Napište rovnice souměrnosti podle přímky $o : 2x - 3y + 1 = 0$.

5. Sestrojte trojúhelník ABC , je-li dán obvod $o = 12\text{cm}$ a úhly $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 45^\circ$.

6. Dokažte Vivianiho větu.

Věta 19 (Vivianiho věta). V rovnostranném trojúhelníku je hodnota součtu vzdáleností libovolného bodu od stran trojúhelníku konstantní, nezávislá na poloze bodu.

7. Jsou dány dvě různoběžky p , q a bod A mimo ně. Najděte body $B \in p$, $C \in q$ tak, aby obvod trojúhelníku ABC byl minimální.

8. Řešte **Fagnanův problém**: „Danému ostroúhlému trojúhelníku vepište trojúhelník o nejmenším obvodu.“

9. Sestrojte konvexní čtyřúhelník $ABCD$ se stranami dané velikosti, je-li $\sphericalangle A$ osou vnitřního úhlu při vrcholu A .

10. Sestrojte čtverec $ABCD$, je-li dáno $a + e = 10\text{cm}$.

11. Sestrojte obdélník $ABCD$, je-li dáno $e = 7\text{cm}$, $a - b = 1\text{cm}$.

12. Sestrojte lichoběžník $ABCD$ ($AB \parallel CD$), je-li dáno $b = 3\text{cm}$, $c = 2.5\text{cm}$, $d = 2.6\text{cm}$, $\alpha - \beta = 20^\circ$.

13. **Mascheroniova konstrukce.** Je dána kružnice $k(S; r)$; dále je dána dvěma body A , B (body neleží na kružnici) její sečna p , která neprochází středem S . Sestrojte průsečíky přímky p s kružnicí k , aniž přitom použijete pravítka.

14. Dokažte, že body souměrně sdružené s průsečíkem výšek podle stran trojúhelníka, leží na kružnici trojúhelníku opsané.

Osová souměrnost - Úlohy na domácí přípravu

15. Dokažte následující větu

Věta 20. V každém trojúhelníku dělí osa libovolného vnitřního úhlu protější stranu v poměru stran přilehlých.

16. Napište rovnice osové souměrnosti, zobrazující počátek na bod $[1, 5]$.

17. Je dána přímka p a dvě kružnice k_1, k_2 oddělené přímkou p . Sestrojte rovnostranný trojúhelník tak, aby na každé z kružnic k_1, k_2 byl jeden vrchol a jedna z výšek ležela na přímce p .

18. Jsou dány tři různé přímky p_1, p_2, p_3 , procházející bodem S ; na přímce p_1 je dán bod $A \neq S$. Sestrojte trojúhelník ABC , jehož osy vnitřních úhlů leží v přímkách p_1, p_2, p_3 .

19. Jsou dány tři přímky o_1, o_2, o_3 procházející bodem O . Na o_1 dán bod A_1 . Sestrojte $\triangle ABC$ tak, aby o_1, o_2, o_3 byly osami jeho stran a bod A_1 středem strany BC .

20. Jsou dány body X, Y a přímka p , která je odděluje. Sestrojte rovnoramenný trojúhelník ABC , jehož hlavním vrcholem je bod C , osou souměrnosti přímka p a jehož ramena mají danou velikost a . Přímka AC nechť prochází bodem X a přímka BC bodem Y .

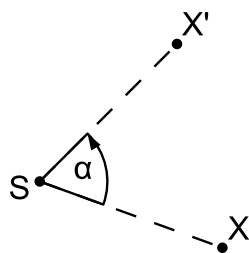
21. Je dána přímka p a body A, B , ležící ve stejné polorovině s hraniční přímkou p . Sestrojte bod $X \in p$ tak, aby $|\angle AXp| = 2|\angle BXp|$.

22. Jsou dány body A, B, C a přímka p kolmá k přímce AB tak, že prochází bodem C a body A, B leží v téže polorovině určené přímkou p . Sestrojte na přímce p takový bod X , aby z něho byla vidět úsečka AB pod stejným úhlem jako úsečka BC .

23. Obrazy středu S kružnice opsané trojúhelníku ABC v osových souměrnostech podle přímek BC, AC, AB jsou vrcholy trojúhelníku $A_1B_1C_1$. Dokažte, že je tento trojúhelník shodný s trojúhelníkem ABC .

8.2 Otočení

Definice 20. Otočení neboli rotace je zobrazení určené středem S a orientovaným úhlem velikosti φ , které bodu S přiřazuje týž bod S a libovolnému bodu $X \neq S$ přiřazuje bod X' tak, že $|X'S| = |XS|$ a orientovaný úhel XSX' má velikost φ . Zobrazení značíme $\mathcal{R}(S, \varphi)$, bod S se nazývá střed otočení a orientovaný úhel velikosti φ je úhel otočení.



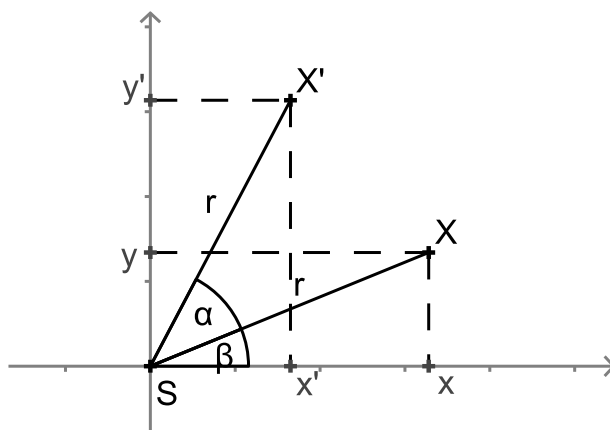
Obrázek 20: Otočení $\mathcal{R}(S, \alpha)$

Shodnost, která není ani identitou ani osovou souměrností, má nejvýše jeden samodružný bod

Věta 21 (Alternativní definice otočení). *Shodnost s právě jedním samodružným bodem S je otočením; bod S je střed otočení.*

PŘÍKLAD 8.4. *Odvoďte analytické vyjádření otočení se středem v počátku souřadnicové soustavy o úhel α . Potom ukažte, že toto zobrazení má jediný samodružný bod - střed otočení.*

Řešení: Postupujeme podle obrázku 21.



Obrázek 21: Otočení $\mathcal{R}([0, 0], \alpha)$

Rovnice otočení o úhel α kolem počátku jsou

$$x' = x \cos \alpha - y \sin \alpha$$

$$y' = x \sin \alpha + y \cos \alpha$$

Věta 22. Složením dvou osových souměrností s různoběžnými osami vznikne otočení, jehož středem je průsečík těchto os.

Věta 23. Každé otočení lze složit ze dvou osových souměrností, jejichž osy jsou různoběžky procházející středem otočení. Jednu z těchto os lze volit libovolně tak, že prochází středem otočení. Druhá je touto volbou určena jednoznačně.

Věta 24. Otočení se středem S a úhlem velikosti α převádí přímku p v přímku p' různoběžnou s p ; přitom dva vrcholové úhly, které p a p' tvoří, mají velikost α .

Analytické vyjádření otočení (rotace) $R(S, \alpha)$ v rovině

Souřadnice středu: $S = [s_1, s_2]$

$$x' = (x - s_1) \cos \alpha - (y - s_2) \sin \alpha + s_1$$

$$y' = (x - s_1) \sin \alpha + (y - s_2) \cos \alpha + s_2$$

Po úpravě dostaneme:

$$x' = x \cos \alpha - y \sin \alpha + s_1 - s_1 \cos \alpha + s_2 \sin \alpha$$

$$y' = x \sin \alpha + y \cos \alpha + s_2 - s_1 \sin \alpha - s_2 \cos \alpha$$

PŘÍKLAD 8.5. Afinní zobrazení euklidovské roviny na sebe zobrazuje vrchol A trojúhelníku ABC na bod B , bod B na bod C a bod C na bod A . Může to být zobrazení shodné? Jestliže ano, napište jeho rovnice vzhledem k vhodně zvolené kartézské soustavě souřadnic.

Cvičení – Otočení

24. Jsou dány dvě shodné úsečky AB , CD . Určete otočení, které zobrazí A na C a B na D . [2]

25. Je dána kružnice $k(S; r)$ a bod $P \neq S$. Bodem P vedte přímku, na které kružnice vytíná úsečku dané velikosti d .

26. Jsou dány různé rovnoběžné přímky a, b, c a bod A , který leží na přímce a . Sestrojte všechny rovnostranné trojúhelníky ABC , jejichž vrcholy B, C leží po řadě na přímkách b, c .

27. Je dána kružnice $k(S; 3cm)$ a bod A ($|SA| = 1.5cm$). Sestrojte všechny tětivy XY kružnice k o délce $5.5cm$, které procházejí bodem A .

28. Je dána kružnice $k(S; r)$, bod B a úsečka délky d ($d < 2r$). Sestrojte tětivu XY kružnice k délky d tak, aby byla vidět z bodu B pod úhlem 60° .

Otočení - Úlohy na domácí přípravu

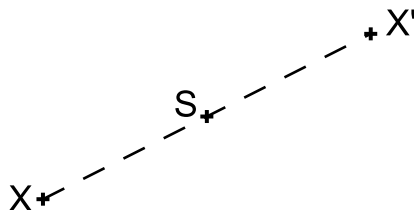
29. Jsou dány dvě rovnoběžné přímky a, b a mimo ně bod C . Sestrojte rovnostranný trojúhelník ABC tak, aby jeho vrcholy A, B ležely po řadě na přímkách a, b .

30. Jsou dány kružnice k , přímka p a bod A ležící vně k . Sestrojte rovnostranný trojúhelník s vrcholem v bodě A tak, aby zbývající vrcholy ležely na k a na p .

31. Při odvalování kružnice po přímce se body soustavy spojené s kružnicí pohybují po trajektoriích, kterým se říká **cykloidy**. Rozlišujeme tři typy cykloid, v závislosti na tom, zda bod leží vně, na nebo uvnitř kružnice. Zobrazte tyto křivky pomocí programu GeoGebra.

8.3 Středová souměrnost

Definice 21. Středová souměrnost se středem S je shodné zobrazení, které bodu S přiřazuje týž bod S a libovolnému bodu $X \neq S$ přiřazuje bod X' tak, že bod S je středem úsečky XX' . Zobrazení značíme $\mathcal{S}(S)$.



Obrázek 22: Středová souměrnost $\mathcal{S}(S)$

Poznámka. Středovou souměrnost můžeme chápat též jako speciální případ rotace $\mathbf{R}(S, \alpha)$ pro $\alpha = \pi$, tj. $\mathcal{S}(S) = \mathcal{R}(S, \pi)$.

Vlastnosti středové souměrnosti:

- 1) Lze ji rozložit na dvě osové souměrnosti, jejichž osy jsou navzájem kolmé a procházejí středem souměrnosti S ; jedna z os je volitelná.
- 2) Vznikne složením libovolných dvou osových souměrností, jejichž osy jsou k sobě kolmé (střed souměrnosti S odpovídá průsečíku těchto os).
- 3) Je jednoznačně určena svým středem
- 4) Je to *involutorní zobrazení* (též *involuce*).
- 5) Středová souměrnost je *přímá shodnost*.
- 6) Středová souměrnost má jediný samodružný bod, střed S , a všechny směry samodružné.

Věta 25. V souměrnosti podle středu S je obrazem každé přímky přímka s ní rovnoběžná. Přímka, která prochází středem S je samodružná.

Analytické vyjádření středové souměrnosti $\mathbf{S}(S)$ v rovině

Souřadnice středu: $S = [s_1, s_2]$

$$x' = -x + 2s_1$$

$$y' = -y + 2s_2$$

Věta 26. Každá shodnost v rovině se dá složit z nejvýše tří osových souměrností.

Cvičení – Středová souměrnost

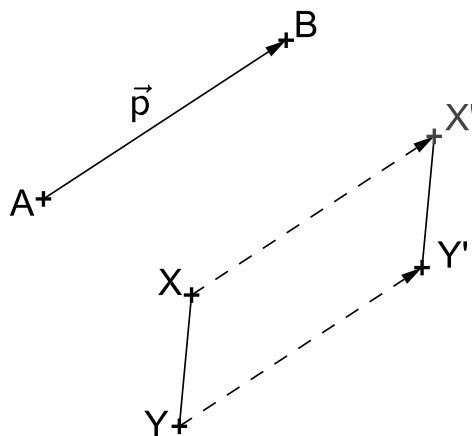
- 32.** Je dána kružnice $k(O; r)$ a přímka p , která má od středu O vzdálenost $v > 0$; dále je dán bod S , který leží uvnitř poloroviny pO . Sestrojte úsečku se středem S , která má krajní body K, P po řadě na kružnici k a na přímce p .
- 33.** Je dána kružnice $k(S, r)$. Bodem P , který leží vně kružnice k , vedte přímku p , která protíná kružnici v bodech A, B tak, že A je středem úsečky BP .
- 34.** Je dán úhel AVB a bod S jeho vnitřku. Sestrojte na rameni VA bod X a na rameni VB bod Y tak, aby bod S byl středem úsečky XY .
- 35.** Je dána úsečka AA_1 ($|AA_1| = 5\text{cm}$). Sestrojte všechny trojúhelníky ABC , pro které je AA_1 těžnicí t_a a pro které platí: $c = 4\text{cm}, b = 7\text{cm}$.
- 36.** Je dána úsečka AA_1 ($|AA_1| = 5\text{cm}$). Sestrojte všechny trojúhelníky ABC , pro které je AA_1 těžnicí t_a a pro které platí: $\gamma = 45^\circ, \beta = 60^\circ$.
- 37.** Jsou dány dvě kružnice k_1, k_2 , které se protínají ve dvou bodech Q a R . Bodem Q vedte přímku, která vytíná na obou kružnicích tětivy stejné délky.

Středová souměrnost - Úlohy na domácí přípravu

- 38.** Je dán trojúhelník ABC a jeho vnitřní bod M . Sestrojte všechny úsečky XY se středem M a s krajními body X, Y na hranici trojúhelníku.
- 39.** Vepište danému rovnoběžníku $ABCD$ čtverec $XYUV$ tak, aby na každé straně rovnoběžníku ležel jeden vrchol čtverce.
- 40.** Je dán úhel AVB a bod S jeho vnitřku. Sestrojte na rameni VA bod X a na rameni VB bod Y tak, aby $XY S$ byl rovnoramenný pravoúhlý trojúhelník s přeponou XY .
- 41.** Je dána úsečka AA_1 ; $|AA_1| = 4.5\text{cm}$. Sestrojte všechny pravoúhlé trojúhelníky ABC s pravým úhlem při vrcholu C , v nichž AA_1 je těžnicí t_a a $t_b = 6\text{cm}$.

8.4 Posunutí

Definice 22. Orientovanou úsečkou AB je dán vektor $\vec{p} = \overrightarrow{AB}$. **Posunutí** neboli **translace** je zobrazení, které každému bodu X roviny přiřazuje bod X' tak, že platí $\overrightarrow{XX'} = \vec{p}$, tj. $X' = X + \vec{p}$. Zobrazení značíme $\mathcal{T}(\vec{p})$.



Obrázek 23: Posunutí $\mathcal{T}(\vec{p})$

Poznámka. Posunutí (translaci) můžeme definovat též jako shodnost, která vznikne složením dvou osových souměrností s rovnoběžnými a různými osami. Směr posunutí je potom kolmý na směr těchto os a jeho velikost je rovna dvojnásobku jejich vzdálenosti.

Věta 27. Každou translaci lze složit ze dvou osových souměrností s rovnoběžnými osami z nichž jednu lze volit libovolně, kolmo na směr translace a druhá je touto volbou určena jednoznačně.

Věta 28. Posunutí (translace) nemá žádný samodružný bod a zobrazuje přímku do přímky s ní rovnoběžné (tj. má všechny směry samodružné).

Věta 29. Nechť X' je obraz libovolného (proměnného) bodu X v dané translaci \mathbf{T} . Pak všechny přímky XX' jsou navzájem rovnoběžné a všechny úsečky XX' jsou navzájem shodné.

Analytické vyjádření posunutí $\mathbf{T}(\vec{p})$ v rovině

Rovnice posunutí $\mathcal{T}(\vec{p})$, kde $\vec{p} = (p_1, p_2)$:

$$x' = x + p_1$$

$$y' = y + p_2$$

PŘÍKLAD 8.6. Jaké zobrazení může být výsledkem skládání dvou posunutí?

Cvičení – Posunutí

- 42.** Jsou dány přímka p a dvě nesoustředné kružnice $k_1(S_1, r_1)$, $k_2(S_2, r_2)$. Vedte přímku rovnoběžnou s přímkou p tak, aby na ní kružnice k_1, k_2 vytínaly shodné tětivy.
- 43.** Sestrojte čtyřúhelník $ABCD$, jehož úhlopříčky svírají pravý úhel, jsou-li dány velikosti úhlopříček $|AC| = e$, $|BD| = f$ a velikosti úhlů $|\angle ABC| = 90^\circ$, $|\angle ADC| = \delta$.
- 44.** Sestrojte lichoběžník, jsou-li dány velikosti jeho stran a, b, c, d .
- 45.** Sestrojte čtyřúhelník $ABCD$, jsou-li dány velikosti jeho stran $|AB| = a$, $|BC| = b$, $|CD| = c$, $|DA| = d$ a odchylka ω přímek AD, BC .
- 46.** Sestrojte rovnoběžník, jsou-li dány délky jeho stran a velikost úhlu jeho úhlopříček.
- 47.** Sestrojte lichoběžník $ABCD$, jsou-li dány délky obou jeho základů a, c a obou jeho úhlopříček e, f .
- 48.** Jsou dány dvě různoběžky a, b a úsečka délky r . Sestrojte všechny kružnice k se středem na přímce a , poloměrem r , které na přímce b vytínají tětivu délky r .

8.5 Posunuté zrcadlení

PŘÍKLAD 8.7. Je dána přímka p a dva body A, B v téže polorovině s hraniční přímkou p . Na přímce p sestrojte úsečku XY délky d tak, aby součet $|AX| + |XY| + |YB|$ byl co nejmenší.

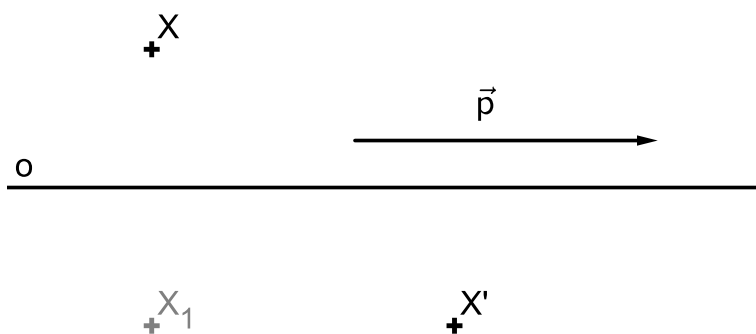
Víme, že každá shodnost v rovině se dá složit z nejvýše tří osových souměrností. V případech jedné a dvou osových souměrností už máme jasno - složením jedné osové souměrnosti může vzniknout samozřejmě jenom tato souměrnost, složením dvou osových souměrností pak lze vytvořit otočení (různoběžné osy), středovou souměrnost (kolmé osy), posunutí (rovnoběžné osy) a identitu (dvě totožné osy). Každé z těchto zobrazení je zároveň unikátní svou skladbou samodružných bodů a směrů

- osová souměrnost má přímku samodružných bodů a dva na sebe kolmé samodružné směry,
- otočení má jediný samodružný bod a žádný samodružný směr,
- středová souměrnost má jediný samodružný bod a všechny směry samodružné,
- identita má všechny body i směry samodružné.

Pokud existuje nějaké další shodné zobrazení, nemůže mít žádný samodružný bod (jinak by to bylo otočení, středová souměrnost, osová souměrnost nebo identita). Naším úkolem je proto vyšetřit, zda **existuje shodné zobrazení bez samodružných bodů, které vznikne složením tří osových souměrností.**

Ukáže se, že takové zobrazení skutečně existuje. Nazveme ho *posunuté zrcadlení* (též *posunutá souměrnost*).

Definice 23. Je dána přímka o . Zobrazení složené z posunutí ve směru přímky o a osové souměrnosti podle osy o se nazývá *posunuté zrcadlení* (též *posunutá souměrnost*).



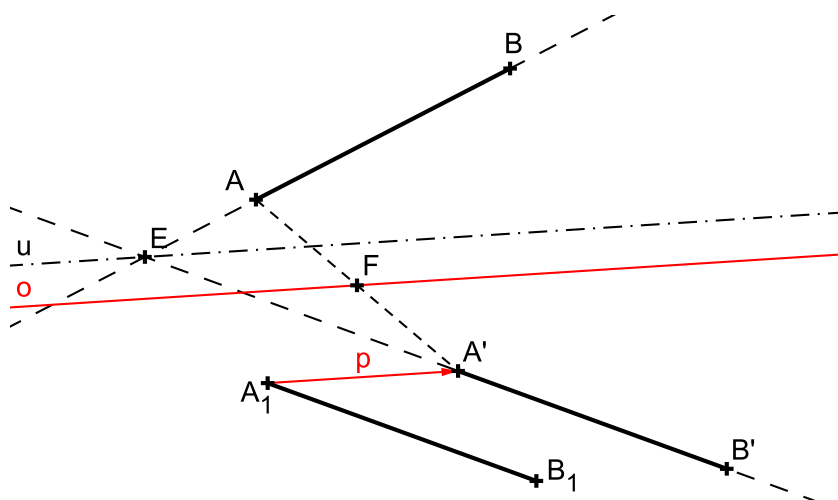
Obrázek 24: Posunuté zrcadlení $Z : X \rightarrow X'$

Věta 30. Posunuté zrcadlení se dá složit z osové a středové souměrnosti, přičemž střed středové souměrnosti neleží na ose osové souměrnosti.

Věta 31. Posunuté zrcadlení nemá samodružné body.

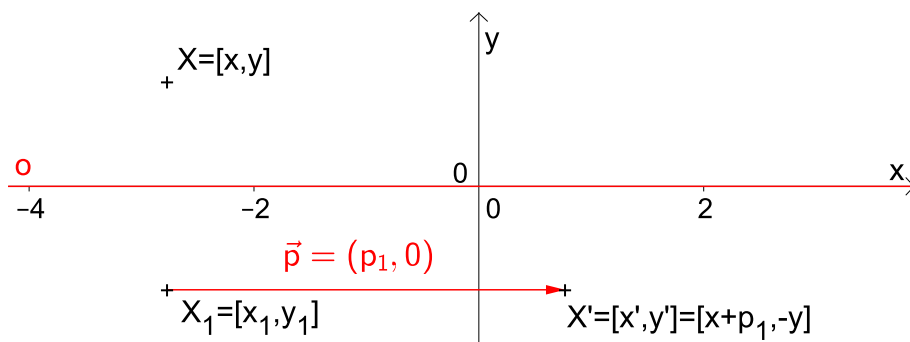
PŘÍKLAD 8.8. Necht' $AB, A'B'$ jsou různoběžné a shodné úsečky. Dokažte, že existuje posunuté zrcadlení nebo osová souměrnost, které převádějí body A, B po řadě v body A', B' .

Řešení:



Obrázek 25: Posunuté zrcadlení $\mathcal{Z} : AB \rightarrow A'B'$

Analytické vyjádření posunutého zrcadlení



Obrázek 26: Posunuté zrcadlení $\mathcal{Z} : X \rightarrow X'$

Posunuté zrcadlení dané osou souměrnosti v ose x a vektorem posunutí $\vec{p} = (p_1, 0)$ (viz Obr. 26)

$$\mathcal{Z} : \begin{aligned} x' &= x + p_1, \\ y' &= -y. \end{aligned}$$

Cvičení – Posunuté zrcadlení

49. Jsou dány dvě různoběžky a, b a na nich dva body $A \neq B$ (A na a , B na b). Určete bod X na a a bod Y na b tak, aby platilo $|AX| = |BY|$ a dále aby:

- a) $XY \parallel p$, kde p je daná přímka; [1]
- b) $XY = d$, kde d je předem daná úsečka; [1]
- c) střed úsečky XY ležel na dané přímce q . [1]

9 Grupa shodností eukleidovského prostoru

9.1 Shodné zobrazení v rovině

Definice 24. Zobrazení v rovině, které každým dvěma bodům X, Y přiřazuje body X', Y' tak, že

$$|X'Y'| = |XY|$$

se nazývá **shodné zobrazení** v rovině (též *izometrické zobrazení*).

Poznámka. Můžeme též říci, že shodné zobrazení zachovává vzdálenost bodů, tj. pro shodné zobrazení $f : X \rightarrow f(X)$ platí:

$$|f(X)f(Y)| = |XY|.$$

Věta 32. Každé shodné zobrazení je prosté a afinní.

Další vlastnosti shodných zobrazení:

1. Úsečka se zobrazí na úsečku.
2. Polopřímka se zobrazí na polopřímku.
3. Přímka se zobrazí na přímku.
4. Rovnoběžky se zobrazí na rovnoběžky.
5. Úhel se zobrazí na úhel s ním shodný.
6. Polorovina se zobrazí na polorovinu.

PŘÍKLAD 9.1. V euklidovské rovině E_2 je zvolena kartézská soustava souřadnic. Určete, pro které hodnoty čísel a, b existuje shodné zobrazení roviny E_2 do sebe, zobrazující body $[0, 0], [2, 1], [4, a]$ po řadě na body $[1, 2], [3, 1], [5, b]$? Je toto shodné zobrazení určeno jednoznačně?

Z řešení předchozího příkladu vyplývá poznatek, že pro jednoznačné určení shodnosti v rovině nesmí být příslušné trojice bodů kolineární (tj. nesmí ležet v přímce).

Věta 33 (O určenosti shodného zobrazení v rovině 1). Shodné zobrazení v rovině je jednoznačně určeno libovolnými třemi nekolineárními body K, L, M a třemi nekolineárními body K', L', M' , které jsou po řadě jejich obrazy.

Poznámka. Již víme, že stejná věta platí pro všechna afinní zobrazení v rovině (viz věta 2 o určenosti afinního zobrazení na str. 18 a věta 3 o určenosti afinity v rovině na str. 23).

9.2 Rovnice shodnosti v rovině

Každou afinitu f v rovině můžeme zapsat soustavou rovnic

$$\begin{aligned} f : x' &= a_{11}x + a_{12}y + b_1 \\ y' &= a_{21}x + a_{22}y + b_2, \end{aligned} \quad (65)$$

kterou přepíšeme užitím matic do tvaru

$$f : \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \quad (66)$$

a stručně vyjádříme rovnicí

$$f : X' = A \cdot X + B. \quad (67)$$

Jak poznáme, že afinita (65) je shodností?

Je-li tato afinita shodností, platí pro všechny dvojice bodů $X[x_1, x_2], Y[y_1, y_2]$ a jejich obrazy $X'[x'_1, x'_2], Y'[y'_1, y'_2]$ vztah $|X'Y'| = |XY|$, z něhož po dosazení souřadnic uvedených bodů dostaneme

$$\sqrt{(y'_1 - x'_1)^2 + (y'_2 - x'_2)^2} = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2}, \quad (68)$$

po umocnění obou stran na druhou

$$(y'_1 - x'_1)^2 + (y'_2 - x'_2)^2 = (y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2. \quad (69)$$

Nyní do levé strany (69) dosadíme z (65) (protože se body $X[x_1, x_2], Y[y_1, y_2]$ zobrazují v daném pořadí na body $X'[x'_1, x'_2], Y'[y'_1, y'_2]$, dosazujeme takto: $x'_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + b_1$, $x'_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + b_2$; $y'_1 = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + b_1$, $y'_2 = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + b_2$). Dostaneme rovnost

$$\begin{aligned} (a_{11}y_1 + a_{12}y_2 - a_{11}x_1 - a_{12}x_2)^2 + (a_{21}y_1 + a_{22}y_2 - a_{21}x_1 - a_{22}x_2)^2 \\ = (y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2, \end{aligned} \quad (70)$$

kterou postupně upravíme na tvar obsahující výrazy $(y_1 - x_1)$ a $(y_2 - x_2)$. Nejprve vytkneme společné koeficienty

$$\begin{aligned} [a_{11}(y_1 - x_1) + a_{12}(y_2 - x_2)]^2 + [a_{21}(y_1 - x_1) + a_{22}(y_2 - x_2)]^2 \\ = (y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2, \end{aligned} \quad (71)$$

potom umocníme závorky na levé straně a zjednodušíme ji na tvar polynomu s proměnnými $(y_1 - x_1)$ a $(y_2 - x_2)$

$$(a_{11}^2 + a_{21}^2)(y_1 - x_1)^2 + 2(a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22})(y_1 - x_1)(y_2 - x_2) + (a_{12}^2 + a_{22}^2)(y_2 - x_2)^2 = (y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2. \quad (72)$$

Nyní diskutujeme, za jakých podmínek je v (72) splněna rovnost levé strany s pravou stranou (využijeme toho, že dva polynomy jsou si rovny pro všechny hodnoty z příslušného oboru právě tehdy, když se rovnají koeficienty u sobě odpovídajících členů). Zjistíme tak, že rovnost $|X'Y'| = |XY|$ nastává právě tehdy, když jsou pro prvky matice A (tj. koeficienty soustavy (65)) splněny vztahy

$$\begin{aligned} a_{11}^2 + a_{21}^2 &= 1, \\ a_{12}^2 + a_{22}^2 &= 1, \\ a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22} &= 0, \end{aligned} \quad (73)$$

které lze stručně vyjádřit rovností

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (74)$$

Odpověď na výše uvedenou otázku je tedy taková, že **rovnice (65) je rovnicí shodnosti, právě když platí**

$$A^T \cdot A = E, \quad (75)$$

kde E je jednotková matice, jinak řečeno, když je matice A **ortonormální**.

Poznámky.

1. Platí $A^T \cdot A = E$. Potom je ale $A^T = A^{-1}$ a platí tedy i rovnost $A \cdot A^T = E$.
2. Zobrazení, pro která platí $|\det A| = 1$ nazýváme ekviafinitní zobrazení, stručně **ekviafinity**. Je zřejmé, že každá shodnost je ekviafinita. Platí toto tvrzení i obráceně? Můžeme říci, že každá ekviafinita je shodností?
3. Je třeba si uvědomit, že při shodném zobrazení mezi euklidovskými prostory různých dimenzí není matice A čtvercová. Potom výše uvedené úvahy o inverzní matici nemají smysl a v platnosti zůstává pouze původní podmínka $A^T \cdot A = E$.

9.3 Analytická vyjádření shodných zobrazení v E_2

Osová souměrnost

Osová souměrnost $\mathbf{O}(o)$ podle osy o s obecnou rovnicí $o : ax + by + c = 0$:

$$\begin{aligned}x' &= x - \frac{2a}{a^2 + b^2} (ax + by + c) \\y' &= y - \frac{2b}{a^2 + b^2} (ax + by + c)\end{aligned}$$

PŘÍKLAD 9.2. V eukleidovské rovině je dána souměrnost podle přímky $p : 3x - 4y + 1 = 0$. Napište rovnice této souměrnosti.

PŘÍKLAD 9.3. Napište rovnice souměrnosti podle přímky $o : 2x - 3y + 1 = 0$.

PŘÍKLAD 9.4. Napište rovnice osové souměrnosti, zobrazující počátek na bod $[1, 5]$.

Otočení

Otočení (rotace) $\mathbf{R}(S, \alpha)$ se středem $S = [s_1, s_2]$:

$$\begin{aligned}x' &= (x - s_1) \cos \alpha - (y - s_2) \sin \alpha + s_1 \\y' &= (x - s_1) \sin \alpha + (y - s_2) \cos \alpha + s_2\end{aligned}$$

Po úpravě:

$$\begin{aligned}x' &= x \cos \alpha - y \sin \alpha + s_1 - s_1 \cos \alpha + s_2 \sin \alpha \\y' &= x \sin \alpha + y \cos \alpha + s_2 - s_1 \sin \alpha - s_2 \cos \alpha\end{aligned}$$

PŘÍKLAD 9.5. Napište rovnice otočení se středem $S[1, -2]$ o úhel $\alpha = 60^\circ$.

Středová souměrnost

Středová souměrnost $\mathbf{S}(S)$ se středem $S = [s_1, s_2]$:

$$\begin{aligned}x' &= -x + 2s_1 \\y' &= -y + 2s_2\end{aligned}$$

PŘÍKLAD 9.6. Napište rovnice středové souměrnosti $\mathbf{S}(S)$ se středem $S[-2, 3]$.

Posunutí

Posunutí (translace) $\mathbf{T}(\vec{p})$ určené vektorem $\vec{p} = [p_1, p_2]$:

$$x' = x + p_1$$

$$y' = y + p_2$$

PŘÍKLAD 9.7. *Napište rovnice posunutí, které je určeno vzorem $A = [-1, 3]$ a jeho obrazem $A' = [4, 2]$.*

Posunuté zrcadlení

Posunuté zrcadlení s osou v souřadnicové ose x :

$$x' = x + p$$

$$y' = -y$$

9.4 Analytická vyjádření vybraných shodných zobrazení v E_3

Posunutí

Posunutí určené vektorem $\vec{p} = (p_1, p_2, p_3)$:

$$x' = x + p_1$$

$$y' = y + p_2$$

$$z' = z + p_3.$$

Otočení

Otočení o úhel α kolem osy z :

$$x' = x \cos \alpha - y \sin \alpha$$

$$y' = x \sin \alpha + y \cos \alpha$$

$$z' = z.$$

Středová souměrnost

Souměrnost podle počátku $O = (0, 0, 0)$:

$$x' = -x$$

$$y' = -y$$

$$z' = -z.$$

Osová souměrnost

Souměrnost podle osy z :

$$x' = -x$$

$$y' = -y$$

$$z' = z.$$

Rovinová souměrnost

Souměrnost podle roviny (x, y) :

$$x' = x$$

$$y' = y$$

$$z' = -z.$$

Šroubový pohyb

Šroubový pohyb (torze) s parametrem (redukovanou výškou závitu) v_0 a s osou v ose z :

$$x' = x \cos \alpha - y \sin \alpha$$

$$y' = x \sin \alpha + y \cos \alpha$$

$$z' = z + v_0 \alpha.$$

9.5 Skládání shodných zobrazení

(a) Přímou shodnost lze rozložit v sudý počet osových souměrností, nepřímou shodnost v lichý počet osových souměrností.

(b) Složíme-li dvě shodnosti přímé nebo dvě shodnosti nepřímé, dostaneme shodnost přímou; složíme-li shodnost přímou a nepřímou, vznikne shodnost nepřímá.

9.6 Grupa shodností v rovině

Poznatky získané řešením výše uvedených příkladů nasvědčují tomu, že *množina shodností v rovině spolu s operací skládání zobrazení* tvoří grupu. Některé podmnožiny množiny shodností navíc tvoří spolu s operací skládání zobrazení podgrupy.

PŘÍKLAD 9.8. *Ověřte následující tvrzení:*

- (a) *Všechny shodnosti v rovině tvoří grupu G_S .*
- (b) *Všechny přímé shodnosti tvoří podgrupu G'_S grupy G_S .*
- (c) *Množina všech translací doplněná identitou, tvoří grupu, která je podgrupou grupy přímých shodností.*
- (d) *Množina všech translací a středových souměrností, doplněná identitou, tvoří podgrupu grupy G'_S .*

PŘÍKLAD 9.9. *Trojúhelník ABC byl převeden otočením daného smyslu se středem S a úhlem velikosti $\omega = 120^\circ$ v trojúhelník $A_1B_1C_1$, který byl dále převeden posunutím $\mathcal{T}(A_1 \rightarrow A_2)$ v trojúhelník $A_2B_2C_2$. Určete otočení, které převádí přímo $\triangle ABC$ v $\triangle A_2B_2C_2$.*

PŘÍKLAD 9.10. *Je dán rovnostranný trojúhelník ABC . Najděte všechny shodnosti, které převádějí tento trojúhelník do něho samého. Zkoumejte vlastnosti množiny těchto shodností spolu s operací skládání shodností.*

9.7 Klasifikace shodností roviny

Cílem klasifikace shodností v rovině (obecně afinních zobrazení v prostoru A_n) je získat úplný (vyčerpávající) přehled těchto zobrazení a jejich analytických vyjádření. Postupujeme od obecné podoby rovnice zobrazení. Z té analýzou všech možných konfigurací samodružných bodů a směrů, které toto zobrazení připouští, dostaneme úplný přehled všech jeho variant.

Myšlenka úplné klasifikace shodností: Klasifikace shodností roviny je založena na zkoumání možných samodružných bodů a směrů zobrazení, které je dáno rovnicí (soustavou lineárních rovnic)

$$f : X' = A \cdot X + B. \quad (76)$$

Tento postup si nejprve ilustrujeme řešením následujícího příkladu, poté provedeme obecnou klasifikaci shodností roviny E_2 , viz str. 73, a trojrozměrného prostoru E_3 , viz str. 78.

PŘÍKLAD 9.11. Zjistěte, zda existuje shodnost E_2 , při které se bod $K = [10; 0]$ zobrazí na počátek $K' = [0; 0]$ a bod $L = [25; 20]$ na bod $L' = [0; 25]$. V kladném případě napište rovnice tohoto zobrazení a najděte jeho samodružné body.

Než začneme aplikovat níže uvedený postup, stojí za to si u takovýchto úloh ověřit, zda je vůbec splněna definice shodného zobrazení, tj. zda $|K'L'| = |KL|$.

Řešení v programu wxMaxima:

Definujeme obecnou podobu matic A , B z rovnice (76).

```
(%i30) A:matrix([a11,a12],[a21,a22]); b:matrix([b1],[b2]);
```

```
(%o30)  $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ 
```

```
(%o31)  $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ 
```

Do rovnice (76) dosadíme dané body a jejich obrazy, dostaneme dvojici rovnic s_1 a s_2 . Třetí skupinu rovnic s_3 dostaneme z podmínky $A^T \cdot A - I = 0$.

```
(%i32) s1:A.[10,0]+b-[0,0]; s2:A.[25,20]+b-[0,25];  
s3:transpose(A).A-ident(2);
```

```
(%o32)  $\begin{pmatrix} b_1 + 10 a_{11} \\ b_2 + 10 a_{21} \end{pmatrix}$ 
```

$$(\%o33) \begin{pmatrix} b1 + 20 a12 + 25 a11 \\ b2 + 20 a22 + 25 a21 - 25 \end{pmatrix}$$

$$(\%o34) \begin{pmatrix} a21^2 + a11^2 - 1 & a21 a22 + a11 a12 \\ a21 a22 + a11 a12 & a22^2 + a12^2 - 1 \end{pmatrix}$$

Dohromady tak máme soustavu sedmi rovnic o šesti naznamých $a11$, $a12$, $a21$, $a22$, $b1$, $b2$.

(%i35) `rov:[s1[1,1],s1[2,1],s2[1,1],s2[2,1],s3[1,1],s3[1,2],s3[2,2]];`

$$(\%o35) [b1 + 10 a11, b2 + 10 a21, b1 + 20 a12 + 25 a11, b2 + 20 a22 + 25 a21 - 25, a21^2 + a11^2 - 1, a21 a22 + a11 a12, a22^2 + a12^2 - 1]$$

Soustavu má dvě řešení (nejedná se o soustavu lineárních rovnic, proto může mít dvě řešení).

(%i36) `res:solve(rov,[a11,a12,a21,a22,b1,b2]);`

$$(\%o36) [[a11 = \frac{4}{5}, a12 = -\frac{3}{5}, a21 = \frac{3}{5}, a22 = \frac{4}{5}, b1 = -8, b2 = -6], [a11 = -\frac{4}{5}, a12 = \frac{3}{5}, a21 = \frac{3}{5}, a22 = \frac{4}{5}, b1 = 8, b2 = -6]]$$

Dvěma řešeními odpovídají dvě různé shodnosti. Zjistili jsme tedy, že existují dvě shodnosti, které převádějí body K, L na body K', L' (což se, vzhledem ke větě o určenosti shodného (afinního) zobrazení dalo čekat). Pokračujeme v řešení úlohy pro každou z těchto shodností zvlášť. Nejprve si připravíme matici `RovTr` pro zápis rovnic uvažovaných shodností (není nutnou součástí postupu řešení, jedná se jenom o usnadnění vizuální prezentace rovnic v programu).

(%i37) `RovTr:matrix([x1=a11*x+a12*y+b1],[y1=a21*x+a22*y+b2]);`

$$(\%o37) \begin{pmatrix} x1 = a12 y + a11 x + b1 \\ y1 = a22 y + a21 x + b2 \end{pmatrix}$$

I. Shodnost daná rovnicemi

$$\begin{aligned} x1 &= \frac{4x}{5} - \frac{3y}{5} - 8 \\ y1 &= \frac{3x}{5} + \frac{4y}{5} - 6 \end{aligned}$$

Definujeme matice $A1$, $B1$ tohoto zobrazení a zapíšeme jeho rovnice.


```
(%i38) A1:ev(A,res[1]); B1:ev(b,res[1]);
```

$$(\%o38) \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix}$$

$$(\%o39) \begin{pmatrix} -8 \\ -6 \end{pmatrix}$$

```
(%i40) R1:ev(RovTr,res[1]);
```

$$(\%o40) \begin{pmatrix} x1 = -\frac{3y}{5} + \frac{4x}{5} - 8 \\ y1 = \frac{4y}{5} + \frac{3x}{5} - 6 \end{pmatrix}$$

Samodružné body najdeme řešením rovnice $X = A \cdot X + B$, pro snazší zpracování programem přepsané do tvaru $A \cdot X + B - X = 0$.

```
(%i41) RovSB1:A1.[x,y]+B1-[x,y]; solve([RovSB1[1,1],RovSB1[2,1]],[x,y]);
```

$$(\%o41) \begin{pmatrix} -\frac{3y}{5} - \frac{x}{5} - 8 \\ -\frac{y}{5} + \frac{3x}{5} - 6 \end{pmatrix}$$

$$(\%o42) [[x = 5, y = -15]]$$

Uvažované shodné zobrazení má tedy jediný samodružný bod $S = [5, -15]$.

Pro určení samodružných směrů řešíme charakteristickou rovnici (64) homomorfismu asociovaného s daným shodným zobrazením.

```
(%i43) CharA1:A1-%lambda*ident(2);  
CharR1:expand(determinant(CharA1))=0;  
solve(CharR1,%lambda);
```

$$(\%o43) \begin{pmatrix} \frac{4}{5} - \lambda & -\frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{4}{5} - \lambda \end{pmatrix}$$

$$(\%o44) \lambda^2 - \frac{8\lambda}{5} + 1 = 0$$

$$(\%o45) [\lambda = -\frac{3i-4}{5}, \lambda = \frac{3i+4}{5}]$$

Charakteristická rovnice nemá reálné kořeny. To znamená, že uvažované shodné zobrazení nemá samodružné směry.

Protože uvažované zobrazení má právě jeden samodružný bod a nemá žádný samodružný směr, jedná se o OTOČENÍ.

II. Shodnost daná rovnicemi

$$x_1 = -\frac{4x}{5} + \frac{3x}{5} + 8$$

$$y_1 = \frac{3x}{5} + \frac{4z}{5} - 6$$

Definujeme matice A2, B2 tohoto zobrazení a zapíšeme jeho rovnice.

```
(%i46) A2:ev(A,res[2]); B2:ev(b,res[2]);
```

```
(%o46)  $\begin{pmatrix} -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix}$ 
```

```
(%o47)  $\begin{pmatrix} 8 \\ -6 \end{pmatrix}$ 
```

```
(%i48) R2:ev(RovTr,res[2]);
```

```
(%o48)  $\begin{pmatrix} x_1 = \frac{3y}{5} - \frac{4x}{5} + 8 \\ y_1 = \frac{4y}{5} + \frac{3x}{5} - 6 \end{pmatrix}$ 
```

Samodružné body najdeme řešením rovnice $X = A \cdot X + B$, pro snazší zpracování programem přepsané do tvaru $A \cdot X + B - X = 0$.

```
(%i49) RovSB2:A2.[x,y]+B2-[x,y]; solve([RovSB2[1,1],RovSB2[2,1]],[x,y]);
```

```
(%o49)  $\begin{pmatrix} \frac{3y}{5} - \frac{4x}{5} + 8 \\ -\frac{y}{5} + \frac{3x}{5} - 6 \end{pmatrix}$ 
```

```
(%o50) []
```

Uvažované shodné zobrazení tedy nemá žádný samodružný bod.

Pro určení samodružných směrů řešíme charakteristickou rovnici (64) homomorfismu asociovaného s daným shodným zobrazením.

```
(%i51) CharA2:A2-%lambda*ident(2);
CharR2:expand(determinant(CharA2))=0;
solve(CharR2,%lambda);
```

```
(%o51)  $\begin{pmatrix} -\lambda - \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{4}{5} - \lambda \end{pmatrix}$ 
```

```
(%o52)  $\lambda^2 - 1 = 0$ 
```

```
(%o53)  $[\lambda = -1, \lambda = 1]$ 
```

Charakteristická rovnice má dva reálné kořeny (vlastní čísla). Každému z nich odpovídá jeden vlastní (charakteristický) vektor určující samodružný směr. Postupně dosadíme získaná vlastní čísla λ do soustavy (její matice) (63) a řešíme.

(%i54) `RovSS2:A2.[u,v]-[%lambda*u,%lambda*v];`

$$(%o54) \begin{pmatrix} \frac{3v}{5} - \lambda u - \frac{4u}{5} \\ -\lambda v + \frac{4v}{5} + \frac{3u}{5} \end{pmatrix}$$

(%i55) `RovSS21:ev(RovSS2,%lambda=-1);`
`solve([RovSS21[1,1],RovSS21[2,1]],[u,v]);`

$$(%o55) \begin{pmatrix} \frac{3v}{5} + \frac{u}{5} \\ \frac{9v}{5} + \frac{3u}{5} \end{pmatrix} \text{ solve : dependentequationseliminated : (2)}$$

$$(%o56) [[u = -3 \%r3, v = \%r3]]$$

První samodružný směr je určen vektorem $\vec{u}_1 = (-3, 1)$.

(%i57) `RovSS22:ev(RovSS2,%lambda=1);`
`solve([RovSS22[1,1],RovSS22[2,1]],[u,v]);`

$$(%o57) \begin{pmatrix} \frac{3v}{5} - \frac{9u}{5} \\ \frac{3u}{5} - \frac{v}{5} \end{pmatrix} \text{ solve : dependentequationseliminated : (2)}$$

$$(%o58) [[u = \frac{\%r4}{3}, v = \%r4]]$$

Druhý samodružný směr je určen vektorem $\vec{u}_2 = (1, 3)$.

Protože uvažované zobrazení nemá žádný samodružný bod a má dva (na sebe kolmé) samodružné směry, jedná se o POSUNUTÉ ZRCADLENÍ.

Klasifikace shodností roviny

Z podmínky $A^T \cdot A = E$ plyne, že afinní zobrazení určené rovnicemi

$$\begin{aligned} x' &= a_{11}x + a_{12}y + b_1 \\ y' &= a_{21}x + a_{22}y + b_2, \end{aligned}$$

je shodností právě tehdy, když platí následující rovnosti:

$$\begin{aligned} a_{11}^2 + a_{21}^2 &= a_{12}^2 + a_{22}^2 = 1 \\ a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22} &= a_{12}a_{11} + a_{22}a_{21} = 0 \end{aligned}$$

Potom je zřejmé, že existuje úhel $\alpha \in \langle 0^\circ; 360^\circ \rangle$ takový, že lze napsat

$$\begin{aligned} a_{11} &= \cos \alpha, \\ a_{21} &= \sin \alpha, \\ a_{12} \cos \alpha + a_{22} \sin \alpha &= 0, \\ a_{22} &= \varepsilon \cos \alpha, \\ a_{12} &= -\varepsilon \sin \alpha, \text{ kde } \varepsilon = \pm 1. \end{aligned}$$

Hodnota ε určuje, zda se jedná o shodnost přímou ($\varepsilon = 1$) nebo nepřímou ($\varepsilon = -1$).

I. Přímé shodnosti

Každou přímou shodnost v rovině můžeme vyjádřit rovnicemi ve tvaru

$$\begin{aligned} x'_1 &= x_1 \cos \alpha - x_2 \sin \alpha + b_1 \\ x'_2 &= x_1 \sin \alpha + x_2 \cos \alpha + b_2 \end{aligned}$$

Samodružné body

Samodružné body přímé shodnosti jsou řešením soustavy rovnic

$$\begin{aligned} x_1(1 - \cos \alpha) + x_2 \sin \alpha &= b_1 \\ -x_1 \sin \alpha + x_2(1 - \cos \alpha) &= b_2. \end{aligned} \tag{77}$$

Nejprve nás bude zajímat přímá shodnost v rovině, která má právě jeden samodružný bod. Soustava (77) má právě jedno řešení, pokud je regulární, tj. pokud pro její determinant platí

$$\begin{vmatrix} (1 - \cos \alpha), & \sin \alpha \\ -\sin \alpha, & (1 - \cos \alpha) \end{vmatrix} \neq 0.$$

Po úpravě dostaneme

$$2(1 - \cos \alpha) \neq 0,$$

což vede k podmínce

$$\cos \alpha \neq 1.$$

Tak dostáváme

1) OTOČENÍ (ROTACI).

Stačí volit počátek soustavy souřadné v onom jediném samodružném bodě a dostaneme známé vyjádření rotace kolem počátku o úhel α :

$$x'_1 = x_1 \cos \alpha - x_2 \sin \alpha$$

$$x'_2 = x_1 \sin \alpha + x_2 \cos \alpha$$

Samodružné směry

Samodružné směry (tj. vektory těchto směrů) přímé shodnosti jsou **netriviálním** řešením soustavy homogenních rovnic

$$\begin{aligned} u_1(\lambda - \cos \alpha) + u_2 \sin \alpha &= 0 \\ -u_1 \sin \alpha + u_2(\lambda - \cos \alpha) &= 0. \end{aligned} \tag{78}$$

Ta má netriviální (tj. nekonečně mnoho) řešení právě tehdy, když je splněna charakteristická rovnice přímé shodnosti v rovině

$$\begin{vmatrix} (\lambda - \cos \alpha) & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & (\lambda - \cos \alpha) \end{vmatrix} = 0. \tag{79}$$

Úpravou (79) dostaneme rovnici

$$(\lambda - \cos \alpha)^2 + \sin^2 \alpha = 0,$$

která je splněna za předpokladu, že $\sin \alpha = 0$ a zároveň $\cos \alpha = 1 = \lambda$ nebo $\cos \alpha = -1 = \lambda$. Pro $\cos \alpha = -1$ tak dostáváme

2) STŘEDOVOU SOUMĚRNOST

s analytickým vyjádřením

$$x'_1 = -x_1 + b_1$$

$$x'_2 = -x_2 + b_2.$$

Za podmínky, že $\cos \alpha = 1$ dostaneme, pro $b_1 = b_2 = 0$,

3) IDENTITU

$$x'_1 = x_1$$

$$x'_2 = x_2$$

a pro $b_1 \neq 0 \vee b_2 \neq 0$ dostáváme

4) POSUNUTÍ

$$x'_1 = x_1 + b_1$$

$$x'_2 = x_2 + b_2.$$

II. Nepřímé shodnosti

Každou nepřímou shodnost v rovině můžeme vyjádřit rovnicemi ve tvaru

$$\begin{aligned}x'_1 &= x_1 \cos \alpha + x_2 \sin \alpha + b_1 \\x'_2 &= x_1 \sin \alpha - x_2 \cos \alpha + b_2.\end{aligned}$$

Samodružné směry

K vyšetření nepřímých shodností použijeme samodružné směry. Řešením charakteristické rovnice

$$\begin{vmatrix}(\lambda - \cos \alpha), & -\sin \alpha \\ -\sin \alpha, & (\lambda + \cos \alpha)\end{vmatrix} = 0, \quad (80)$$

dostaneme podmínku

$$\lambda = \pm 1,$$

kteřá odpovídá tomu, že uvažované zobrazení má dva navzájem kolmé samodružné směry. Jeden, pro $\lambda = 1$, se zachovává, druhý, pro $\lambda = -1$, se mění v opačný. Volme soustavu souřadnou tak, aby osa x měla směr odpovídající $\lambda = 1$. Směr osy y pak zřejmě odpovídá $\lambda = -1$. Potom je nepřímá shodnost popsána rovnicemi

$$\begin{aligned}x'_1 &= x_1 + b_1 \\x'_2 &= -x_2 + b_2.\end{aligned}$$

Pokud je $b_1 = 0$, má uvažované zobrazení **přímku samodružných bodů** a jedná se tedy o

5) OSOVOU SOUMĚRNOST

$$\begin{aligned}x'_1 &= x_1 \\x'_2 &= -x_2 + b_2.\end{aligned}$$

Pokud je ale $b_1 \neq 0$, má pouze **samodružnou přímku** a jedná se o

6) POSUNUTÉ ZRCADLENÍ.

9.8 Cvičení – Shodnosti v rovině

50. Určete parametr s tak, aby existovala shodnost roviny zobrazující body $[0, 0]$, $[3, 4]$ po řadě na body $[5, 0]$, $[9, s]$. Napište rovnice tohoto zobrazení a souřadnice obrazu bodu $[5, 0]$. [2]

51. Určete a , b , c tak, aby rovnice $x' = \frac{3}{4}x + by + 1$, $y' = ax + cy - 1$ vyjadřovaly shodnost. [3]

52. Shodné zobrazení euklidovské roviny do euklidovského prostoru je dáno vzhledem ke kartézským soustavám souřadnic rovnicemi

a) $x' = x + \frac{1}{2}y + 1$, $y' = ax + \frac{1}{2}y - 1$, $z' = bx + cy + 3$,

b) $x' = x + by - 2$, $y' = \frac{1}{2}y + 1$, $z' = ax + cy - 3$.

Určete koeficienty a, b, c .

53. Najděte souřadnice obrazu bodu $B = [1, 2]$ v otočení v E_2 kolem středu $S = [3, -4]$ o úhel $\alpha = 420^\circ$. Napište rovnice této shodnosti.

54. Určete p, q tak, aby existovala shodnost zobrazující body $[3, 0], [1, 2], [-1, -1]$ po řadě na body $[1, 4], [p, 2], [2, q]$. Najděte samodružné body a směry tohoto zobrazení.

55. Napište rovnice středové souměrnosti v E_2 podle středu $S = [-4, 5]$.

56. Napište rovnice shodnosti roviny E_2 , která vznikne složením tří osových souměrností s osami o rovnicích: $x = 0$, $y = 0$, $x - 2y = 0$.

57. Rotace kolem bodu $S = [2; 1]$ v E_2 zobrazuje bod $A = [1; 1]$ na bod A' . Najděte souřadnice bodu A' , jestliže pro úhel rotace α platí $\alpha = \frac{2}{3}\pi$.

58. Najděte souřadnice středu a úhel rotace, která je dána rovnicemi: $x' = \frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y + 1$, $y' = \frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y - 2$.

59. Najděte rovnice obrazu přímky p v rotaci v E_2 kolem středu $S = [-2; 1]$ o úhel $\alpha = \frac{\pi}{6}$, jestliže $p : x - y + 1 = 0$.

9.9 Klasifikace shodností prostoru E_3

Věta 34. Každé shodné zobrazení v prostoru E_3 lze složit z nejvýše čtyř rovinových souměrností.

Některá shodná zobrazení v prostoru:

- Otočení kolem osy
- Posunutí
- Osová souměrnost
- Středová souměrnost
- Šroubový pohyb (torze)

Postup klasifikace shodností v trojrozměrném prostoru lze nečekaně zjednodušit. Vhodné umístění soustavy souřadnic nám dovolí využívat poznatky z klasifikace shodností v rovině.

Každé shodné zobrazení f v prostoru můžeme zapsat soustavou rovnic

$$\begin{aligned}f : \quad x'_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + b_1 \\x'_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + b_2 \\x'_3 &= a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + b_3,\end{aligned}$$

kterou lze užitím matic přepsat do tvaru

$$f : \begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

a pak stručně vyjádřit rovnicí

$$f : X' = A \cdot X + B. \tag{81}$$

Stejně jako v rovině i v prostoru platí, že (81) je shodností právě tehdy, když je

$$A^T \cdot A = E, \tag{82}$$

Důležitou skutečností je, že charakteristická rovnice tohoto zobrazení, která se dá stručně zapsat ve tvaru

$$\det(A - \lambda E) = 0, \tag{83}$$

kde E je jednotková matice, je algebraickou rovnicí **třetího stupně** vzhledem k neznámé λ . Vzhledem k tomu, že imaginární kořeny se vyskytují vždy ve dvojicích (navzájem komplexně sdružených čísel), má algebraická rovnice třetího stupně vždy alespoň jeden kořen reálný. V případě rovnice (83) ho označme λ_0 . Shodnost v E_3 má tak vždy alespoň jeden samodružný směr \vec{u} ; $\vec{u}' = \lambda_0 \vec{u}$. V případě shodností se zachovává velikost vektoru, tj. platí $\|\vec{u}'\| = \|\lambda_0 \vec{u}\| = \|\vec{u}\|$. Potom je zřejmé, že hodnota λ_0 bude 1 nebo -1 . Předpokládejme, že vektor \vec{u} je jednotkový a volme soustavu souřadnou tak, aby měla osa z směr tohoto vektoru. Při takto zvolené soustavě souřadné se rovnice shodnosti zjednoduší na tvar

$$\begin{aligned} x'_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 && + b_1 \\ x'_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 && + b_2 \\ x'_3 &= && \pm x_3 + b_3. \end{aligned}$$

Potom je požadavek, aby byla matice tohoto zobrazení

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \pm 1 \end{bmatrix}$$

ortonormální, splněn právě tehdy, když je ortonormální matice

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}.$$

To je ale úloha, kterou jsme řešili při klasifikaci shodností v rovině. Víme tedy, že při vhodné volbě os x, y připadají v úvahu následující možnosti, jak může tato matice vypadat:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}; \quad \text{pro } \sin \alpha \neq 0.$$

Ke každé z těchto matic existují dvě soustavy rovnic (protože uvažujeme $\pm z$). Posouzením množin samodružných bodů příslušných zobrazení a vhodnými volbami soustavy souřadné se dobereme k výsledné klasifikaci:

1) IDENTITA ($b_1 = b_2 = b_3 = 0$) nebo **POSUNUTÍ**

$$\begin{aligned} x'_1 &= x_1 + b_1 \\ x'_2 &= x_2 + b_2 \\ x'_3 &= x_3 + b_3. \end{aligned}$$

2) SOUMĚRNOST PODLE ROVINY ($b_1 = b_2 = 0$) nebo

SOUMĚRNOST PODLE ROVINY složená s POSUNUTÍM podél této roviny

$$\begin{aligned}x'_1 &= x_1 + b_1 \\x'_2 &= x_2 + b_2 \\x'_3 &= -x_3 + b_3.\end{aligned}$$

3) SOUMĚRNOST PODLE OSY rovnoběžné se z ($b_3 = 0$) nebo

SOUMĚRNOST PODLE OSY rovnoběžné se z složená s POSUNUTÍM podél této osy

$$\begin{aligned}x'_1 &= -x_1 + b_1 \\x'_2 &= -x_2 + b_2 \\x'_3 &= x_3 + b_3.\end{aligned}$$

4) STŘEDOVÁ SOUMĚRNOST

$$\begin{aligned}x'_1 &= -x_1 + b_1 \\x'_2 &= -x_2 + b_2 \\x'_3 &= -x_3 + b_3.\end{aligned}$$

5) OTOČENÍ kolem osy rovnoběžné se z ($b_3 = 0$) nebo

OTOČENÍ kolem osy rovnoběžné se z složené s POSUNUTÍM podél této osy

$$\begin{aligned}x'_1 &= x_1 \cos \alpha - x_2 \sin \alpha + b_1 \\x'_2 &= x_1 \sin \alpha + x_2 \cos \alpha + b_2 \\x'_3 &= x_3 + b_3.\end{aligned}$$

6) OTOČENÍ kolem osy rovnoběžné se z složené se SOUMĚRNOSTÍ podle roviny kolmé k této ose

$$\begin{aligned}x'_1 &= x_1 \cos \alpha - x_2 \sin \alpha + b_1 \\x'_2 &= x_1 \sin \alpha + x_2 \cos \alpha + b_2 \\x'_3 &= -x_3 + b_3.\end{aligned}$$

Poznámky.

1. Každá přímá shodnost v prostoru se dá složit z otočení kolem přímky a posunutí podél této přímky. Potom můžeme říci, že každá dvě shodná tělesa v prostoru můžeme ztotožnit posunutím, otočením nebo šroubovým pohybem.

2. Nepřímá shodnost se dostane z přímé přidáním souměrnosti podle roviny.

9.10 Cvičení – Shodnosti prostoru E_3

60. Ověřte, že rovnicemi

$$\begin{aligned}x' &= \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}y + \frac{2}{3}z + \frac{2}{3} \\y' &= \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}y - \frac{2}{3}z - \frac{2}{3} \\z' &= -\frac{2}{3}x - \frac{2}{3}y - \frac{1}{3}z + \frac{2}{3}\end{aligned}$$

je dáno shodné zobrazení E_3 na sebe, najděte jeho samodružné body a směry.

61. Napište rovnice posunutí v E_3 , v němž se bod $M = [-2, 3, 1]$ zobrazí na bod $M' = [5, 0, -4]$. Najděte souřadnice obrazu bodu $A = [1, 1, 1]$ v tomto posunutí.

9.11 Shodná zobrazení v prostoru E_n

Věta 35. *Ke každé shodnosti f v E_n existuje k souměrností podle nadrovin tak, že f je jejich složením, $k < n + 2$.*

10 Grupa podobností eukleidovského prostoru

10.1 Podobné zobrazení

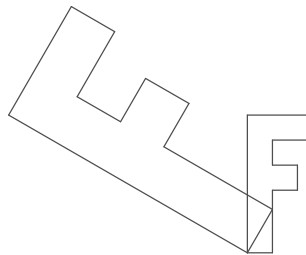
Definice 25. Zobrazení f eukleidovského prostoru E do eukleidovského prostoru E' se nazývá **podobné zobrazení**, jestliže existuje kladné reálné číslo k tak, že pro každé dva body X, Y prostoru E platí:

$$|f(X)f(Y)| = k|XY|. \quad (84)$$

Číslo k se nazývá *koeficient podobného zobrazení* f .

Poznámka. Podobnosti s koeficientem $k \neq 1$ nazýváme **vlastní podobnosti**.

PŘÍKLAD 10.1. Napište rovnice pro zobrazení v rovině, které každý útvar otočí kolem počátku o úhel α a dvakrát zvětší, viz Obr. 27.



Obrázek 27: Podobné zobrazení v rovině

Věta 36. Každé podobné zobrazení eukleidovského prostoru E do eukleidovského prostoru E' lze složit ze **stejnolehlosti prostoru E** a **shodného zobrazení E do E'** .

Věta 37. Každé podobné zobrazení je *afinní*.

Protože podobná zobrazení jsou afinními zobrazeními, platí pro ně také věta o určenosti. Samozřejmě v podobě, která koresponduje s definicí podobného zobrazení.

Věta 38 (O určenosti podobného zobrazení). *Nechť jsou P_0, P_1, \dots, P_n lineárně nezávislé body n -rozměrného eukleidovského prostoru E_n a P'_0, P'_1, \dots, P'_n body eukleidovského prostoru E' . Afinní zobrazení prostoru E_n do prostoru E' , které zobrazuje bod P_i na bod P'_i pro $i = 0, 1, \dots, n$ je právě tehdy podobné, existuje-li číslo $k > 0$ tak, že pro všechny dvojice $i, j = 0, 1, \dots, n$ platí $|P'_i P'_j| = k|P_i P_j|$.*

Poznámka. Body prohlásíme ze *lineárně nezávislé* tehdy, když jimi určené vektory jsou lineárně nezávislé.

PŘÍKLAD 10.2. Formulujte „větu o určenosti podobného zobrazení“ pro rovinu, tj. eukleidovský prostor E_2 .

PŘÍKLAD 10.3. V eukleidovské rovině je dán čtverec $ABCD$ se středem S . Existuje právě jedno podobné zobrazení roviny čtverce do sebe, při kterém se body A, B, S zobrazí po řadě na body D, B, C . Rozložte toto podobné zobrazení na stejnoolehlost a shodné zobrazení.

PŘÍKLAD 10.4. Ukažte, že každé dvě paraboly jsou podobné, tzn. že existuje podobné zobrazení roviny jedné paraboly na rovinu druhé paraboly, při kterém se jedna parabola zobrazí na druhou.

Věta 39. Každá „vlastní podobnost“ má právě jeden samodružný bod.

Důkaz. Nejprve dokážeme, že vlastní podobnost (tj. podobnost s koeficientem $k \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$) nemůže mít více než jeden samodružný bod, potom dokážeme, že musí mít aspoň jeden. Tak nám vyjde, že musí mít právě jeden.

(i) Skutečnost, že vlastní podobnost nemůže mít více než jeden samodružný bod dokážeme sporem. Nechť má vlastní podobnost f nejméně dva samodružné body K a L ; $K \xrightarrow{f} K' = K, L \xrightarrow{f} L' = L$. Potom $|K'L'| = |KL|$, což je ve sporu s definicí vlastní podobnosti (84), kde $k \neq 1$. Vlastní podobnost tedy nemůže mít více než jeden samodružný bod.

(ii) Nyní dokážeme, že vlastní podobnost musí mít aspoň jeden samodružný bod. Uvažujme podobnost f s rovnicí $X' = A \cdot X + B$, kde $A^T \cdot A = k^2 I$. Její samodružné body jsou potom řešením soustavy lineárních rovnic odpovídající maticové rovnici $(I - A) \cdot X = -B$. Klíčová pro náš důkaz je skutečnost, že determinant matice této soustavy je pro vlastní podobnost různý od nuly, $|I - A| \neq 0$. Pokud by byl roven nule, tj. pokud by platila rovnost $|I - A| = 0$, znamenalo by to, že řešením charakteristické rovnice $|\lambda I - A| = 0$ (viz str. 35) homomorfismu φ asociovaného s f je vlastní číslo $\lambda = 1$. Kdyby tomu tak bylo, existoval by (vlastní) vektor $\vec{u} = Q - P$, pro jehož obraz $\varphi(\vec{u}) = f(Q) - f(P)$ platí $\varphi(\vec{u}) = \vec{u}$. Protože se zobrazí sám na sebe, nemění se jeho velikost, tj. $|f(P)f(Q)| = |PQ|$, což je ve sporu s definicí vlastní podobnosti (84), kde $k \neq 1$. Determinant $|I - A|$ tedy nemůže být roven nule, soustava $(I - A) \cdot X = -B$ je proto regulární a má právě jedno řešení. \square

Grupa podobností

Množina všech podobností eukleidovského prostoru E_n spolu s operací skládání tvoří grupu - tzv. *grupu podobností prostoru E_n* .

10.2 Podobnosti eukleidovské roviny

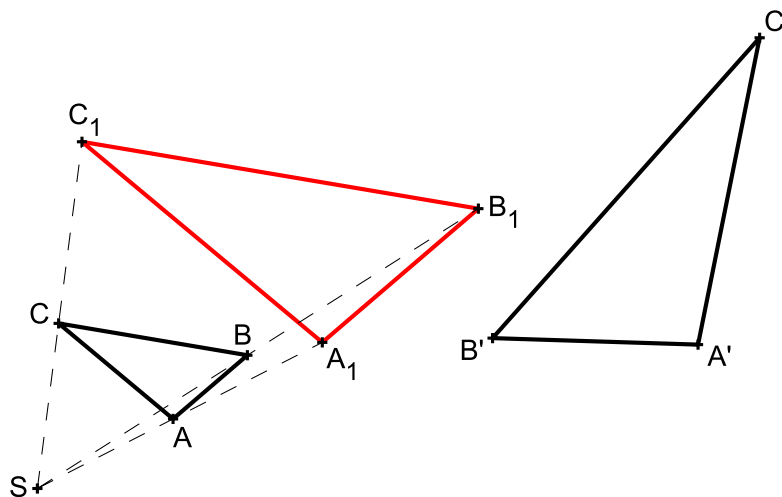
Zopakujme si definici *podobného zobrazení v rovině* (stručně *podobnosti*): Zobrazení f roviny (eukleidovského prostoru E_2) na sebe se nazývá „*podobnou transformací roviny*“ (též „*podobností v rovině*“), jestliže existuje kladné reálné číslo k tak, že pro každé dva body X, Y roviny a jejich obrazy X', Y' platí:

$$|X'Y'| = k|XY|.$$

Číslo k se nazývá *koeficient podobnosti* f .

Poznámky.

1. Každé podobné zobrazení je afinní.
2. Podobnosti s koeficientem $k \neq 1$ nazýváme *vlastní podobností*.



Obrázek 28: Každou podobnost lze rozložit na stejnolehlost a shodnost

Věta 40. Každou podobnost v rovině s poměrem podobnosti k lze rozložit na stejnolehlost $H(S, k)$ a shodnost Z . Přitom střed stejnolehlosti můžeme volit libovolně a shodnost Z je tím určena jednoznačně.

Věta 41 (O určenosti podobnosti v rovině). Každá podobnost v rovině je jednoznačně určena trojúhelníkem ABC a jeho obrazem $A'B'C'$ takovým, že $|A'B'| = k|AB|$, $|B'C'| = k|BC|$, $|A'C'| = k|AC|$, kde $k, k > 0$, je koeficient této podobnosti.

Víme, že každé podobné zobrazení eukleidovské roviny do sebe lze složit ze *stejnolehlosti a shodnosti*.

1. Stejnolehlost H volíme se středem v počátku soustavy souřadnic a s koeficientem $k > 0$:

$$H : X \mapsto \bar{X}; \quad \bar{x} = kx \\ \bar{y} = ky.$$

2. Shodnost S je buď přímá nebo nepřímá:

$$S : \bar{X} \mapsto X'; \quad x' = \bar{x} \cos \alpha \mp \bar{y} \sin \alpha + p \\ y' = \bar{x} \sin \alpha \pm \bar{y} \cos \alpha + q.$$

Výsledkem složení $S \circ H$ je potom přímá nebo nepřímá podobnost.

Přímá podobnost	Nepřímá podobnost:
$x' = kx \cos \alpha - ky \sin \alpha + p \\ y' = kx \sin \alpha + ky \cos \alpha + q.$	$x' = kx \cos \alpha + ky \sin \alpha + p \\ y' = kx \sin \alpha - ky \cos \alpha + q.$
$x' = ax - by + p \\ y' = bx + ay + q.$	$x' = ax + by + p \\ y' = bx - ay + q.$
$A^T \cdot A = (a^2 + b^2) \cdot I; \quad k = \sqrt{a^2 + b^2}$	

Věta 42. *Každá vlastní podobnost eukleidovské roviny je buď stejnoolehlost, nebo stejnoolehlost složená s otočením kolem středu stejnoolehlosti, nebo stejnoolehlost složená s osovou souměrností, jejíž osa prochází středem stejnoolehlosti.*

10.3 Cvičení – Podobnosti

1. Najděte všechny podobnosti euklidovské roviny, při kterých se bod $[1, 0]$ zobrazí na bod $[4, -2]$ a bod $[2, 3]$ na bod $[2, -8]$. [2]

2. **Eulerovými body** se nazývají středy úseček spojujících vrcholy trojúhelníku s průsečíkem jeho výšek.

Dokažte následující tvrzení:

Středy stran, paty výšek a Eulerovy body libovolného trojúhelníku leží na jedné kružnici. (*Tato kružnice se nazývá kružnice devíti bodů, Eulerova kružnice nebo Feuerbachova kružnice.*)

3. Najděte podobnost euklidovské roviny, při které se zobrazí počátek na bod $[0, 2]$, bod $[1, 1]$ na počátek a bod $[2, 0]$ na bod $[2, p]$. Určete p a najděte samodružné body a směry nalezené podobnosti.

4. Najděte rovnice podobnosti, při které je počátek samodružný a obrazem bodu $[5, -3]$ je bod $[1, 1]$.

5. Určete všechny podobnosti, pro které jsou bod $[1, 1]$ a směr vektoru $(1, 1)$ samodružné.

6. Napište rovnice všech podobností zobrazujících body $[1, 2]$ a $[0, 1]$ po řadě na body $[3, -1]$, $[4, 2]$. Rozložte je na stejnoolehlost a shodnost.

7. V rovině je dán čtverec $ABCD$ se středem S . Určete obraz bodu C v podobnosti, která zobrazuje body A, B, S po řadě na body B, D, C . Určete samodružný bod této podobnosti.

8. Sestrojte alespoň jeden trojúhelník ABC , pro který platí $|AB| : |AC| = 3 : 5$, $\alpha = 60^\circ$, $\rho = 1,8\text{cm}$ (poloměr kružnice vepsané).

9. Sestrojte kosodélník $ABCD$, je-li dáno $|\angle DAB| = \alpha$, $|\angle ABD| = \varepsilon$, $|AC| = e$.

10. Je dána kružnice k a bod A , který je bodem vnější oblasti kružnice k . Sestrojte všechny sečny kružnice k , které procházejí bodem A a pro jejichž průsečíky X, Y s kružnicí platí $|AX| = 2|AY|$.

11. Je dána kružnice $k(S; 4\text{cm})$, její tečna t a bod $M \in k$ tak, že $|Mt| = 2\text{cm}$. Sestrojte úsečku XY procházející bodem M tak, aby $X \in k, Y \in t$ a $|MX| : |MY| = 3 : 2$.

12. Jsou dány dvě různoběžky a, b a kružnice k tak, že $P \in a \cap b$ je bodem vnitřní oblasti kružnice k . Sestrojte všechny kružnice, které se dotýkají přímek a, b i kružnice k .

13. Dokažte následující věty:

Věta 43 (Menelaova věta). *Je dán trojúhelník ABC a přímka p , která neprochází žádným z bodů A, B, C , ale protíná přímky AB, BC, CA v bodech C', A', B' . Potom platí:*

$$(ABC') \cdot (BCA') \cdot (CAB') = 1.$$

Naopak, platí-li uvedený vztah, body A', B', C' leží na přímce.

Věta 44 (Pappova věta). *Nechť jsou A', B', C', D' rovnoběžné nebo středové průměty čtyř navzájem různých bodů A, B, C, D přímky p na přímku p' ; $p' \neq p$. Potom:*

$$(A'B'C'D') = (ABCD)$$

Věta 45 (Cevaova věta). *Nechť je dán trojúhelník ABC a bod M , který neleží na žádné z přímek AB, BC, CA . Průsečíky přímek AM, BM, CM s přímkami BC, CA, AB (různé od bodů A, B, C) označme postupně A', B', C' . Potom platí:*

$$(ABC') \cdot (BCA') \cdot (CAB') = -1.$$

Naopak, platí-li uvedený vztah, jsou přímky AA', BB', CC' buď navzájem rovnoběžné nebo se protínají v jediném bodě.

14. Zobrazení f euklidovské roviny do euklidovského trojrozměrného prostoru je vzhledem k zvoleným kartézským soustavám souřadnic dáno rovnicemi: $x' = 2x + ay - 1$, $y' = x + by + 2$, $z' = y + 1$. Určete koeficienty a, b tak, aby bylo zobrazení f podobné. Jaký je koeficient tohoto podobného zobrazení f ?

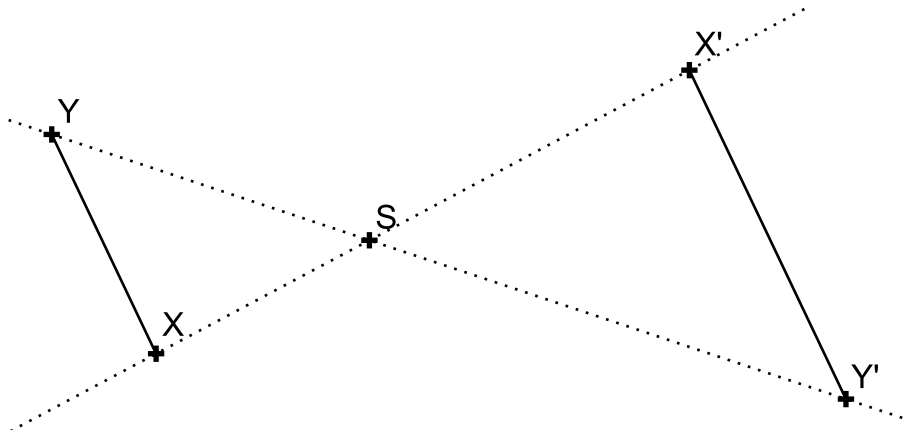
15. Určete p, q, r tak, aby byla rovnicemi $x' = x - 2y + 2z + 4$, $y' = px + 2y + z - 2$, $z' = qx + ry + 2z - 2$ dána vzhledem ke kartézské soustavě souřadnic podobnost. Určete její samodružný bod a samodružné směry.

11 Stejnolehlost

Patří mezi tzv. homotetie, tj. afinní zobrazení, která mají všechny směry samodružné.

Definice 26. Budiž dán bod S a reálné číslo κ (různé od 0 a 1). **Stejnolehlost** $H(S; \kappa)$ se středem S a koeficientem κ je zobrazení, které každému bodu X roviny přiřadí bod X' tak, že

$$\overrightarrow{SX'} = \kappa \overrightarrow{SX}.$$



Obrázek 29: Stejnolehlost $H(S, \kappa = -1.5)$

Poznámka. Stejnolehlost můžeme definovat i více popisně: Budiž dán bod S a reálné číslo κ (různé od 0 a 1). **Stejnolehlost** $H(S; \kappa)$ se středem S a koeficientem κ je zobrazení, které každému bodu X roviny přiřadí bod X' tímto způsobem:

1. Pro $X \equiv S$ je $X' \equiv X$,
2. Pro $X \neq S$ je $|X'S| = |\kappa| \cdot |XS|$,
 pro $\kappa > 0$ leží X' leží na polopřímce \overrightarrow{SX} a
 pro $\kappa < 0$ leží X' leží na polopřímce opačné k \overrightarrow{SX} .

Poznámka. Zobrazení inverzní k stejnoolehlosti $H(S; \kappa)$ je stejnoolehlost $H^{-1}\left(S; \frac{1}{\kappa}\right)$.

Základní vlastnosti stejnoolehlosti $H(S, \kappa)$:

1. Obrazem přímky je přímka s ní rovnoběžná.
2. Obrazem úsečky AB je úsečka $A'B'$; $|A'B'| = |\kappa| \cdot |AB|$.

3. Obrazem polopřímky je polopřímka s ní souhlasně ($\kappa > 0$) nebo nesouhlasně ($\kappa < 0$) rovnoběžná .

4. Obrazem úhlu $\angle AVB$ je úhel $\angle A'V'B'$; $|\angle A'V'B'| = |\angle AVB|$.

PŘÍKLAD 11.1. Jsou dány dva různé body A, B a reálné číslo $\lambda \neq 0, 1$. Najděte na přímce AB bod C tak, aby platilo $(ABC) = \lambda$.

11.1 Analytické vyjádření stejnolehlosti

Rovnice stejnolehlosti $H(S; \kappa)$: $H : X' = \kappa X + (1 - \kappa)S$.

PŘÍKLAD 11.2. Napište rovnice stejnolehlosti afinní roviny \mathbf{A}_2 , která zobrazuje bod $B = [2, 0, -1]$ na bod $C = [0, 1, 3]$ a má koeficient $\kappa = -2$. Najděte souřadnice jejího středu.

Řešení v programu wxMaxima:

```
(%i1) B:[2,0,-1] $ C:[0,1,3] $ S:[s1,s2,s3] $
```

```
(%i4) H:C-S=-2*(B-S);
```

```
(%o4) [-s1, 1 - s2, 3 - s3] = [-2 (2 - s1), 2 s2, -2 (-s3 - 1)]
```

```
(%i5) res:solve(lhs(H)-rhs(H), [s1,s2,s3])[1];
```

```
(%o5) [s1 = 4/3, s2 = 1/3, s3 = 1/3]
```

```
(%i6) S:ev(S,res);
```

```
(%o6) [4/3, 1/3, 1/3]
```

11.2 Skládání stejnolehlostí

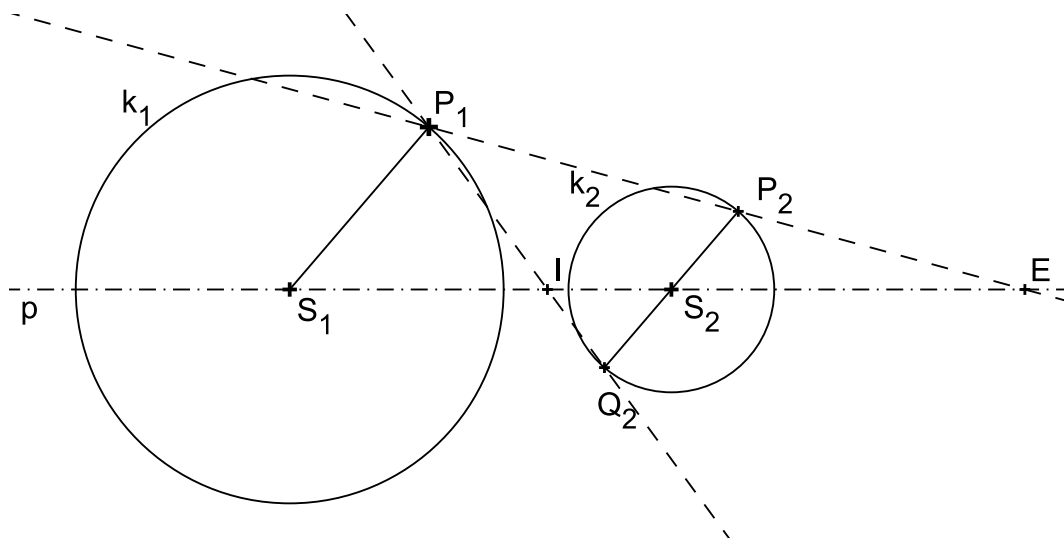
Věta 46 (O skládání stejnolehlosti a translace). Zobrazení složené ze stejnolehlosti $H(S; \kappa)$ a translace $X' = X + \vec{t}$ je stejnolehlost $H'(Q; \kappa)$, kde $Q = S + \frac{1}{1 - \kappa}\vec{t}$.

Věta 47 (O skládání stejnolehlostí). Složením dvou stejnolehlostí $H_1(S_1, \kappa_1)$, $H_2(S_2, \kappa_2)$ vznikne

1. IDENTITA, jestliže $\kappa_1\kappa_2 = 1$ a $S_1 = S_2$,
2. POSUNUTÍ, jestliže $\kappa_1\kappa_2 = 1$ a $S_1 \neq S_2$,
3. STEJNOLEHLOST $H(S, \kappa)$ s koeficientem $\kappa = \kappa_1\kappa_2$, jestliže $\kappa_1\kappa_2 \neq 1$. Přitom, pro $S_1 = S_2$ je také $S = S_1 = S_2$, pro $S_1 \neq S_2$ leží bod S na přímce S_1S_2 .

11.3 Stejnolehlost kružnic

Pro dvě kružnice $k_1(S_1; r_1)$, $k_2(S_2; r_2)$ s různými poloměry existují právě dvě stejnolehlosti, které převádějí kružnici k_1 do kružnice k_2 : $H_1(E, r_2/r_1)$ a $H_2(I, -r_2/r_1)$ (Bod E se někdy označuje jako „vnější střed stejnolehlosti“, bod I potom jako „vnitřní střed stejnolehlosti“.). Jestliže se kružnice dotýkají v bodě T , je $T = I$ v případě vnějšího dotyku a $T = E$ v případě vnitřního dotyku kružnic.



Obrázek 30: Stejnolehlost kružnic

Věta 48 (Mongeova věta). Jsou-li k_1, k_2, k_3 tři kružnice, které mají různé poloměry a jejichž středy neleží v přímce, platí pro vnější a vnitřní středy stejnolehlostí každých dvou z nich následující vztahy:

- i) Všechny tři vnější středy stejnolehlosti E_{12}, E_{13}, E_{23} leží v přímce.
- ii) Každé dva vnitřní středy stejnolehlosti a jeden vnější leží v přímce.
- iii) Tři vnitřní středy stejnolehlosti I_{12}, I_{13}, I_{23} neleží v přímce.

PŘÍKLAD 11.3. Je dána kružnice k , přímka p , která je vnější přímkou kružnice k , a bod $A \in p$. Sestrojte všechny kružnice, které se dotýkají přímky p v bodě A a kružnice k .

PŘÍKLAD 11.4. Jsou dány dvě různoběžky a, b a bod M , který leží uvnitř jednoho jejich úhlu. Sestrojte všechny kružnice, které procházejí bodem M a dotýkají se přímek a, b .

PŘÍKLAD 11.5. Jsou dány dvě různoběžky m, n a kružnice k ležící uvnitř jednoho jejich úhlu. Sestrojte všechny kružnice, které se dotýkají přímek m, n i kružnice k .

PŘÍKLAD 11.6. (Eulerova přímka) V trojúhelníku ABC označme T těžiště, V průsečík výšek a S střed kružnice trojúhelníku opsané. Máme dokázat, že buď všechny tři body splynou v jediný, nebo jsou navzájem různé a leží na jedné přímce (Eulerova přímka) tak, že platí $(S, V; T) = -\frac{1}{2}$.

PŘÍKLAD 11.7. (Kružnice devíti bodů, též Feuerbachova či Eulerova kružnice) V trojúhelníku ABC označme V průsečík výšek, S střed kružnice opsané, C_1, A_1, B_1 středy stran AB, BC, CA . Nechť k_0 je kružnice procházející body A_1, B_1, C_1 . Dokažte:

- 1) Na kružnici k_0 leží též paty A_0, B_0, C_0 výšek v_a, v_b, v_c a středy úseček AV, BV, CV .
- 2) Střed kružnice k_0 je středem úsečky SV , pokud $S \neq V$; pokud je $S \equiv V$ splyne střed k_0 s bodem S .
- 3) Poloměr kružnice k_0 je roven polovině poloměru kružnice trojúhelníku opsané.

PŘÍKLAD 11.8. Platí tato věta: Jsou-li dány dvě rovnoběžné úsečky různých délek, existují právě dvě stejnolehlosti, které zobrazí první úsečku na druhou. Dokážete je vždy najít?

11.4 Cvičení – Stejnolehlost

62. Do půlkruhu s průměrem AB vepište čtverec $KLMN$ tak, aby strana KL ležela na úsečce AB a další dva vrcholy M, N na dané půlkružnici.

63. Je dána přímka p , kružnice k a bod A . Sestrojte všechny úsečky XY tak, aby platilo: $X \in p, Y \in k, A \in XY, |AY| = 3|AX|$.

64. Jsou dány dvě různoběžky a, b a kružnice k tak, že a je sečnou a b je vnější přímkou kružnice k . Sestrojte všechny kružnice, které se dotýkají přímek a, b i kružnice k .

65. Sestrojte trojúhelník ABC , je-li dáno:

a) $v_a = 5\text{cm}$, $a : b : c = 2 : 3 : 4$,

b) α, β, v_c ,

c) α, β, t_c ,

d) $a : b = 3 : 5$, $\gamma = 60^\circ$, $t_c = 6\text{cm}$.

Stejnolehlost – Úlohy na domácí přípravu

66. Určete p tak, aby existovala stejnoolehlost se středem $[3, 2]$, zobrazující bod $[1, 4]$ na bod $[2, p]$. Napište rovnice této stejnoolehlosti. [2]

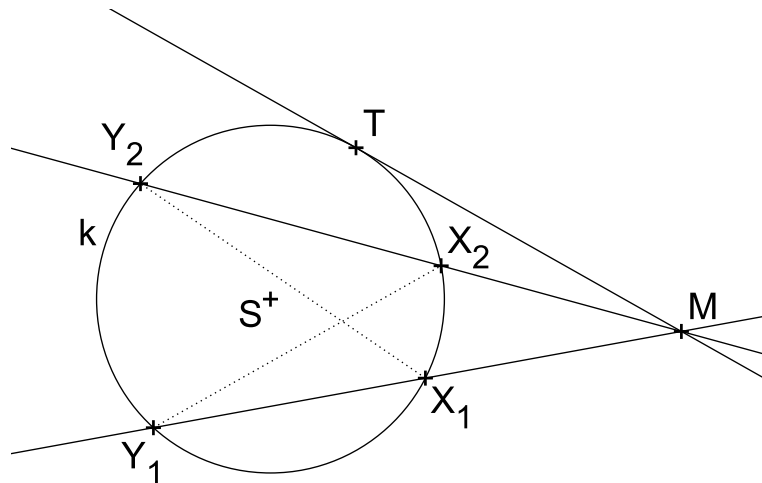
67. Je dána kružnice k a bod M uvnitř této kružnice. Sestrojte všechny tětivy kružnice, které jsou bodem M rozděleny na části v poměru $2 : 3$. [1]

68. Narýsujte libovolný trojúhelník ABC . Uvnitř strany AC sestrojte bod X a uvnitř strany BC bod Y tak, aby platilo $|AX| = |XY|$ a $XY \parallel AB$. [2]

12 Mocnost bodu ke kružnici

Definice 27. Mocností bodu M ke kružnici $k(S; r)$ rozumíme reálné číslo m , pro které platí:

- (1) $|MX| \cdot |MY| = |m|$, kde X, Y jsou průsečíky kružnice k s její libovolnou sečnou procházející bodem M .
- (2) Je-li M vnějším bodem kružnice k , je $m > 0$.
- (3) Je-li M vnitřním bodem kružnice k , je $m < 0$.
- (4) Je-li $M \in k$, je $m = 0$.



Obrázek 31: Mocnost bodu M ke kružnici k

Věta 49. Je dána kružnice $k(S; r)$ a bod M , který na ní neleží. Potom pro libovolné dvě sečny kružnice k , které procházejí bodem M , jejichž průsečíky s kružnicí k označíme X_1, Y_1 a X_2, Y_2 , platí

$$|MX_1| \cdot |MY_1| = |MX_2| \cdot |MY_2|.$$

Věta 50. Nechť je dána kružnice $k(S; r)$ a bod M . Potom pro mocnost m bodu M ke kružnici k platí

$$m = d^2 - r^2,$$

kde $d = |MS|$ je vzdálenost bodu M od středu kružnice k .

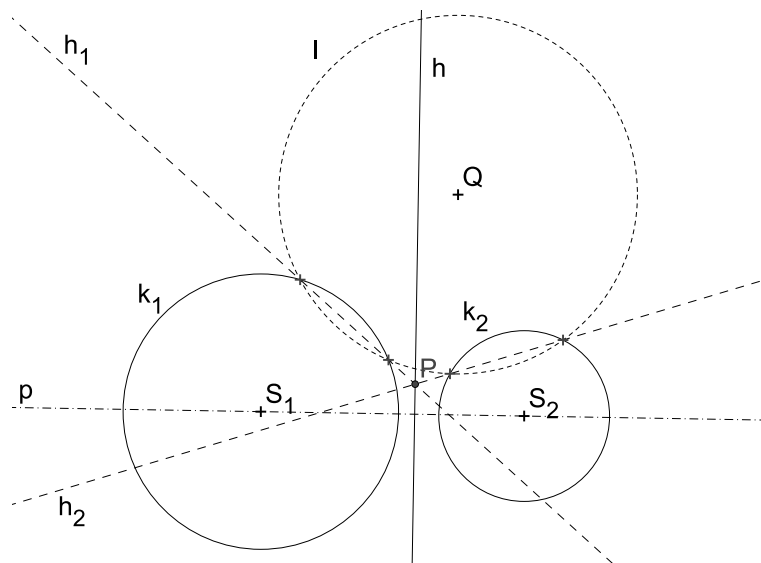
Věta 51. Nechť M je vnější bod kružnice $k(S; r)$, m jeho mocnost ke kružnici k . Jestliže T je dotykový bod tečny vedené z bodu M ke kružnici k , tak platí $|MT|^2 = m$.

12.1 Chordála a potenční střed

Věta 52 (Chordála dvojice kružnic). *Nechť jsou $k_1(S_1; r_1), k_2(S_2; r_2)$ dvě nesoustředné kružnice. Množina bodů X , které mají k oběma kružnicím stejnou mocnost, je přímka $h \perp S_1S_2$. Jestliže kružnice k_1, k_2 mají společný bod M , potom přímka h prochází tímto bodem.*

Poznámka. Přímka h , která je množinou bodů X , majících stejnou mocnost k nesoustředným kružnicím k_1, k_2 se nazývá **chordála** (též potenční přímka) kružnic k_1, k_2 .

Poznámka. Bod, který má ke třem vzájemně různým kružnicím stejnou mocnost se nazývá **potenční bod** (též potenční střed).



Obrázek 32: Chordála h kružnic k_1, k_2 , potenční bod P kružnic k_1, k_2, l

Analytické vyjádření chordály

Chordálu kružnic $k_1(S_1[m_1, n_1], r_1), k_2(S_2[m_2, n_2], r_2)$ s rovnicemi $k_1 : (x - m_1)^2 + (y - n_1)^2 = r_1^2$ a $k_2 : (x - m_2)^2 + (y - n_2)^2 = r_2^2$ můžeme analyticky vyjádřit rovnicí:

$$(x - m_1)^2 + (y - n_1)^2 - r_1^2 = (x - m_2)^2 + (y - n_2)^2 - r_2^2 \quad (85)$$

PŘÍKLAD 12.1. *Sestrojte chordálu dvou nesoustředných kružnic k_1, k_2 , které nemají společný bod.*

PŘÍKLAD 12.2. Určete analyticky množinu všech bodů roviny, které mají ke dvěma daným kružnicím stejnou mocnost.

PŘÍKLAD 12.3. Sestrojte kružnici k , která prochází danými body $A \neq B$ a dotýká se dané přímky t .

12.2 Cvičení – Mocnost bodu ke kružnici

69. Je dán úhel $\angle AVB$ a uvnitř něho bod M . Sestrojte kružnici, která prochází bodem M a dotýká se přímek AV, BV .

70. Obdélník má velikosti stran a, b . Máme sestrojit

a) libovolný obdélník stejného obsahu,

b) obdélník stejného obsahu, jehož jedna strana má danou velikost c .

71. Jsou dány dvě nesoustředné kružnice k_1, k_2 a přímka p . Na této přímce určete bod P tak, aby tečny z něho vedené ke kružnicím k_1, k_2 měly stejnou délku.

72. Sestrojte kružnici, která se dotýká dané kružnice $k(S; r)$ a prochází dvěma různými body A, B , které leží vně dané kružnice k .

73. Je dán lichoběžník $ABCD$ se základnami AB, CD , $|AB| > |CD|$. Uvnitř úsečky AD sestrojte bod P a uvnitř úsečky BC bod Q tak, aby platilo zároveň $PQ \parallel AB$ a $PC \parallel AQ$.

74. Sestrojte lichoběžník $ABCD$, jsou-li dány délky jeho ramen $|BC| = 4.5\text{cm}$, $|DA| = 3\text{cm}$ a velikost 75° úhlu, který svírají přímky BC a AD , platí-li navíc $|AB \parallel CD| = |AC|^2$.

13 Vybrané věty z planimetrie

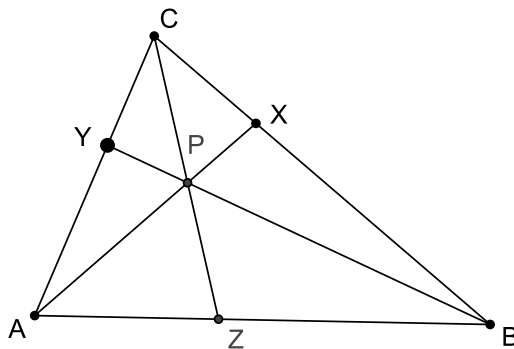
13.1 Cevova věta a její užití

Giovanni Ceva byl italský matematik žijící na přelomu 17. a 18. století. *Cevova věta* stanovuje podmínku, kdy mají tři přímky procházející vrcholy trojúhelníku společný bod.

Věta 53 (Cevova věta). *V trojúhelníku ABC se přímky AX , BY a CZ , kde body X, Y, Z leží na stranách protilehlých odpovídajícím vrcholům, protínají v jednom bodě právě tehdy, když platí:*

$$\frac{|AZ|}{|ZB|} \cdot \frac{|BX|}{|XC|} \cdot \frac{|CY|}{|YA|} = 1.$$

Důkaz: Poměry úseček, které figurují v Cevově větě, převedeme na poměry obsahů trojúhelníků, které mají tyto úsečky jako základny a přitom mají stejné výšky, viz Obr. 33.



Obrázek 33: Cevova věta

$$\frac{|AZ|}{|ZB|} = \frac{S_{AZC}}{S_{BZC}} = \frac{S_{AZP}}{S_{BZP}} = \frac{S_{AZC} - S_{AZP}}{S_{BZC} - S_{BZP}} = \frac{S_{ACP}}{S_{BPC}},$$

$$\frac{|BX|}{|XC|} = \frac{S_{BXA}}{S_{CXA}} = \frac{S_{BXP}}{S_{CXP}} = \frac{S_{BXA} - S_{BXP}}{S_{CXA} - S_{CXP}} = \frac{S_{BPA}}{S_{CPA}},$$

$$\frac{|CY|}{|YA|} = \frac{S_{CYB}}{S_{AYB}} = \frac{S_{CYP}}{S_{AYP}} = \frac{S_{CYB} - S_{CYP}}{S_{AYB} - S_{AYP}} = \frac{S_{CPB}}{S_{APB}}.$$

Potom

$$\frac{|AZ|}{|ZB|} \cdot \frac{|BX|}{|XC|} \cdot \frac{|CY|}{|YA|} = \frac{S_{ACP}}{S_{BPC}} \cdot \frac{S_{BPA}}{S_{CPA}} \cdot \frac{S_{CPB}}{S_{APB}} = 1.$$

Q.E.D.

Klasický, ale i počítačový důkaz Cevovy věty, spolu s jejím zobecněním, najde zájemce také v online dostupné publikaci [6].

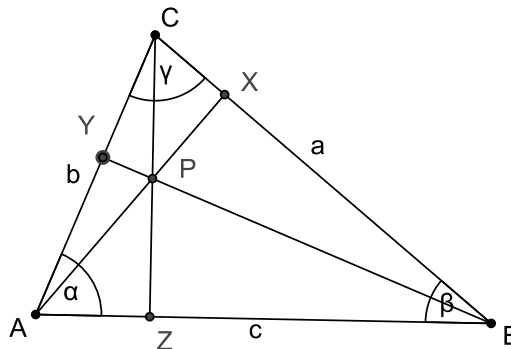
PŘÍKLAD 13.1. *Užitím Cevovy věty dokažte, že se těžnice v trojúhelníku protínají v jednom bodě.*

Řešení: Body X, Y, Z jsou středy stran trojúhelníku. Potom

$$\frac{|AZ|}{|ZB|} \cdot \frac{|BX|}{|XC|} \cdot \frac{|CY|}{|YA|} = \frac{1}{1} \cdot \frac{1}{1} \cdot \frac{1}{1} = 1.$$

PŘÍKLAD 13.2. *Užitím Cevovy věty dokažte, že se výšky v trojúhelníku protínají v jednom bodě (tj. ceviány kolmé na protilehlé strany trojúhelníku mají jeden společný bod).*

Řešení: Viz Obr. 34.



Obrázek 34: Cevova věta pro výšky

$$\frac{|AZ|}{|ZB|} \cdot \frac{|BX|}{|XC|} \cdot \frac{|CY|}{|YA|} = \frac{b \cos \alpha}{a \cos \beta} \cdot \frac{c \cos \beta}{b \cos \gamma} \cdot \frac{a \cos \gamma}{c \cos \alpha} = 1.$$

PŘÍKLAD 13.3. *Užitím Cevovy věty dokažte, že osy vnitřních úhlů trojúhelníku se protínají v jednom bodě.*

Věta 54. *Osa vnitřního úhlu trojúhelníku rozděluje protilehlou stranu na dvě části, jejichž délky jsou ve stejném poměru jako jim přilehlé strany trojúhelníku.*

Cvičení – Cevova věta

75. Nechť X, Y, Z jsou body dotyku stran trojúhelníku s jemu vepsanou kružnicí. Dokažte, že jim odpovídající ceviány se protínají v jednom bodě.

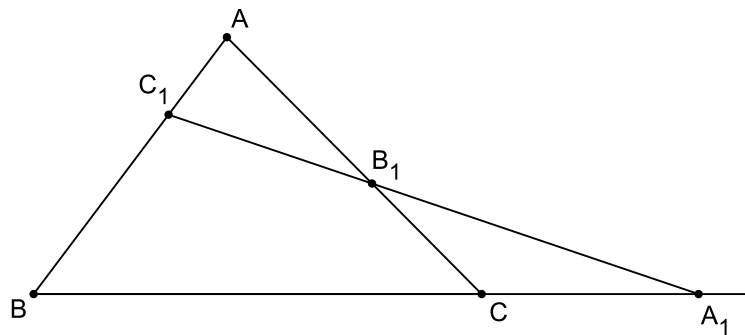
76. Nechť $ABC, A'B'C'$ jsou dva různé trojúhelníky, které mají rovnoběžné sobě odpovídající strany. Potom mají přímky AA', BB' a CC' společný bod. Dokažte.

13.2 Menelaova věta

Menelaus z Alexandrie byl řecký matematik žijící na přelomu 1. a 2. století n. l. *Menelaova věta* se zabývá vztahem trojúhelníku a přímky, která neprochází žádným z jeho vrcholů a není rovnoběžná s žádnou z jeho stran. Tak, jako *Cevaova věta* poskytuje kritérium pro existenci společného bodu tří přímk, tak *Menelaova věta* poskytuje kritérium kolineárnosti tří bodů.

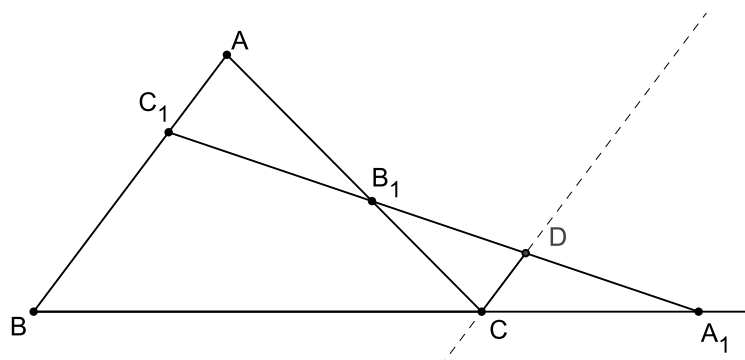
Věta 55 (Menelaova věta). *Body A_1, B_1, C_1 ležící na stranách trojúhelníku ABC nebo na jejich prodlouženích jsou kolineární právě tehdy, když platí:*

$$\frac{|BA_1|}{|A_1C|} \cdot \frac{|CB_1|}{|B_1A|} \cdot \frac{|AC_1|}{|C_1B|} = 1. \quad (86)$$



Obrázek 35: Menelaova věta

Důkaz. K důkazu věty využijeme podobnosti trojúhelníků. Vyjdeme z Obr. 36, který dostaneme z Obr. 35 doplněním úsečky CD rovnoběžné se stranou AB , bod D přitom leží na přímce A_1C_1 . Vidíme v něm dvě dvojice podobných trojúhelníků:



Obrázek 36: Důkaz Menelaovy věty užitím podobnosti trojúhelníků

$\triangle C_1B_1A \sim \triangle DB_1C$ a $\triangle BA_1C_1 \sim \triangle CA_1D$. Přitom z podobnosti první uvedené dvojice trojúhelníků vyplývá vztah

$$\frac{|AC_1|}{|AB_1|} = \frac{|CD|}{|CB_1|}, \quad (87)$$

z podobnosti druhé dvojice trojúhelníků pak vyplývá

$$\frac{|BA_1|}{|C_1B|} = \frac{|A_1C|}{|CD|}. \quad (88)$$

Po vydělení rovnosti (87) rovností (88) a následné úpravě dostaneme dokazovaný vztah

$$\frac{|BA_1|}{|A_1C|} \cdot \frac{|CB_1|}{|B_1A|} \cdot \frac{|AC_1|}{|C_1B|} = 1.$$

□

Vztah (86) uvedený v Menelaově větě lze formulovat také pomocí *dělicího poměru* (viz str. 11). Připomeňme si, že zlomky ze vztahu (86) lze psát takto:

$$\frac{|BA_1|}{|A_1C|} = |(BCA_1)|, \quad \frac{|CB_1|}{|B_1A|} = |(CAB_1)|, \quad \frac{|AC_1|}{|C_1B|} = |(ABC_1)|.$$

Protože je zřejmé, že přímka A_1C_1 nemůže protnout všechny tři strany trojúhelníku ABC v jejich vnitřních bodech, bude součin uvedených dělicích poměrů vždy kladný. Vztah (86) tak můžeme přepsat do podoby

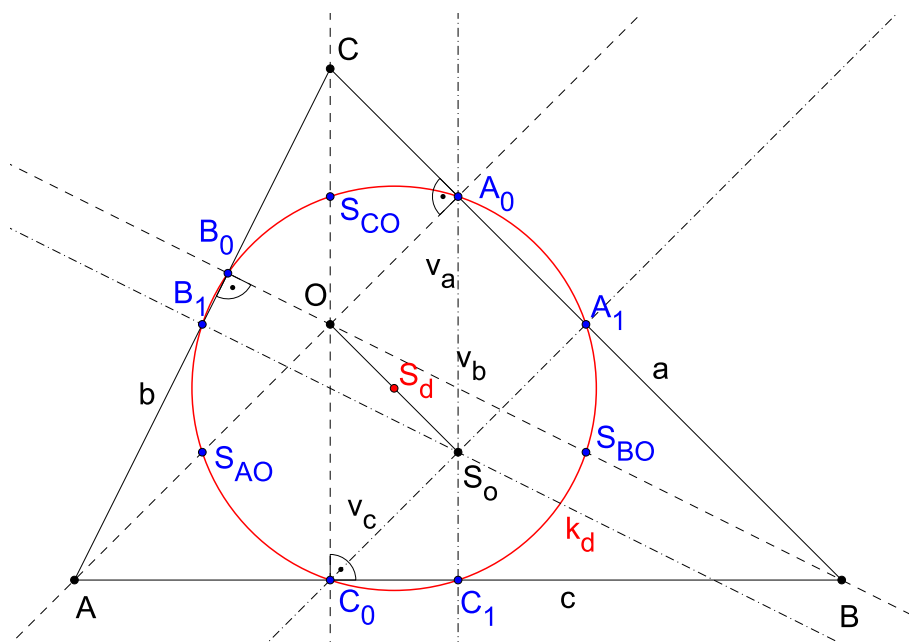
$$(ABC_1) \cdot (BCA_1) \cdot (CAB_1) = 1. \quad (89)$$

Klasický i počítačový důkaz této věty, spolu s jejím zobecněním, najde zájemce také v online dostupné publikaci [6].

13.3 Kružnice devíti bodů

V trojúhelníku ABC označme O průsečík výšek, S_o střed kružnice opsané, C_1, A_1, B_1 středy stran AB, BC a CA . Jestliže k_d je kružnice procházející body A_1, B_1 a C_1 , potom na ni leží také paty A_0, B_0, C_0 výšek v_a, v_b, v_c a středy úseček AO, BO, CO . Tato kružnice se nazývá *kružnice devíti bodů* (též *Feuerbachova* či *Eulerova kružnice*), viz Obr. 37

Střed kružnice k_d je středem úsečky S_oO , její poloměr je roven polovině poloměru kružnice trojúhelníku ABC opsané.

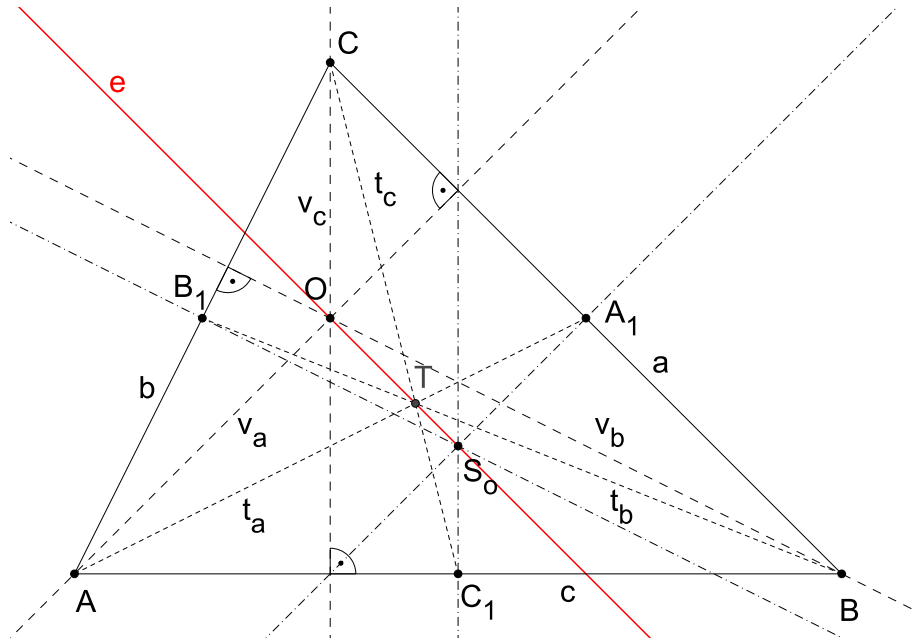


Obrázek 37: Kružnice devíti bodů

Konstrukce kružnice devíti bodů a její souvislost s Eulerovou přímkou (viz str. 102) je znázorněna v apletu „*Eulerova přímka. Kružnice devíti bodů.*“

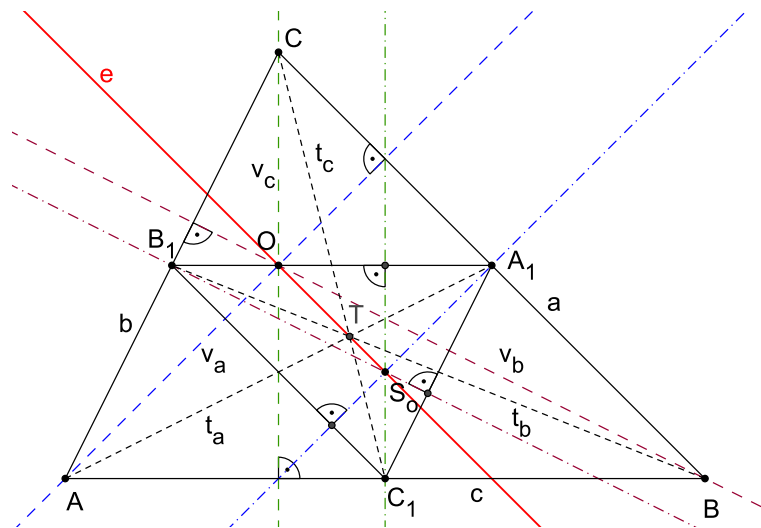
13.4 Eulerova přímka

V trojúhelníku ABC označme T těžiště, O průsečík výšek a S_o střed kružnice trojúhelníku opsané. Potom buď všechny tyto tři body splývají v jediný, nebo jsou navzájem různé a leží na společné přímce tak, že platí $(S_oOT) = -\frac{1}{2}$. Tuto přímku nazýváme *Eulerova přímka*, viz Obr. 38.



Obrázek 38: Eulerova přímka

K důkazu výše uvedeného tvrzení využijeme stejnoolehlost $H(T, -\frac{1}{2})$. Z Obr. 39 je patrné, že v této stejnoolehlosti se $\triangle ABC$ zobrazí na $\triangle A_1B_1C_1$. Protože výškami



Obrázek 39: $H(T, -\frac{1}{2}) : \triangle ABC \rightarrow \triangle A_1B_1C_1$

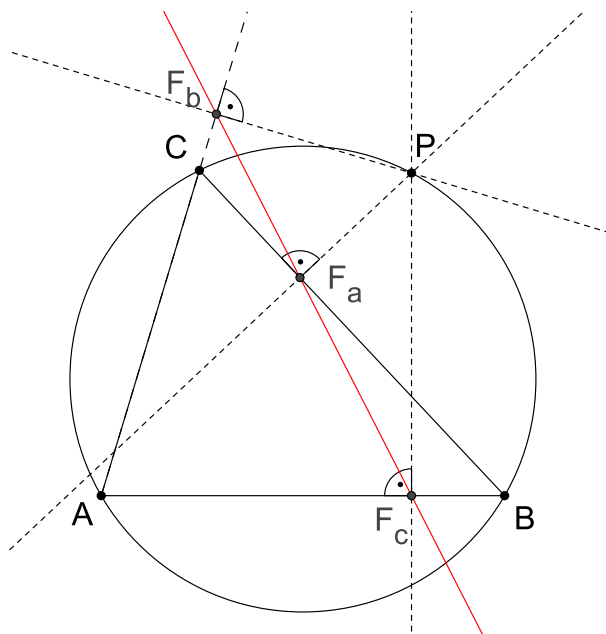
(výšky teď chápeme jako přímky) $\triangle A_1B_1C_1$ jsou osy stran původního $\triangle ABC$, můžeme říci, že výšky trojúhelníku ABC se ve stejnolehlosti $H(T, -\frac{1}{2})$ zobrazí na osy jeho stran. Potom se ale průsečík výšek O zobrazí na průsečík os stran (tj. střed kružnice opsané $\triangle ABC$) S_o . Z vlastností stejnolehlosti plyne, že příslušné tři body O, S_o, T leží v přímce a platí pro ně $(S_oOT) = -\frac{1}{2}$.

Konstrukce Eulerovy přímky a její souvislost s kružnicí devíti bodů (viz str. 101) je znázorněna v apletu „*Eulerova přímka. Kružnice devíti bodů.*“

13.5 Simsonova přímka

Robert Simson (1687–1768) byl skotský matematik. I když se přímka zmiňovaná v této kapitole většinou spojuje s jeho jménem, uvedenou vlastnost zřejmě objevil až v roce 1797 jiný skotský matematik, *William Wallace* (1768–1843).

Uvažujme libovolný bod P roviny trojúhelníku ABC , jehož kolmé průměty na (dle potřeby prodloužené) strany BC , CA a AB tohoto trojúhelníku označíme po řadě F_a , F_b a F_c . Potom body F_a , F_b a F_c leží na přímce (jsou kolineární) právě tehdy, když bod P leží na kružnici opsané trojúhelníku ABC . Takováto přímka potom existuje ke každému bodu P opsané kružnice a nazývá se *Simsonova přímka* bodu P .



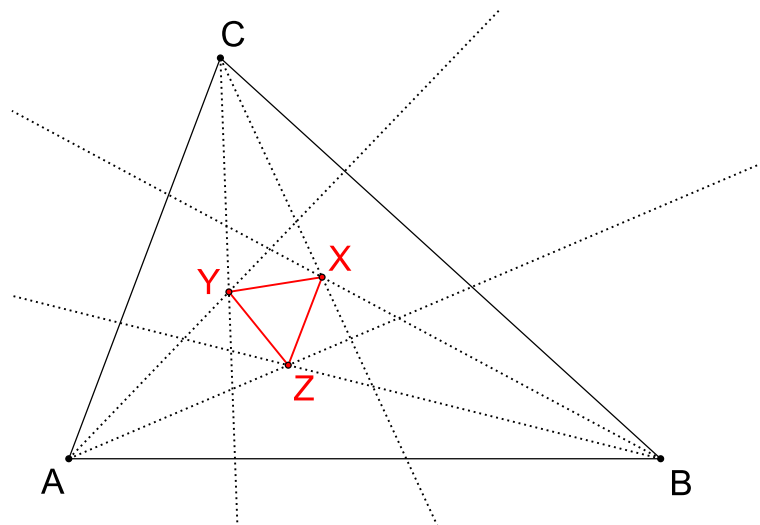
Obrázek 40: Simsonova přímka

Tvrzení o Simsonově přímce je známo též jako *Wallace–Simsonova věta*. Klasický i počítačový důkaz této věty, spolu s jejím zobecněním, najde zájemce v online dostupné publikaci [6]. Důkaz tvrzení lze najít také v [4], str. 82.

13.6 Morleyova věta

Morleyova věta představuje jednu z nejpřekvapivějších vlastností elementární geometrie, kterou v roce 1899 objevil a dokázal anglo-americký matematik *Frank Morley* (1860–1937).

Věta 56 (Morleyova věta). *Polopřímky, které dělí vnitřní úhly libovolného trojúhelníku na třetiny, se protínají ve vrcholech rovnostranného trojúhelníku (viz Obr. 41).*



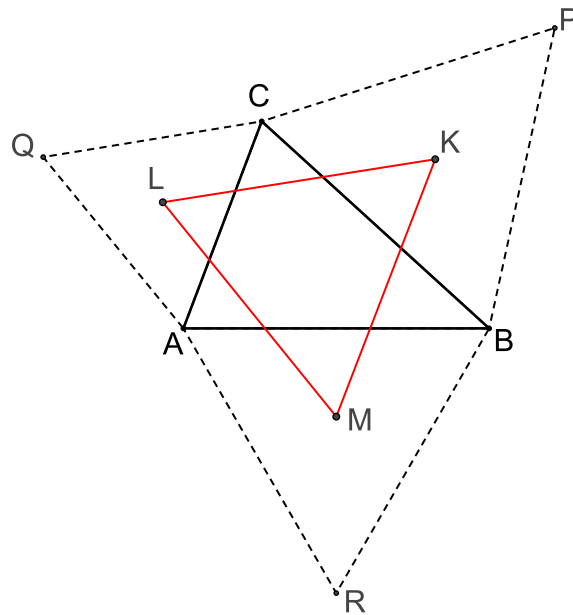
Obrázek 41: Morleyova věta: Pro libovolný $\triangle ABC$ je $\triangle XYZ$ rovnostranný

Důkaz viz [4], str. 86.

13.7 Napoleonova věta

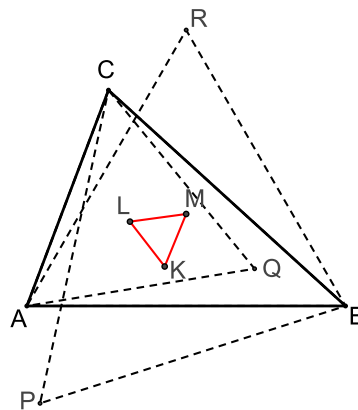
Stejně jako *Morleyova věta*, tak i následující věta, pojmenovaná podle *Napoleona Bonaparta* (1769–1821), popisuje vlastnost, která obecnému trojúhelníku přiřazuje trojúhelník rovnostranný.

Věta 57 (Napoleonova věta). *Jestliže jsou nad stranami libovolného trojúhelníku sestaveny rovnostranné trojúhelníky, potom jejich středy (tj. např. těžiště) tvoří rovnostranný trojúhelník.*



Obrázek 42: Napoleonova věta: Pro libovolný $\triangle ABC$ je $\triangle KLM$ rovnostranný

Poznámka. Stejná vlastnost platí i pro středy rovnostranných trojúhelníků sestavených nad stranami libovolného trojúhelníku ve směru dovnitř, viz Obr. 43.



Obrázek 43: „Vnitřní Napoleonův trojúhelník“

14 Axiomatická výstavba geometrie

„Důkladnost matematiky spočívá na definicích, axiómech, důkazech.“

Immanuel Kant

Základy axiomatické výstavby geometrie i celé matematiky položil Eukleides (kolem r. 300 př.n.l.) ve svých Základech (viz [3] *Eukleidovy základy (Elementa)*, překlad F. Servít, 1907, nebo [2] *Základy. Knihy I–IV, V–VI, VII–IX, X, XI–XI.*, koment. Petrem Vopěnkou, 2008–2012.)

Eukleides pojal výklad geometrie v Základech axiomaticky. Celou geometrii odvodil ze 14 axiomů¹, z nichž 5 nazval postuláty² (postuláty můžeme chápat jako formulace základních úloh, které lze v rovině konstruovat; Servít je nazýval „Úkoly prvotné“), [7], [9].

Eukleidovy postuláty:

1. Dva dané (různé) body spojit úsečkou.
2. Danou úsečku na jedné i druhé straně libovolně prodloužit.
3. Vytvořit kružnici s daným středem a procházející daným bodem (různým od středu).
4. Všechny pravé úhly jsou shodné.
5. Dvě přímky v rovině, které protínají jinou přímku této roviny a tvoří s ní po jedné straně vnitřní úhly, jejichž součet je menší dvou pravých, se vždy protínají a to po té straně, kde je součet menší.

Poznámka. Konstrukce uskutečňované podle prvních tří Eukleidových postulátů jsou známé jako *eukleidovské konstrukce*, též konstrukce kružítkem a pravítkem (bez měřítka) (anglicky *Compass and straightedge constructions*). Ne každou geometrickou úlohu lze řešit pomocí těchto konstrukcí, viz např. *kvadratura kruhu*, *zdvojení krychle* a *trisekce úhlu*. Nemožnost vyřešit tyto tři úlohy pouze užitím kružítko a pravítka byla dokázána až v 19. století, po vytvoření náležitých matematického aparátu. Nemožnost eukleidovské konstrukce *zdvojení krychle* a *trisekce úhlu* dokázal *Pierre Wantzel* v roce 1837. Nemožnost eukleidovské konstrukce *kvadratury kruhu* pak vyplynula z důkazu transcendentnosti čísla π , který podal *Ferdinand von Lindemann* v roce 1882.

¹*axiom* – základní věta, poučka, zásada, která se přijímá a bez důkazu považuje za pravdivou: log., mat. tvrzení deduktivní teorie přijaté bez důkazu; *Akademický slovník cizích slov*, Academia, Praha, 2001

²*postulát* – princip, požadavek nebo tvrzení určité vědecké teorie přijaté bez důkazů a tvořící její východisko: log. axiom; *Akademický slovník cizích slov*, Academia, Praha, 2001

Některé překlady Základů uvádějí jenom 4 postuláty. Postulát o rovnoběžkách pak řadí mezi axiomy, jako XI. nebo XII. Soustava axiomů eukleidovské geometrie tak není jednoznačně určena. Těchto soustav může být více a mohou se lišit podobou axiomů i jejich počtem. Co je v jedné soustavě axiomem, může být v jiné soustavě větou deduktivně odvozenou. Během historie interpretace Eukleidových Základů tak vznikla například celá řada vět ekvivalentních s postulátem o rovnoběžkách, viz str. 117.

Soustava axiomů eukleidovské geometrie představená v Základech není vytvořena příliš důsledně a trpí některými logickými nedostatky. Nápravu učinil až David Hilbert (1862 - 1943) na přelomu 19. a 20. století. Svou představu, že v logicky dokonale vystavěném systému axiomů v podstatě ztrácí smysl původní význam jednotlivých použitých pojmů, vyjádřil známým výrokiem:

„Vždy musíme být schopni místo body, přímky a roviny říkat stoly, židle a púllitry.“

Tím se otevírá cesta k různým *modelům abstraktní geometrie*. Zanedlouho si uvedeme například *Poincarého model* nebo *Beltramioho–Kleinův model*.

Požadavky na soustavu axiomů:

1. *Bezespornost* – z daných axiomů nelze odvodit zároveň V i $\neg V$.
2. *Nezávislost* – žádný z axiomů soustavy by neměl být logickým důsledkem ostatních (soustava by tedy neměla obsahovat žádný zbytečný axiom).
3. *Úplnost* – všechny modely odvozené ze soustavy axiomů jsou vzájemně izomorfní, tj. platí v nich stejné věty.

14.1 Hilbertova soustava axiomů eukleidovské geometrie

Axiomy této soustavy lze rozdělit do následujících pěti skupin (v závorce je vždy uveden symbol, nebo více symbolů, pro příslušnou skupinu axiomů):

- axiomy incidence (**I**),
- a. uspořádání (**U**),
- a. shodnosti (**S**),
- a. spojitosti (**A, C, D**),
- axiom rovnoběžnosti (**R**).

I. Axiomy incidence I

- I1:** Dva různé body mají společnou jednu přímku.
I2: Přímka obsahuje aspoň dva různé body.
I3: Existuje aspoň jedna trojice různých bodů, které nepatří téže přímce.
I4: Jestliže tři body nepatří jedné přímce, potom patří jediné rovině.
I5: Jestliže dva různé body přímky p leží v rovině ρ , potom všechny body přímky p leží v ρ .
I6: Jestliže průnik dvou rovin není prázdný, obsahuje aspoň dva navzájem různé body.
I7: Existuje aspoň jedna čtveřice bodů, které neleží v téže rovině.
I8: Rovina obsahuje aspoň jeden bod.

Definice 28. *Tři body, které leží na téže přímce, nazýváme kolineární.*

PŘÍKLAD 14.1. *Užitím axiomů I dokažte následující věty:*

Věta 58. *Průnikem dvou různých rovin, které mají společný aspoň jeden bod, je přímka.*

Důkaz. $I6 \rightarrow I1 \rightarrow I5$ □

Věta 59. *Tři nekolineární body jsou navzájem různé.*

Důkaz. $A = B = C$ nebo $A = B \neq C$ vede ke sporu □

MODELÝ GEOMETRIE [I]

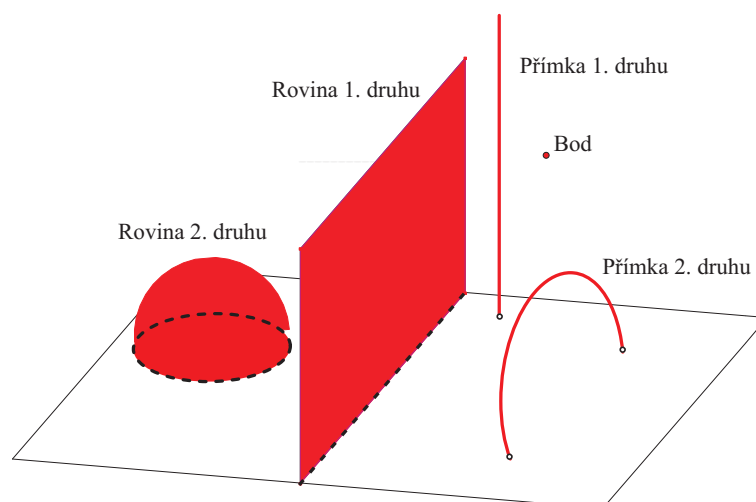
Tj. modely geometrie založené pouze na axiomech incidence.

• M1: Minimální model

- čtyři body,
- šest přímek (protože existuje $\binom{4}{2} = 6$ neuspořádaných dvojic ze čtyř prvků),
- čtyři roviny (protože existuje $\binom{4}{3} = 4$ neuspořádaných trojic ze čtyř prvků).

- **M2: Poincarého model**

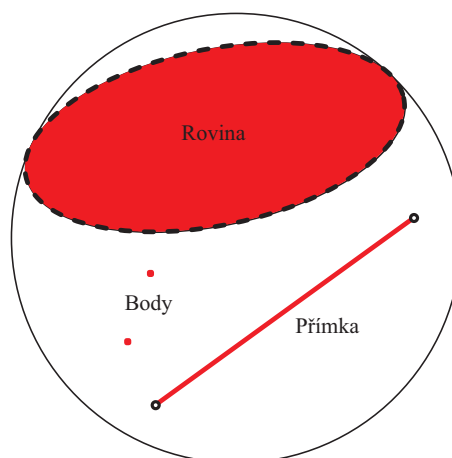
Je tvořen **vnitřními** body poloprostoru omezeného rovinou ω . Rozlišujeme zde přímky a roviny prvního a druhého druhu (viz Obr. 44). Přímka prvního druhu je tvořena vnitřními body polopřímky kolmé na rovinu ω , přímka druhého druhu je tvořena vnitřními body polokružnice kolmé k rovině ω a se středem v rovině ω . Rovina prvního druhu je tvořena vnitřními body poloroviny kolmé na ω a rovina druhého druhu potom odpovídá vnitřním bodům polokoule se středem v ω . Incidence je eukleidovská.



Obrázek 44: Poincarého model

- **M3: Beltramiho–Kleinův model**

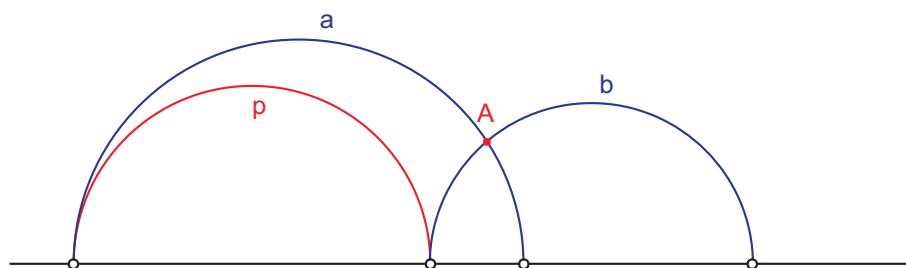
Tvořen vnitřními body koule. Přímku reprezentují vnitřní body tětivy koule a rovinu vnitřní body jejího „rovinného“ řezu (viz Obr. 45). Incidence je eukleidovská.



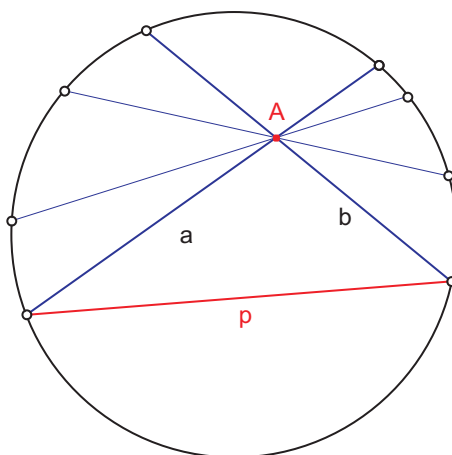
Obrázek 45: Beltramiho-Kleinův model

Oba uvedené modely **M2** a **M3** mají i své rovinné varianty, viz Obr. 46, 47. Rovinný případ *Beltramio–Kleinova modelu* se často uvádí jenom pod názvem *Kleinův model*, případně *Kleinův diskový model*.

Poznámka. Modely **M2**, **M3** nejsou modely eukleidovské geometrie, nesplňují axiom rovnoběžnosti (viz Obr. 46, 47). Vidíme, že v obou případech existuje více než jedna rovnoběžka s p , tj. přímka, která prochází bodem A a nemá s danou přímkou p žádný společný bod. Přímky a, b jsou hraniční přímky.



Obrázek 46: M2: Axiom rovnoběžnosti



Obrázek 47: M3: Axiom rovnoběžnosti

- **M4: Aritmetický celočíselný model planimetrie**

- *bod* = uspořádaná dvojice celých čísel $[x, y] \in Z$,
- *přímka* = body splňující rovnici $ax + by + c = 0$, $a, b, c \in Z$.

Poznámka. Stejně můžeme definovat model racionální (tj. $[x, y] \in Q$, $a, b, c \in Q$) či reálný (tj. $[x, y] \in R$, $a, b, c \in R$).

II. Axiomy uspořádání U

Tyto axiomy se týkají vlastnosti „bod leží mezi jinými dvěma“.

U1: Jestliže bod B leží mezi body A, C , jsou A, B, C tři různé body na přímce a platí též, že B leží mezi body C, A .

U2: Jestliže A, B jsou dva navzájem různé body, potom existuje na přímce AB aspoň jeden bod C takový, že bod B leží mezi body A, C .

U3: Ze tří různých bodů A, B, C ležících na té samé přímce leží nejvýše jeden mezi ostatními dvěma.

U4: (Paschův axiom) Jsou-li A, B, C tři nekolineární body a přímka p , která těmito body neprochází, obsahuje jistý bod mezi body A, C , potom přímka p obsahuje bod mezi A, B nebo mezi B, C .

PŘÍKLAD 14.2. *Užitím axiomů I, U dokažte následující věty.*

Věta 60. *Mezi dvěma různými body leží aspoň jeden bod.*

Důkaz. $I3 \rightarrow U2 \rightarrow U2 \rightarrow U4$

□

Věta 61. *Na každé přímce existuje nekonečně mnoho bodů.*

Geometrie [IU] se nazývá též **geometrie polohy**

Modely s konečným počtem prvků nemohou splňovat axiomy uspořádání. Proč?

(Řešení: Podle $I3, I1$ existuje v takové geometrii vždy aspoň jedna přímka, tj. podle $U2$ nekonečně mnoho bodů)

MODELY GEOMETRIE [IU]:

- **Poincarého model**

Uspořádání platí ve smyslu eukleidovském.

- **Beltramiho - Kleinův model**

Uspořádání platí ve smyslu eukleidovském.

- **Aritmetický racionální model planimetrie**

OTÁZKA: *Proč již nestačí aritmetický celočíselný model?*

III. Axiomy shodnosti S

Tyto axiomy se týkají metrických vlastností. Formulují základní vlastnosti shodnosti úseček.

S1: Je-li $AB = CD$, potom $A \neq B, C \neq D$. Pro každé dva různé body A, B platí $AB = BA$. (Shodnost se týká pouze dvojic různých bodů.)

S2: Nechť AB je úsečka, CD polopřímka. Potom existuje jediný bod E polopřímky CD , pro který platí $AB = CE$. (Nanášení úsečky na polopřímku.)

S3: Jestliže $AB = CD$ a $CD = EF$, potom $AB = EF$. (Tranzitivnost shodnosti.)

S4: Jestliže bod C leží mezi body A, B , bod C' mezi body A', B' a jestliže platí $AC = A'C', BC = B'C'$, potom platí $AB = A'B'$. (Grafický součet dvou úseček.)

S5: Nechť jsou $ABC, A'B'K$ dvě trojice nekolineárních bodů a nechť $AB = A'B'$. Potom existuje jediný bod C' poloroviny $A'B'K$, pro který platí $AC = A'C', BC = B'C'$. (Přenesení trojúhelníka k dané úsečce do dané poloroviny.)

S6: Nechť jsou $ABC, A'B'C'$ dvě trojice nekolineárních bodů, pro které platí $AB = A'B', BC = B'C', CA = C'A'$. Nechť dále leží bod P mezi body A, B a bod P' mezi body A', B' tak, že $AP = A'P'$. Potom $CP = C'P'$.

PŘÍKLAD 14.3. Užitím axiomů S dokažte, že shodnost se týká neuspořádaných dvojic bodů.

Důkaz. $S1 : AB = CD, CD = DC, S3 : AB = DC$

□

IV. Axiomy pohybu S^*

Axiomy založené na *axiomatickém* pojmu *shodné zobrazení (přemístění)*.

S*1: Leží-li bod C mezi body A, B a jsou-li A', B', C' obrazy bodu v přemístění, leží bod C' mezi body A', B' .

S*2: Jestliže je polopřímka v přemístění samodružná, je každý její bod v tomto přemístění samodružný.

S*3: Necht' jsou $ABC, A'KL$ dvě trojice nekolineárních bodů. Existuje jediné přemístění v rovině, které převádí bod A do bodu A' , polopřímku AB do polopřímky $A'K'$ a polorovinu ABC do poloroviny $A'KL$.

S*4: Jestliže jsou A, B dva různé body, potom existuje aspoň jedno přemístění, které převádí bod A do bodu B a bod B do bodu A .

S*5: Jestliže je $\angle BAC$ dutý úhel, potom existuje aspoň jedno přemístění, které převádí polopřímku AB do polopřímky AC a polopřímku AC do polopřímky AB .

S*6: Složením dvou přemístění vznikne přemístění.

S*7: Identita je přemístění.

S*8: Inverzní zobrazení k přemístění je přemístění.

S^*6, S^*7, S^*8 - všechna přemístění tvoří grupu

Věta 62. *Abstraktní geometrie $[IUS], [IUS^*]$ jsou totožné, tj. skupiny axiomu S, S^* jsou ekvivalentní.*

MODELY GEOMETRIÍ $[IUS], [IUS^*]$:

- Model planimetrie - zobrazení inverzní ke stereografické projekci.
- Aritmetický model reálný OTÁZKA: Proč již nestačí aritmetický racionální model?
- Beltramiho–Kleinův model

Zavedení neeukleidovské vzdálenosti v Beltramiho–Kleinově modelu:

Vzdálenost bodu B od bodu A (viz Obr. 48) definujeme výrazem $|\ln(UVBA)|$,

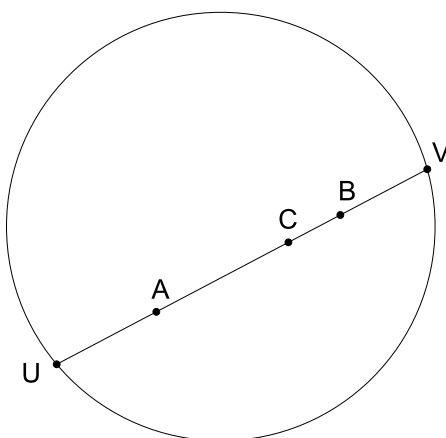
kde U, V jsou krajní body tětivy, na které leží body A, B , a $(UVBA)$ je dvojpoměr bodů U, V, B, A . Je zřejmé, že pokud se bod B blíží hranici kruhu, jeho vzdálenost od A se blíží nekonečnu. Použitím logaritmu dvojpoměru místo pouhého dvojpoměru je zajištěna možnost sčítání vzdáleností. Uvažujme body A, C, B dle Obr. 48. Potom pro příslušné dvojpoměry platí $(UVCA) \cdot (UVBC) = (UVBA)$, zatímco pro jejich logaritmy platí

$$\ln(UVCA) + \ln(UVBC) = \ln(UVBA),$$

což koersponduje s naší představou o možnosti sčítání vzdáleností. Absolutní hodnota zase zaručí nezávislost vzdálenosti dvou bodů na jejich pořadí, protože, když $(UVAB) = (UVBA)^{-1} = (VUAB)^{-1} = (VUBA)$, potom

$$|\ln(UVAB)| = |\ln(UVBA)| = |\ln(VUAB)| = |\ln(VUBA)|.$$

Pro takto definovanou vzdálenost bodů, je potom délka úsečky UV vlastně nekonečná. Dobře tak hraje roli přímky.



Obrázek 48: Vzdálenost bodů v Kleinově (Beltramiho–Kleinově) modelu

V. Axiomy spojitosti A, C, D

Souvisejí s hledáním odpovědi na otázky: *Lze změřit každou úsečku? Existuje ke každému číslu odpovídající úsečka?*

Archimédův axiom

A: Jsou dány úsečky AB, CD . Na polopřímku AB postupně nanášíme úsečku CD a dostaneme body $P_1, P_2, \dots, P_n, P_{n+1}$. Potom existuje takové $n \in \mathbb{N}$, že bod P_{n+1} neleží uvnitř AB .

Cantorův axiom (axiom úplnosti)

C: Průnik posloupnosti úseček do sebe zařazených je neprázdný.

Věta 63. *Jestliže průnik posloupnosti úseček do sebe zařazených neobsahuje žádnou úsečku, je tento průnik množinou s jedním bodem.*

Důkaz. Dokážeme sporem □

Věta 64. *V geometrii [IUSAC] je každé kladné číslo velikostí nějaké úsečky.*

Axiomy A, C lze nahradit jediným axiomem D:

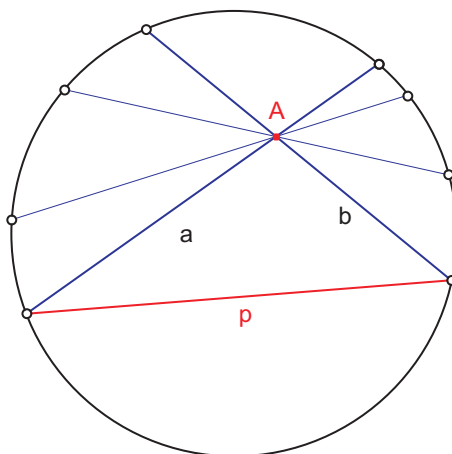
Dedekindův axiom

D: Každý omezený konvexní útvar na přímce, který obsahuje aspoň dva různé body, je úsečka (případně s vynecháním jednoho nebo obou krajních bodů).

ABSOLUTNÍ GEOMETRIE [IUSAC], [IUSD]:

Jedná se o společný základ *eukleidovské* i *neeuclidovské* geometrie.

VI. Axiom rovnoběžnosti R



Obrázek 49: Rovnoběžky v Kleinově modelu

Rovnoběžkami budeme rozumět dvě přímky v téže rovině, které nemají společný bod. Jak bylo uvedeno na str. 111, existují geometrie, v nichž bodem neležícím na

přímce prochází více rovnoběžek s touto přímkou. Potom můžeme tyto rovnoběžky rozlišit na tzv. *souběžky* a *rozběžky*. Souběžkami nazýváme „mezni“ přímky ze svazku rovnoběžek procházejících bodem A . Například v Kleinově modelu na Obr. 49 jsou *souběžkami* přímky a a b , ostatní rovnoběžky jsou *rozběžkami* (tj. vyplňují vrcholové úhly, jejichž rameny jsou souběžky).

Některé věty absolutní geometrie:

Věta 65 (Legendrova). *Jsou-li čísla α, β, γ velikosti vnitřních úhlů trojúhelníku ABC , platí $\alpha + \beta + \gamma \leq \pi$.*

Věta 66. *Jestliže je p libovolná přímka, A bod, který na ní neleží, potom bodem A prochází aspoň jedna rovnoběžka s přímkou p .*

Axiom rovnoběžnosti

R: Nechť p je libovolná přímka, A libovolný bod, který na ní neleží. Potom bodem A prochází nejvýše jedna rovnoběžka s přímkou p .

Tento axiom je ekvivalentní s Eukleidovým pátým postulátem uvedeným na str. 107. Ten se jeví tak samozřejmý, že byl dlouho považován za pouhý důsledek předchozích čtyř postulátů. Snahy o jeho odvození z těchto postulátů však vedly vždy jenom k jeho novým formulacím (některé viz níže). Důkazem toho, že axiom rovnoběžnosti je skutečným axiomem a nikoliv důsledkem jiných axiomů, bylo až objevení existence geometrie [IUSDnonR] (Lobačevskij), která se ukázala jako logicky bezesporná. R a zároveň nonR nemůže být totiž důsledkem axiomů IUSD, jsou tedy na nich nezávislé.

[IUSDR] = eukleidovská geometrie

[IUSDnonR] = hyperbolická (Lobačevského) geometrie

Některé věty ekvivalentní s R

- Existuje aspoň jeden eukleidovský trojúhelník.
- Existuje dutý úhel takový, že každý jeho vnitřní bod náleží úsečce, jejíž krajní body leží na ramenech tohoto úhlu.
- Pythagorova věta.
- Každé dvě kolmice ke dvěma různoběžkám jsou různoběžné.

- Součet vnitřních úhlů ve čtyřúhelníku je 2π .
- Každému trojúhelníku lze opsat kružnici.
- Eukleidův pátý postulát (viz str. 107).

Poznámka. Jak bylo uvedeno výše, objevení ekvivalence uvedených vět s axiomem R je výsledkem snah o odvození R z ostatních axiomů. Více o historii těchto pokusů najde zájemce například v [7] a [9].

15 Neeukleidovské geometrie

15.1 Problém rovnoběžek

Eukleidův pátý postulát se většinou nazývá *postulát o rovnoběžkách*. Od ostatních postulátů a axiomů se liší tím, že ho nelze experimentálně ověřit. Týká se totiž nekonečných přímek a existence/neexistence jejich průsečíku ležícího kdesi mimo pozorovatelné zorné pole. Vystává tak otázka, zda tento postulát nelze odvodit z ostatních. Celá staletí se matematici pokoušeli tuto možnost odvození 5. postulátu dokázat. Neúspěšnost těchto snah dala vzniknout *problému rovnoběžek*. Nebylo jasné, zda pokusy selhávají proto, že důkaz není možný, nebo proto, že sice možný je, ale pro jeho provedení je třeba nějakého dosud neznámého obratu.

Snahy o dokázání 5. postulátu pomocí ostatních axiomů a postulátů vedly ke vzniku tzv. *neeukleidovských geometrií*. Zasloužili se o to Carl Friedrich Gauss (1777–1855), János Bolyai (1802–1860) a Nikolaj Ivanovič Lobačevský (1793–1856), později pak Bernhard Riemann (1826–1866).

15.2 Lobačevského geometrie [IUSDnonR]

Též *hyperbolická geometrie*.

Lobačevský (stejně jako Bolyai a zřejmě i Gauss, který z nich byl první, ale své objevy nezveřejnil) použil pro důkaz 5. postulátu metodu nepřímého důkazu (tj. uplatnění *principu o vyloučeném třetím*). Vzal všechny věty, které se dají dokázat bez 5. postulátu (tj. věty tvořící *absolutní geometrii*, viz str. 116) a k nim přidal negaci 5. postulátu: *Existuje alespoň jedna dvojice neprotínajících se přímek v rovině, které protínají tutéž přímku a tvoří s ní po jedné její straně vnitřní úhly, jejichž součet je menší dvou pravých*. Přitom doufal, že dojde ke sporu, což se ale nestalo. Jeho systém tvrzení byl bezesporný, vytvořil tak novou, neeukleidovskou geometrii, *Lobačevského neeukleidovskou geometrii*. Poprvé ji veřejně představil při přednášce v roce 1826, formou publikace pak v roce 1829, [7]. Bolyai objevil tuto geometrii nezávisle na Lobačevském a publikoval ji v roce 1832 (literární formou je historie vzniku neeukleidovské geometrie pěkně popsána v [9]).

Pro další použití využijeme následující formulaci negace 5. postulátu:

L: Existují přímka p a bod D , který na ní neleží, takové, že alespoň dvě různé přímky jdoucí bodem D neprotínají přímku p .

Vybrané vlastnosti Lobačevského geometrie

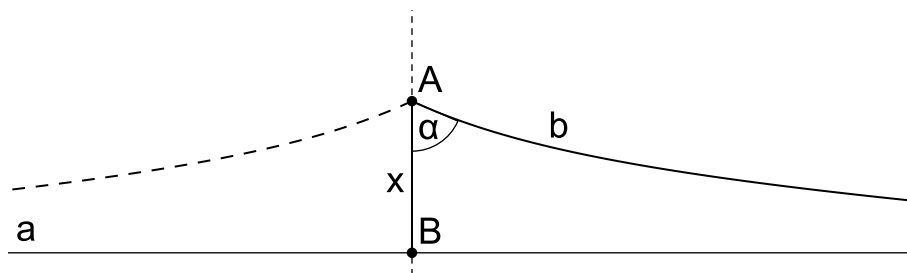
- Součet vnitřních úhlů v trojúhelníku je menší než π :

$$\alpha + \beta + \gamma < \pi.$$

- Shodují-li se dva trojúhelníky v úhlech, jsou shodné.
- Čím je menší součet úhlů trojúhelníka, tím je větší jeho obsah.
- Čím menší je obsah trojúhelníka, tím je součet úhlů bližší k π .

Lobačevského formule

pro vztah $\alpha = \Pi(x)$ mezi úhlem souběžnosti α a vzdáleností x .



Obrázek 50: Vztah mezi úhlem souběžnosti α a délkou x úsečky AB

Uvažujme souběžku b s přímkou a jdoucí bodem A , který je ve vzdálenosti x od a , viz Obr. 50. Potom platí formule

$$\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}\Pi(x)\right) = e^{-\frac{x}{k}},$$

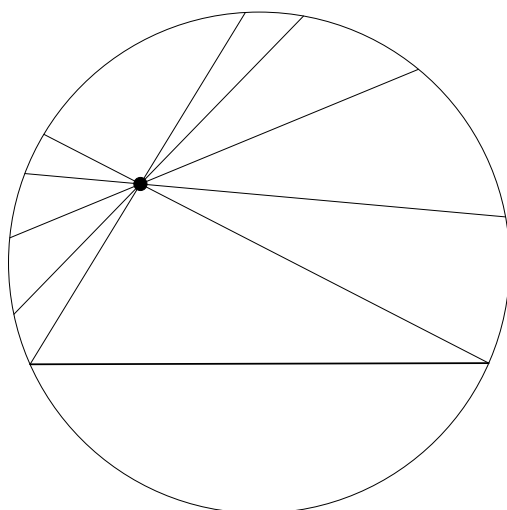
kde $\alpha = \Pi(x)$ vyjadřuje závislost úhlu souběžnosti α na x a k je libovolná konstanta. Potom je zřejmé, že platí

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\Pi(x)) = \frac{\pi}{2}.$$

Z toho vyplývá, že v dostatečně malé části Lobačevského roviny lze užívat euklidovské geometrie, aniž se dopustíme podstatných chyb, [5].

Model Lobačevského (hyperbolické) geometrie

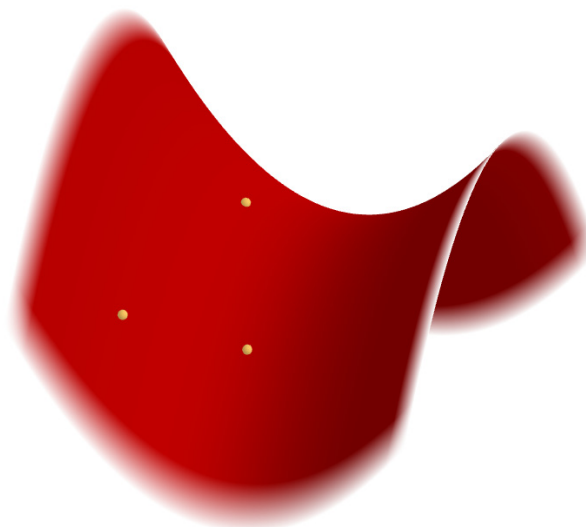
Vedle vytvoření logicky konzistentního systému geometrických vět je důležité vytvořit také model takovéto geometrie. Nejjednodušším je *Kleinův model* (*Kleinův diskový model*, rovinná varianta obecnějšího *Beltramiho–Kleinova modelu*), viz Obr. 51. Modelem roviny je kruh, přímkou je jeho tětíva. Z Obr. 51 je zřejmé, že bodem ležícím mimo danou přímku může být vedeno nekonečně mnoho přímek, které s ní



Obrázek 51: Kleinův model Lobačevského (hyperbolické) geometrie

nemají nic společného. Už tímto jednoduchým modelem je potvrzeno, že 5. postulát nelze odvodit z ostatních. Kdyby tomu tak bylo, musel by v Kleinově modelu platit.

Dalším možným modelem Lobačevského (hyperbolické) geometrie je plocha parabolického hyperboloidu (svým tvarem připomínající sedlo), viz Obr. 52. Nejkratší spojnicí dvou bodů na ploše je tzv. *geodetická čára* (viz též “Geodesics on an ellipsoid”), která se u ploch různých od roviny liší od úsečky. V důsledku toho má trojúhelník tvořený třemi body na parabolickém hyperboloidu součet vnitřních úhlů menší než 180° . Naproti tomu u trojúhelníku na kulové ploše (představte si např. rovnora-



Obrázek 52: Hyperbolický paraboloid

menný trojúhelník se základnou na rovníku a s hlavním vrcholem v severním pólu) je součet úhlů větší než 180° . Kulová plocha je tak modelem další neeuclidovské

geometrie, tzv. *Riemannovy (eliptické) geometrie*.

15.3 Riemannova geometrie

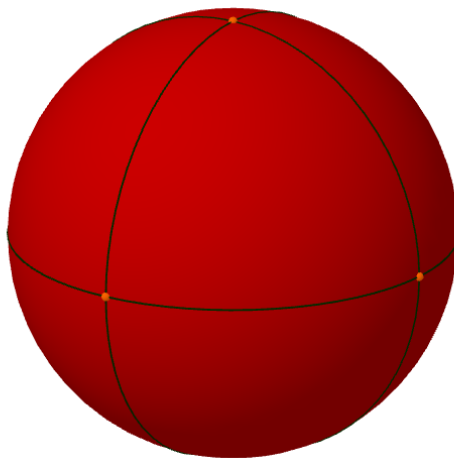
Těž *eliptická geometrie*.

Bernhard Riemann (1826–1866) formuloval v roce 1854 teorii *obecné metrické geometrie*, která zahrnovala kromě *eukleidovské geometrie* a nedávno objevené *hyperbolické (Bolyai–Lobačevského) geometrie* ještě novou *eliptickou geometrii*, později též nazývanou *Riemannova geometrie*.

Typickou vlastností této geometrie je skutečnost, že součet vnitřních úhlů v trojúhelníku je větší než π :

$$\alpha + \beta + \gamma > \pi$$

Modelem Riemannovy geometrie je pak povrch koule (sféry).



Obrázek 53: Povrch koule jako model Riemannovy eliptické geometrie

Literatura

- [1] Devlin, K: Jazyk matematiky, ARGO, 2003.
- [2] Eukleides, *Základy. Knihy I–IV.*, koment. Petrem Vopěnkou, OPS, Nymburk, 2008.
- [3] Eukleides, *Eukleidovy základy (Elementa)*, překlad F. Servít, 1907. Dostupné na https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Eukleides_Servit.pdf
- [4] Kuřina, F. *10 pohledů na geometrii*. Akademie věd České republiky, Praha, 1996.
- [5] Kutuzov, B. V. *Lobačevského geometrie a elementy základů geometrie*. Nakladatelství Československé akademie věd, Praha, 1953.
- [6] Pech, P. *Klasické vs. počítačové metody při řešení úloh v geometrii*. Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích, České Budějovice, 2005. Dostupné na <http://www.pf.jcu.cz/stru/katedry/m/knihy/Metody.pdf>
- [7] Pavlíček, J. B. *Základy neeukleidovské geometrie Lobačevského*. Přírodovědecké nakladatelství, Praha, 1953. Dostupné na <http://dml.cz/dmlcz/402750>
- [8] Sekanina, M. a kol.: Geometrie II, SPN Praha, 1988.
- [9] Vopěnka, P. *Trýznivé tajemství*. Práh, Praha, 2003.
- [10] Vyšín, J. a kol.: Geometria pre pedagogické fakulty II, Bratislava, 1970.